SLEZSKÁ UNIVERZITA V OPAVĚ
Matematický ústav v Opavě
Na Rybníčku 1, 746 01 Opava, tel. (553) 684 611
DENNÍ STUDIUM

# ALGEBRA

## Téma 5: Vektorové prostory

*Základní pojmy*

Vektorový prostor nad polem $P$, reálný (komplexní) vektorový prostor, přirozená báze vektorového prostoru $P^n$, lineární závislost a nezávislost vektorů, báze, dimenze; vektorové prostory konečné dimenze; souřadnice vektoru, matice přechodu mezi bázemi.

Podprostor, generátory podprostoru, lineární obal, podprostor určený soustavou homogenních lineárních rovnic; průnik $U \cap V$, součet $U + V$ podprostorů $U$ a $V$, přímá suma $U \oplus V$ vektorových prostorů.

*Základní tvrzení*

Steinitzova věta a její důsledky, věta o dimenzi součtu a průniku podprostorů.

*Základní úlohy*

Rozhodnutí o lineární závislosti a nezávislosti, transformace souřadnic vektoru, určení podprostoru generátory / soustavou lineárních rovnic, nalezení báze podprostoru, určení průniku a součtu podprostorů.

*Základní vzorce*

$L(u_1, \dots, u_n) \equiv [\![u_1, \dots, u_n]\!] = \{a^1 u_1 + \cdots + a^n u_n; a^i \in P\}$

$U + V = \{u + v; u \in U, v \in V\}$ pro vektorové podprostory $U, V \subseteq W$

$\dim(U \cap V) + \dim(U + V) = \dim U + \dim V$

$\dim(W_1 \oplus W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$ pro vektorové prostory $W_1, W_2$.

*Označení*

$\mathbb{R}[x]$ vektorový prostor polynomů proměnné $x$ s reálnými koeficienty

$\mathbb{C}[x]$ vektorový prostor polynomů proměnné $x$ s komplexními koeficienty.

$\mathbb{R}^\infty$ vektorový prostor všech posloupností reálných čísel

$\mathbb{C}^\infty$ vektorový prostor všech posloupností komplexních číšl

### 1. Cvičení

*Kontrolní otázky*

1. Definujte vektorový prostor nad polem $P$.
2. Ukažte, že každé pole $P$ je vektorovým prostorem nad $P$.
3. Může být prázdná množina vektorovým prostorem?

4. Definujte strukturu vektorového prostoru na jednoprvkové množině. Určete jeho dimenzi.
5. Popište vektorové prostory $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^k$ nad $\mathbb{R}$; $\mathbb{C}, \mathbb{C}^2, \mathbb{C}^k$ nad $\mathbb{R}$ resp. nad $\mathbb{C}$;
6. Popište vektorové prostory $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{R}^\infty$ nad $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{C}^\infty$ nad $\mathbb{C}$.
7. Je-li $V$ vektorový prostor nad polem $P$, definujte vektorovou strukturu na množině $V^n = \underbrace{V \times V \ldots \times V}_{n-\text{krát}}$.
8. Definujte lineární kombinaci vektorů, lineární závislost a nezávislost, množinu generátorů vektorového prostoru.
9. Definujte bázi a dimenzi vektorového prostoru, rozeberte také nekonečněrozměrný případ.
10. Ukažte, že vektory $1, i \in \mathbb{C}$ jsou lineárně nezávislé nad $\mathbb{R}$, ale lineárně závislé nad $\mathbb{C}$.
11. Jakou dimenzi má prostor $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$ a nad $\mathbb{C}$?
12. Jakou dimenzi mají prostory $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^k$ nad $\mathbb{R}$; $\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^k$ nad $\mathbb{R}$ resp. nad $\mathbb{C}$? Uveďte nejméně 2 různé báze u každého z těchto prostorů.
13. Určete dimenzi vektorového prostoru $\mathbb{R}_n[x]$ polynomů jedné neurčité stupně $\le n$ nad $\mathbb{R}$ a alespoň jednu jeho bázi.
14. Jakou dimenzi má prostor $\mathbb{R}[x]$ polynomů jedné neurčité nad $\mathbb{R}$? Nalezněte $k$ lineárně nezávislých vektorů pro každé $k \in \mathbb{N}$.
15. Je množina všech polynomů stupně $n$ s reálnými koeficienty vektorový podprostor $\mathbb{R}[x]$?
16. Jaký nejmenší počet vektorů generuje vektorový prostor konečné dimenze $n$?
17. Jaký největší počet lineárně nezávislých vektorů existuje ve vektorovém prostoru konečné dimenze $n$?
18. Definujte podprostor vektorového prostoru $W$, definujte průnik $U \cap V$ a součet $U + V$ podprostorů $U, V \subseteq W$.
19. Definujte lineární obal podmnožiny a podprostor generovaný systémem vektorů.
20. Patří vektor $(1, 1, 0, 1)$ do podprostoru v $\mathbb{R}^4$ generovaného vektory $(1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0)$? Své tvrzení dokažte.
21. Jaké generátory má podprostor $U + V$, má-li podprostor $U$ resp. $V$ generátory $u_1, \ldots, u_k$ resp. $v_1, \ldots, v_l$? Co můžeme říci o jeho dimenzi?
22. Udejte příklad podprostoru v $\mathbb{R}[x]$ dimenze 1, 2 resp. 3.
23. Udejte příklad vlastního podprostoru v $\mathbb{R}[x]$ nekonečné dimenze.
24. Pro která $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ určuje rovnice

