Věta (vlastnosti determinantu)

- Výměnou řádků (sloupců) se změní znaménko determ. na opačné.
- Vynásobením řádku (sloupce) číslem α se determinant zvětší (zmenší) α-krát.
- Přičtením α-násobku řádku k jinému se determinant nezmění.
- Matice ve schodovitém tvaru má determinant rovno součinu diagonálních prvků.
- determinant součinu matic, A, B n/n

$$\det(A\cdot B)=\det(B\cdot A)=\det A\cdot\det B$$

Důkaz: $\det A=\varepsilon^{i_1 i_2 \ldots i_n}\cdot a_1^{i_1} a_2^{i_2}\cdot\ldots\cdot a_n^{i_n}$

$\det B=\varepsilon^{i_1 i_2 \ldots i_n} b_1^{i_1} b_2^{i_2}\ldots b_n^{i_n}$

$C=A\cdot B\quad C=(c_j^i)$

$c_j^i=a_j^k\, b_k^i$

$$\det C=\varepsilon^{i_1 i_2\ldots i_n} c_1^{i_1} c_2^{i_2}\ldots c_n^{i_n}=$$

$$=\varepsilon^{i_1 i_2\ldots i_n} a_1^{l_1} b_{l_1}^{i_1}\cdot a_2^{l_2} b_{l_2}^{i_2}\cdot\ldots\cdot a_n^{l_n} b_{l_n}^{i_n}=$$

$$=\varepsilon^{i_1 i_2\ldots i_n}\cdot\varepsilon^{l_1 l_2\ldots l_n} a_1^{l_1} b_1^{i_1}\cdot a_2^{l_2} b_{l_2}^{i_2}\cdot\ldots\cdot a_n^{l_n} b_{l_n}^{i_n}=$$

$$=\varepsilon^{l_1 l_2\ldots l_n} a_1^{l_1} a_2^{l_2}\ldots a_n^{l_n}\,\varepsilon^{i_1 i_2\ldots i_n} b_1^{i_1} b_2^{i_2}\ldots b_n^{i_n}$$

$$=\det A\cdot\det B.$$

Věta: Matice je regulární právě když $\det A \neq 0$

Důkaz: A-regulární

$$A \sim \cdot \sim \cdot \sim \dots \cdot \sim E$$

$\exists\, U_1, U_2, \dots, U_k$ – řádkových element. úprav

$$U_1 \cdot U_2 \cdot \dots U_k \cdot A = E$$

$$\underbrace{\det U_1}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\det U_2}_{\neq 0} \cdot \dots \underbrace{\det U_k}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\det A}_{\neq 0} = \det E = 1$$

$\Rightarrow$

Metody výpočtu determinantu.

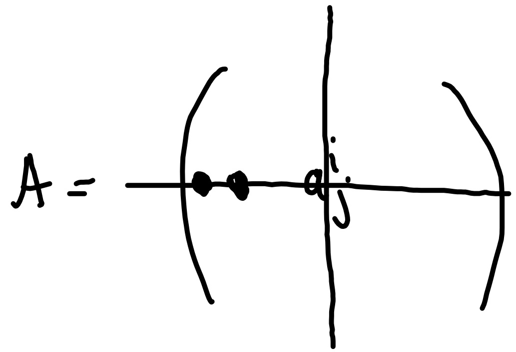
① z definice $n=1,2,3$

② Pomocí elementárních úprav n – větší

③ Laplaceův rozvoj $n = 3,4,5$

④ Kombinace ①, ②, ③

Laplaceův rozvoj.



$A = (a^i_j)$

Algebraický doplněk prvku a^i_j je determinant matice, která vznikne i-tého řádku a j-tého sloupce, vynásobený číslem $(-1)^{i+j}$. $\mathcal{A}^i_j$

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a^k_i \mathcal{A}^k_i = \sum_{k=1}^{n} a^i_k \mathcal{A}^i_k$$

INVERZNÍ MATICE

$A - n/n$ Matice B n/n je inverzní k A

$$A \cdot B = B \cdot A = E$$

Věta Inverzní matice k A existuje, právě když A je regulární.

Důkaz A – regulární

Postup $(A|E) \sim \dots \sim (E|A^{-1})$

$$\underbrace{U_1 \cdot U_2 \cdot \dots \cdot U_k}_{U} \cdot A = E$$

$$\underbrace{U}_{A^{-1}} \cdot A = E$$

$\exists A^{-1}$

$$A^{-1} \cdot A = E$$

$$\underbrace{\det A^{-1}}_{\neq 0} \cdot \det A = 1$$

$$\boxed{\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}}$$

protože je to součin $U_1, U_2, \dots, U_n$ – regul.

Vlastnosti Inverzní matice

- A^{-1} – regulární
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
- Výpočet pomocí algebraických doplňků

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \left(A^{alg}\right)^T$$

Př.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\det A = -2$ $A^{alg} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2. SYSTÉMY LINEÁRNÍCH ROVNIC

$$\begin{aligned}
a^1_1 x^1 + a^1_2 x^2 + \dots + a^1_n x^n &= b^1 \\
a^2_1 x^1 + a^2_2 x^2 + \dots + a^2_n x^n &= b^2 \\
\hline
a^m_1 x^1 + a^m_2 x^2 + \dots\ a^m_n x^n &= b^m
\end{aligned}$$

$a^i_j, b^i \in P = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ neznámé $x^1, \dots, x^n$

(a^i_j) - matice systému (b^i) - vektor pravé strany

$(a^i_j | b^i)$ - matice rozšířeného systému

vektor $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)^T$ je řešení $(A|b)$

$$Ax_0 = b$$

Obecné řešení $(A|b)$ je množina všech x_0 splňujících

V případě, že $b^1 = b^2 = \dots = b^m = 0$

mluvíme o homogenním systému.

Mějme dva systém $(A|b)$, $(A'|b')$

řekneme, že jsou ekvivalentní jestliže mají stejné obecné řešení.

$x^1 + 2x^2 + 3x^3 = 4$

$2x^1 + 4x^2 + 6x^3 = 8$

$4x^1 + 8x^2 + 12x^3 = 16$

Věta Elementární úpravy soustavy $Ax=b$ nemění její obecné řešení

Důkaz: $(A|b) \sim (A'|b')$

$$(A'|b') = U\cdot(A|b) = (UA|Ub)$$

$$U^{-1}$$

$$Ax=b \qquad UAx=Ub$$

$$\underbrace{U^{-1}U}_{E}Ax = \underbrace{U^{-1}U}_{E}b$$

$$E\,Ax = E\,b$$

$$Ax=b$$