SLEZSKÁ UNIVERZITA V OPAVĚ
Matematický ústav v Opavě
Na Rybníčku 1, 746 01 Opava, tel. (553) 684 611
DENNÍ STUDIUM

ALGEBRA

Téma 6: Lineární zobrazení

Základní pojmy

Lineární zobrazení a lineární operátory (transformace), jádro ker f a obraz Im f, hodnost a defekt $r(f)$ a $d(f)$ lineárního zobrazení f, izomorfismus; matice lineárního zobrazení, záměna souřadnic; podobné matice, vektorový prostor lineárních zobrazení.

Základní tvrzení

věty o izomorfismu, věta o dimenzi jádra a obrazu lineárního zobrazení

Základní úlohy

Určení matice lineárního zobrazení, transformace matice lineárního zobrazení, výpočet jádra a obrazu, hodnosti a defektu lineárního zobrazení.

Základní vzorce

$d(f) + r(f) = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim U$ pro lineární zobrazení $f : U \longrightarrow V$;

$U \simeq V \Longleftrightarrow \dim U = \dim V$, je-li $\dim U < \infty$

$U \simeq P^{\dim U}$, je-li $\dim U < \infty$

Kontrolní otázky

1. Definujte lineární zobrazení mezi vektorovými prostory U, V nad polem P.
2. Udejte příklad izomorfismu $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ vektorových prostorů nad $\mathbb{R}$.
3. Jsou následující zobrazení vektorových prostorů nad $\mathbb{R}$ lineární?

(a)	$\mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R},\ f \longmapsto f(1)$,	(g)	$\mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad x \to 0$
(b)	$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto \bar{z}$,	(h)	$\mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad x \to x$
(c)	$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}, z \longmapsto \lvert z\rvert$,	(i)	$\mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad x \to x^2$
(d)	$\mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x],\ f(x) \longmapsto f(x+1)$,	(j)	$\mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad x \to ax$
(e)	$C^k\mathbb{R} \longrightarrow C^{k-1}\mathbb{R},\ f \longmapsto f' = df/dx$,	(k)	$\mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad x \to ax+b$
(f)	$C^k\mathbb{R} \longrightarrow C^{k+1}\mathbb{R},\ f \longmapsto \int_{x_0}^{x_1} f(t)dt$,	(l)	$\mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad x \to \sin x$

4. Je zobrazení $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \to \bar{z}$, vektorových prostorů nad $\mathbb{C}$ lineární? Porovnejte s výsledkem nad $\mathbb{R}$.
5. Je obrazem báze vektorového prostoru U při lineárním zobrazení $f : U \to V$ báze vektorového prostoru V?
6. Přenáší lineární zobrazení lineárně nezávislé vektory v lineárně nezávislé vektory?
7. Určete ker f injektivního lineárního zobrazení f a Im f surjektivního lineárního zobrazení.
8. Vyslovte nutnou a postačující podmínku pro dimenzi konečněrozměrného vektorového prostoru U tak, aby existovalo
   (a) surjektivní zobrazení $U \to \mathbb{R}^3$

   (b) injektivní zobrazení $U \to \mathbb{R}^3$
   (c) surjektivní zobrazení $\mathbb{R}^3 \to U$
   (d) injektivní zobrazení $\mathbb{R}^3 \to U$
   (e) izomorfismus $\mathbb{R}^3 \cong U$

9. Stanovte jádro a obraz lineárního zobrazení s jednotkovou resp. nulovou maticí.
10. Udejte příklad neidentického lineárního zobrazení s jednotkovou maticí.
11. Je kompozice lineárních zobrazení opět lineární zobrazení?
12. Čemu je rovna dimenze prostoru všech lineárních zobrazení $U \to V$, je-li $\dim U = m$, $\dim V = n$. Tvoří v něm množina všech injektivních resp. surjektivních zobrazení podprostor?

Příklady

1. Stanovte nutnou a postačující podmínku pro to, aby lineární zobrazení $f : U \to V$ zobrazovalo bázi U na lineárně nezávislou množinu ve V.
2. Buď U vektorový prostor dimenze 1 nad polem P, buď $\varphi : U \to U$ lineární operátor. Ukažte, že existuje právě jedno $p \in P$ tak, že $\varphi(u) = pu \; \forall u \in U$.
3. Nalezněte matici A, ker f a Im f lineárního zobrazení f:
   (a) $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x^1, x^2, x^3, x^4) \longmapsto (x^1 + x^2, x^3 + x^4)$
   (b) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x^1, x^2, x^3) \longmapsto (x^1 + x^2, x^1 + x^3, x^2 + x^3)$
   (c) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x^1, x^2, x^3) \longmapsto (x^1 - x^2, x^1 - x^3, x^2 - x^3)$
   (d) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, $(x^1, x^2, x^3, x^4) \longmapsto (x^1 + x^2 + x^3, x^1 - x^2 + x^3, x^1 + x^2 - x^3, x^1 - x^2 - x^3)$