$$2x^1 + 3x^2 + \alpha x^3 = \beta$$

podprostor v $\mathbb{R}^3$?
25. Jaký nejmenší počet lineárních rovnic vymezuje v $\mathbb{R}^n$ podprostor dimenze $k \le n$?
26. Jakou soustavou rovnic je určen podprostor $U \cap V$ v $\mathbb{R}^n$, je-li podprostor $U$ resp. $V$ určen soustavou rovnic $a^i_j x^j = 0$ resp. $b^i_j x^j = 0$.
27. Uveďte soustavu homogenních rovnic vymezující podprostor v $\mathbb{R}^4$ generovaný vektorem $(1, 1, 0, 0)$.
28. Ukažte, že rovnice $x^1 + x^2 + \cdots + x^k = 0$ vymezuje podprostor v $\mathbb{R}^k$. Jakou má dimenzi? Uveďte nějakou jeho bázi.
29. Buď $A$ nějaká matice nad $\mathbb{R}$ typu $m/n$. Porovnejte její hodnost s dimenzí podprostoru v $\mathbb{R}^m$ generovaného řádky matice $A$. Zdůvodněte.

*Příklady*

1. Ukažte, že v každém vektorovém prostoru $V$ platí $(-1)v = -v,\ 0v = 0$ pro každé $v \in V$.
Návod: Upravte $v + (-1)v$.

2. Ukažte, že v každém vektorovém prostoru $V$ nad $T$ pro každé $v \in V, t \in T$ platí $tv = 0 \Rightarrow (t = 0$ nebo $v = 0)$.
3. Ukažte, že vektor $u$ je lineárně závislý $\Leftrightarrow u = 0$.
4. Buďte $u_1, u_2$ lineárně nezávislé vektory. Ukažte, že vektory $u_1 + u_2, u_1 - u_2$ jsou také lineárně nezávislé.
5. a) Je pravda, že jsou-li $x, y, z$ lineárně nezávislé vektory, pak také vektory $x + y, y + z, z + x$ jsou lineárně nezávislé?

   b) Jaké podmínky musí splňovat reálné číslo $\xi$, aby vektory $(\xi, 1, 0), (1, \xi, 1), (0, 1, \xi)$ z $\mathbb{R}^3$ byly lineárně závislé? Jak tomu bude, zaměníme-li $\mathbb{R}^3$ za $\mathbb{Q}^3$?

   c) Určete $\xi$ tak, aby vektory $(1, 1, 1), (1, \xi, \xi^2)$ v $\mathbb{R}^3$ byly lineárně nezávislé.

   d) V bázi $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ 4-rozměrného vektorového prostoru $V$ jsou dány vektory $\xi = (1, 0, 0, 0)$, $\eta = (1, 1, 0, 0)$, $\lambda = (1, 1, 1, 0)$, $\kappa = (1, 1, 1, 1)$. Vyšetřete, zda $\xi, \eta, \lambda, \kappa$ je báze $V$. Nalezněte dvě báze prostoru $V$, které nemají žádný vektor společný, a přitom první obsahuje vektory $\xi$, $\eta$ a druhá vektory $\lambda, \kappa$.
6. Buďte $u_1, u_2, \ldots, u_k$ lineárně nezávislé vektory, buď $v$ vektor takový, že vektory $u_1, u_2, \ldots, u_k, v$ jsou lineárně závislé. Ukažte, že $v$ je lineární kombinací vektorů $u_1, \ldots, u_k$.
7. Popište vektorový prostor $\mathbb{R}$ nad $Q$.
8. a) Rozhodněte, zda množina všech matic typu $m/n$ s operacemi sčítání matic a násobení matice číslem, je vektorový prostor. V kladném případě určete jeho dimenzi a nalezněte bázi.

