6. Lineární zobrazení Verze 457.

6.1 Lineární zobrazení. Mějme vektorové prostory V_n, V_m na tímtéž polem P, dimenze V_n je $n \in \mathbb{N}$ a dimenze V_m je $m \in \mathbb{N}$. Zobrazení $f\colon V_n \to V_m$ se nazývá *lineární*, jestliže jsou splněny následující podmínky (*podmínky linearity*). Pro každé $x, y \in V_n$ a $\alpha \in P$ platí

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad f(\alpha x) = \alpha f(x). \tag{6.1}$$

Bezprostředně z těchto vztahů dostáváme. Pro libovolné $x_1, x_2, \dots, x_k \in V_n$ a $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^k \in P$ platí

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha^i x_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i f(x_i) \quad \text{v sumační symbolice} \quad f(\alpha^i x_i) = \alpha^i f(x_i)$$
$$f(0) = 0,$$
$$f(-x) = -f(x).$$

Množinu lineárních zobrazení z V_n do V_m označíme $L(V_n, V_m)$. Více o této množině a její struktuře se dozvíme později.

Stejně jako v případě homomorfismu grup definujeme *jádro* a *obraz* lineárního zobrazení

$$\ker f = \{x \in V_n \mid f(x) = 0\}, \qquad \text{(jádro lineárního zobrazení)} \tag{6.2}$$
$$\operatorname{Im} f = \{f(x) \mid x \in V_n\}. \qquad \text{(obraz lineárního zobrazení)} \tag{6.3}$$

Věta 6.1. *1. Jádro lineárního zobrazení je podprostor ve V_n.*
2. Obraz lineárního zobrazení je podprostor ve V_m.
D ů k a z. 1. S ohledem na Lemma 5.5 stačí ověřit, že $\ker f$ je uzavřený vzhledem ke sčítání a skalárnímu násobení. Mějme $x, y \in \ker f$, to znamená, že $f(x) = f(y) = 0$. Z linearity f dostáváme, že $f(x+y) = f(x) + f(y) = 0 + 0 = 0$. To znamená, že $x + y \in \ker f$. Nyní nechť, $x \in \ker f$ a $\alpha \in P$. Stejným způsoben dostáváme $f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha \cdot 0 = 0$.

2. Obdobně ověříme, že i $\operatorname{Im} f$ je uzavřený vzhledem ke sčítání a skalární násobení. Zvolme $f(x)$, $f(y) \in \operatorname{Im} f$, opět díky linearitě dostáváme $f(x) + f(y) = f(x+y)$. To znamená, že na vektor $f(x) + f(y)$ se zobrazí vektor $x+y$. A tedy $f(x)+f(y) \in \operatorname{Im} f$. Nyní nechť $f(x) \in \operatorname{Im} f$ a $\alpha \in P$. Protože $\alpha f(x) = f(\alpha x)$, dostáváme, že na vektor $\alpha f(x)$ se zobrazí αx. A tedy $\alpha f(x) \in \operatorname{Im} f$.

Dimenze jádra lineárního zobrazení f je nazývá *defekt zobrazení f*. Dimenze obrazu lineárního zobrazení f se nazývá *hodnost zobrazení f*.

Věta 6.2. *Nechť $f\colon V_n \to V_m$ je lineární zobrazení mezi konečně rozměrnými prostory, potom platí*

$$\dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f = \dim V_n. \tag{6.4}$$

D ů k a z. **Dodělat!!**

Věta 6.3. *Lineární zobrazení $f\colon V_n \to V_m$ mezi konečně rozměrnými vektorovými prostory je jednoznačně určeno svými hodnotami na libovolné bázi.*

D ů k a z. Označme (e_i) bázi ve V_n, předpokládejme, že známe hodnoty zobrazení f na vektorech e_i. Jsou tedy známy vektory $f(e_i)$. Nyní je-li $x \in V_n$ libovolný vektor, můžeme určit jeho složky v bázi (e_i). Vektor x, lze psát ve tvaru $x = x^i e_i$. Hodnota zobrazení f na vektoru x potom je

$$f(x) = f(x^i e_i) = x^i f(e_i). \tag{6.5}$$

Jak je vidno z předchozí věty, kdybychom měli fixovanou bázi ve V_n a znali hodnotu f na jejich prvcích, znamenalo by zjištění hodnoty f na nějakém vektoru x pouze spočítání lineární kombinace v (6.5). Situace se ještě zjednoduší, pokud zvolíme bázi i ve V_m a spokojíme se s tím, že namísto hodnoty zobrazení f na vektoru x dostaneme složky $f(x)$ v bázi V_m. Toto vede k pojmu matice lineárního zobrazení a věnujeme mu následující řádky.

$f\colon V_n \to V_m$ je zobrazení mezi konečně rozměrnými vektorovými prostory dimenze V_n je n a dimenze V_m je m, zvolme pevně (e_i) bázi V_n a $(\bar{e}_i)$ bázi V_m. Máme-li $x \in V$ lze jej rozvinout v bázi (e_i), tedy $x = x^i e_i$, kde x^i jsou složky vektoru x ve zmíněné bázi. Pro obraz $f(x)$ potom platí

$$f(x) = f(x^i e_i) = x^i f(e_i).$$

Označme a_i^j složky vektoru $f(e_i)$ v bázi $(\bar{e}_j)$, to znamená, že $f(e_i) = a_i^j \bar{e}_j$.

$$f(x) = x^i f(e_i) = x^i a_i^j \bar{e}_j. \tag{6.6}$$

Z předchozí rovnice plyne, že pro složky vektoru $f(x)$ v bázi $(\bar{e}_i)$ platí

$$f(x)^j = x^i a_i^j. \tag{6.7}$$

Označíme-li matici $A = (a_j^i)$, lze tento vztah maticově zapsat následovně:

$$(f(x)^j) = A \cdot (x^i). \tag{6.8}$$

Tento výsledek lze shrnout do následujícího tvrzení

Věta 6.4. *Nechť $f\colon V_n \to V_m$* ***Dodělat!!***

Potom existuje jediná matice $A = (a_j^i)$ typu m/n taková, že pro složky vektorů x^i a $f(x)^j$ v bázích (e_i) a $(\bar{e}_j)$ platí vztah (6.7).

Na druhou stranu, jsou-li zvolené báze (e_i) a $(\bar{e}_j)$, pak libovolná matice $A = (a_j^i)$ typu m/n jednoznačně definuje lineární zobrazení $f\colon V_n \to V_m$.

D ů k a z. Existence matice A byla dokázána v odstavech před větou. Jednoznačnost této matice plyne z toho, že ji tvoří složky bázových vektorů a podle věty 5.8 jsou složky určeny jednoznačně.

Druhá část. **Dodělat!!**

Matice A se nazývá *matice lineárního zobrazení* vzhledem k bázím (e_i) a $(\bar{e}_j)$.

Transformace matice lineárního zobrazení!!

Podobné matice!!

6.2 Izomorfismy.

Relace $\approx$!!

$\approx$ je ekvivalence!!

V_n je izomorfní s P^n nad P.!!

Věta 6.5 (první věta o kanonickém izomorfismu). *Dva konečně rozměrné vektorové prostory stejné dimenze jsou izomorfní.*