   Návod: Jádro určete jako řešení systému homogenních rovnic $Ax = 0$, obraz určete jako podprostor generovaný sloupci matice A.
4. Ukažte, že návod k předchozímu příkladu je správný.
5. Jak se změní matice lineárního zobrazení $f : U \to V$, jestliže v bázi prostoru U resp. V zaměníme pořadí dvou vektorů?
6. Zaveďte v množině $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}; 0 < x\}$ strukturu vektorového prostoru nad $\mathbb{R}$ tak, aby zobrazení exp: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto e^x$ bylo lineární.
7. Buďte $f_1 : U_1 \to V_1$, $f_2 : U_2 \to V_2$ lineární zobrazení vektorových prostorů nad polem P. Definujte lineární zobrazení $f = f_1 \oplus f_2 : U_1 \oplus U_2 \to V_1 \oplus V_2$. Jakou matici má zobrazení f v přirozených bázích prostorů $U_1 \oplus U_2$, $V_1 \oplus V_2$?
8. Označte $M_{m,n}(\mathbb{R})$ vektorový prostor všech matic typu m/n nad polem $\mathbb{R}$. Ukažte, že následující zobrazení jsou lineární:
   (a) $M_{m,n}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{m,p}(\mathbb{R})$, $X \longmapsto XC$, kde $C \in M_{np}(\mathbb{R})$
   (b) $M_{m,m}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{m,m}(\mathbb{R})$, $X \longmapsto AX - XA$, kde $A \in M_{m,m}(\mathbb{R})$
   (c) $M_{m,m}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \longmapsto \operatorname{Tr} X = x^1_1 + \cdots + x^m_m$.

   Nalezněte matice těchto zobrazení ve vhodných bázích.
9. Určete jádro a obraz lineárního zobrazení
   (a) $M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$: $f(X) = XC$, kde $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
   (b) $M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$: $f(X) = XC$, kde $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
   (c) $M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$: $f(X) = XC$, kde $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
   (d) $M_2(\mathbb{R}) \to (\mathbb{R})$: $f(X) = \operatorname{Tr} X$.

10. Ukažte, že ke každému bijektivnímu lineárnímu zobrazení $f : U \to V$ lze nalézt báze ve vektorových prostorech U, V tak, že matice zobrazení f je
    (a) jednotková
    (b) libovolná předem zadaná regulární matice A.
11. Ukažte, že ke každému lineárnímu zobrazení $f : U \to V$ konečněrozměrných vektorových prostorů lze nalézt báze prostorů U a V tak, že matice zobrazení f má v těchto bázích tvar

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

    Návod: Bázi v ker f rozšiřte na bázi v U, poté přeneste tuto bázi zobrazením f do Im $f \subseteq V$.
12. Vektory e'_1, e'_2, e'_3 mají v bázi e_1, e_2, e_3 souřadnice $e'_1 = (1, 1, 0)$, $e'_2 = (1, -1, 0)$, $e'_3 = (0, 0, -1)$. Určete
    (a) matici přechodu od báze e_1, e_2, e_3 k bázi e'_1, e'_2, e'_3,
    (b) nové souřadnice vektoru, který měl v bázi e_1, e_2, e_3 souřadnice $(2, 1, 3)$,
    (c) matici přechodu od báze e'_1, e'_2, e'_3 k bázi e_1, e_2, e_3,
    (d) souřadnice vektoru, který bude mít v bázi e'_1, e'_2, e'_3 souřadnice $(3, 1, 1)$,
    (e) transformujte matici operátoru f, který měl v bázi e_1, e_2, e_3 matici

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

13. Nechť V_n, V_m jsou vektorové prostory nad polem P, dim $V_n = n$, dim $V_m = m$. Označme $L(V_n, V_m)$ množinu všech homomorfismů z V_n do V_m.
    (a) Ukažte, že $L(V_n, V_m)$ je vektorový prostor.
    (b) Ukažte, že $L(V_n, V_m)$ je izomorfní s vektorovým prostorem $P^{m \cdot n} = P^m \times P^n$.
    (c) Určete dimenzi prostoru $L(V_n, V_m)$, nalezněte jeho bázi.
14. Lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ má v bázi $a_1 = (8, -6, 7)$, $a_2 = (-16, 7, -13)$, $a_3 = (9, -3, 7)$ matici

$$\begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}.$$

    Nalezněte jeho matici v bázi $b_1 = (1, -2, 1)$, $b_2 = (3, -1, 2)$, $b_3 = (2, 1, 2)$.
15. Uvažujme zobrazení