   b) Rozhodněte, zda množina všech čtvercových matic řádu $n$ s operací násobení matic a násobení matice číslem, je vektorový prostor.
9. Nechť $V$ je množina všech uspořádaných dvojic reálných čísel. Pro libovolné prvky $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ z $V$ a libovolný skalár $\alpha \in \mathbb{R}$ klademe:

   $$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),$$
   $$\alpha x = (\alpha x_1, 0),$$
   $$-x = (-x_1, -x_2)$$

   Je $V$ při takto definovaných operacích vektorový prostor?
10. Uvažujme množinu všech posloupností komplexních čísel $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, $x_i \in \mathbb{C}$, vyhovující podmínce $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$. Definujeme operace sčítání posloupností a násobení posloupnosti komplexním číslem takto:

    $$x + y = \{x_i + y_i\}_{i=1}^{\infty}, \qquad \alpha \cdot x = \{\alpha \cdot x_i\}_{i=1}^{\infty}.$$

    Uvedenou množinu s operacemi $+$ a $\cdot$ označme $l^2$. Ukažte, že $l^2$ je vektorový prostor a určete jeho dimenzi. (Návod: Využijte Minkowského nerovnost $|\xi + \eta|^2 \le 2(|\xi|^2 + |\eta|^2)$, kterou dokažte.
11. Ověřte přímým výpočtem, že vektory $(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)$ tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^3$.
12. Ověřte přímým výpočtem, že vektory $1 + i, 1 - i$ tvoří bázi vektorového prostoru $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$. Jaké souřadnice má komplexní číslo $a + bi$ v této bázi? Jaké souřadnice mají vektory $1 + i, 1 - i$ v této bázi?
13. Uvažujme množinu $\mathbb{R}^4$ všech čtveřic reálných čísel s obvyklými operacemi sčítání čtveřic a násobení čtveřice reálným číslem. Dokažte, že $\mathbb{R}^4$ je vektorový prostor, a že množiny

    a) $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)$

    b) $(0, 2, 3, 1), (-1, 3, 3, 1), (1, 1, 1, 1), (2, 1, -3, 5)$
    tvoří jeho báze. Určete složky vektoru $(0, 2, 3, 1)$ v bázi (a), složky vektorů z (b) v bázi (b) a složky vektoru $(-2, 0, 3, 1)$ v bázi (a) a v bázi (b).
14. Určete všechny hodnoty parametru $\alpha$ pro něž jsou vektory $(1, 1, 1), (1, \alpha, 1), (2, 2, \alpha)$ lineárně závislé. (Návod. Využijte vlastnosti determinantů.)
15. Charakterizujte všechny podprostory

    a) reálného vektorového prostoru $\mathbb{R}$,

b) komplexního vektorového prostoru $\mathbb{C}$,

c) reálného vektorového prostoru $\mathbb{C}$.

16. Rozhodněte, zda množina

$$L = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}$$

je podprostor v $\mathbb{R}^n$.
(Návod: Určete dimenzi součtu daných podprostorů.)

17. Rozhodněte, zda následující množiny tvoří vektorové podprostory v $\mathbb{R}[x]$

$$W = \{f \in \mathbb{R}[x];\ f(1) = 0\},$$
$$W = \{f \in \mathbb{R}[x];\ f(0) = 1\},$$
$$W = \{ax^3 + bx + c;\ a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

Výsledky: ano, ne, ano.

18. Nalezněte bázi vektorového podprostoru v $\mathbb{R}^4$ generovaného vektory
   (a) $(1, 5, 6, 7), (2, 3, 5, 7), (1, 3, 4, 5), (3, 2, 5, 8)$
   (b) $(0, 2, 2, 1), (3, 5, 8, 4), (2, 4, 6, 3), (1, 3, 4, 2)$

   Návod: Sestavte matici z uvedených řádkových vektorů, převeďte ji na schodovitý tvar, a vynechte nulové řádky.

19. Ukažte, že návod k předchozímu příkladu je správný.
   Návod: Ukažte, že elementární řádkové úpravy nemění lineární obal množiny řádkových vektorů.

20. Určete průnik podprostorů $U, V \in \mathbb{R}^6$ generovaných vektory

$$\begin{aligned} U &: u_1 = (1, 3, 7, -1, 0, 1), \quad & u_2 &= (2, 5, 2, 0, 1, -1) \\ V &: v_1 = (2, -1, -2, 0, 3, 1), \quad & v_2 &= (5, 7, 7, -1, 4, 1) \end{aligned}$$

   Návod: Hledejte všechna $\alpha_i, \beta_i$, pro něž $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2$.