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \quad \varphi(x, y, z) = (x + y, z, y_z, x),$$
$$\psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad \psi(x, y, z, u) = (x, y + z, u).$$

    Zvolme báze $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 1, 0)$, $u_3 = (1, 0, 0)$ a $u'_1 = (1, 0, 1)$, $u'_2 = (1, 1, 0)$, $u'_3 = (0, 1, 1)$ prostoru $\mathbb{R}^3$. Dokažte, že zobrazení φ, ψ jsou lineární a nalezněte matici zobrazení $\psi \circ \varphi$ v bázích (u_1, u_2, u_3), (u'_1, u'_2, u'_3).
16. Dokažte, že lineární zobrazení lze zadat tak, že definujeme jeho působení pouze na vektorech pevně zvolené báze.

1. Zápočtové příklady

1. Určete matici lineárního zobrazení $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$, $z \mapsto \bar{z}$, v přirozených bázích. Poté změňte báze tak, aby mělo toto zobrazení jednotkovou matici.
2. Nalezněte $\ker f$ a $\operatorname{Im} f$ lineárního zobrazení
   (a) $C^k\mathbb{R} \to C^{k-1}\mathbb{R}$, $f \mapsto df/dx$;
   (b) $\mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(0)$.
3. Definujte zobrazení $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^6$ vztahem $f(x^1, x^2, x^3, x^4) = (x^1 + x^2, x^1 + x^3, x^1 + x^4, x^2 + x^3, x^2 + x^4, x^3 + x^4)$. Napište matici zobrazení f v přirozených bázích prostorů $\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^6$ a určete $\ker f$ a $\operatorname{Im} f$ tohoto zobrazení.
4. Zaveďte v množině $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}$ novou strukturu vektorového prostoru nad $\mathbb{C}$ tak, aby zobrazení $\mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$, $z \mapsto \bar{z}$ bylo lineární.
5. Uvažujme o zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x^1, x^2, x^3) \mapsto (x^1 - x^2, x^1 - x^3, x^2 - x^3)$. Určete dvě nové báze v prostoru $\mathbb{R}^3$ tak, aby v nich mělo zobrazení f matici
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
6. Charakterizujte všechna lineární zobrazení
   (a) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   (b) $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
7. Rozhodněte, zda vektorový prostor $M_2(\mathbb{R})$ matic 2×2 nad $\mathbb{R}$ je izomorfní s vektorovým prostorem $\mathbb{R}_3[x]$ polynomů nad $\mathbb{R}$ stupně ≤ 3.
8. V bázi f_1, f_2, f_3 vektorového prostoru V jsou dány vektory
$$e_1 = (1, 3, 0), \quad e_2 = (0, 1, 1), \quad e_3 = (0, -3, -1)$$
$$e_1' = (1, 0, 3), \quad e_2' = (0, 1, 1), \quad e_3' = (1, -1, 0)$$
   Prověřte, že (e_1, e_2, e_3), (e_1', e_2', e_3') jsou báze V. Určete souřadnice vektoru x v bázi (e_1', e_2', e_3'), víte-li, že $x = (3, 17, 9)$ v bázi (e_1, e_2, e_3). Určete souřednice vektoru y v bázi (e_1, e_2, e_3), víte-li, že $y = (1, 1, -1)$ v bázi (e_1', e_2', e_3').
9. Ukažte, že vynásobení čtvercových matic řádu 2 zleva danou maticí $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ je lineární zobrazení prostoru všech matic řádu 2 do sebe, a nalezněte matici tohoto zobrazení v bázi sestávající z matic
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
10. Nechť P_n je vektorový prostor všech polynomů proměnné t s reálnými koefecienty stupně $\leq n$. Dokažte, že zobrazení $\varphi : f(t) \to f'(t)$ (derivace polynomu podle proměnné t) je lineární zobrazení P_n do sebe. Najděte matici tohoto zobrazení v bázi
   a) $1, t, t^2, \dots, t^n$
   b) $1, t, \frac{t^2}{2!}, \dots, \frac{t^n}{n!}$.

   Dokažte, že $\varphi^{n+1} = 0$. Určete defekt a hodnost zobrazení φ.