21. Buď dána soustava lineárních homogenních rovnic $\sum_{j=1}^{k} a_{i,j} x_j = 0, a_{i,j} \in \mathbb{R}$. Ukažte, že množina všech řešení $(x_1, \dots, x_k)$ tvoří vektorový podprostor v $\mathbb{R}^k$.

22. Nalezněte bázi vektorového podprostoru v $\mathbb{R}^3$ vymezeného soustavou rovnic

$$3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0$$
$$2x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

23. Nalezněte soustavu homogenních rovnic vymezující podprostor v $\mathbb{R}^5$ s generátory

$$(1, 3, 4, 2, 1),\ (3, 5, 8, 4, 3),\ (5, -1, 4, 2, 5).$$

24. Dokažte, že vektory $(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 1)$ a vektory $(2, -1, 3, 3), (0, 1, -1, -1)$ generují týž podprostor v $\mathbb{R}^4$.
   Návod: Hledejtete dimenzi součtu těchto podprostorů.

25. Dokažte, že $\mathbb{R}^4$ je přímým součtem podprostorů $U, V$ generovaných vektory $(1, 2, 1, 2)$, $(2, 0, 2, 0)$ a $(1, 1, 3, 3)$, $(5, 5, -1, -1)$.
   Návod: Spočtěte $\dim(U + V)$, $\dim(U \cap V)$.

26. Ve vektorovém prostoru $V$ dimenze 6 jsou dány podprostory $L_1, L_2$. Určete bázi a dimenzi těchto podprostorů a zjistěte, zda jeden z nich není podprostorem druhého:

$$L_1 = [\![(2, 1, 1, 0, 0, 1),\ (2, 2, 1, 1, 0, 0),\ (2, -1, 1, -2, 0, 3)]\!]$$
$$L_2 = [\![(0, 1, 0, 1, 0, -1),\ (4, 2, 2, 0, 0, 2),\ (1, 1, 0, 2, 1, 0)]\!]$$

   ($[\![\,]\!]$ označuje lineární obal, vektory jsou zapsány pomocí složek v pevně zvolené bázi).

27. Nechť $L_1, L_2$ jsou podprostory v čtyřrozměrném vektorovém prostoru $V$. Určete bázi a dimenzi $L_1 + L_2$, $L_1 \cap L_2$, je-li

$$L_1 = [\![(1, 1, 0, 0),\ (0, 1, 1, 0),\ (0, 0, 1, 1)]\!]$$
$$L_2 = [\![(1, 0, 1, 0),\ (0, 2, 1, 1),\ (1, 2, 1, 2)]\!]$$

28. Vektory $e'_1, e'_2, e'_3$ mají v bázi $e_1, e_2, e_3$ tyto souřadnice:

$$e'_1 = (1, 1, 0), \quad e'_2 = (1, -1, 0), \quad e'_3 = (0, 0, -1).$$

Určete matici přechodu od báze $(e_1, e_2, e_3)$ k bázi $(e'_1, e'_2, e'_3)$ a matici přechodu od báze $(e'_1, e'_2, e'_3)$ k bázi $(e_1, e_2, e_3)$. Jsou-li $(2, 1, 3)$ souřadnice vektoru $x$ v bázi $(e_1, e_2, e_3)$, určete souřadnice tohoto vektoru v bázi $(e'_1, e'_2, e'_3)$.

## 2. Zápočtové příklady

1. Ukažte, že systém vektorů $u, v, w$ je lineárně nezávislý právě tehdy, když je systém $u + v, v + w, u + w$ lineárně nezávislý.
2. Určete všechny hodnoty parametru $\alpha$, pro něž jsou vektory $(1, \alpha, 1)$, $(3, 4, 7)$, $(\alpha, 3, 5)$ lineárně závislé.
3. Nalezněte bázi vektorového podprostoru v $\mathbb{R}^6$ generovaného vektory $(1, 3, 4, 2, 5, 7)$, $(5, 3, 8, 4, 13, 17)$, $(3, -1, 2, 1, 5, 6)$, $(5, -3, 2, 1, 7, 8)$, $(3, 1, 4, 2, 7, 9)$, $(7, -5, 2, 1, 9, 10)$. Popište tento podprostor soustavou lineárních homogenních rovnic.
4. Nalezněte průnik vektorových podprostorů $U, V \subset \mathbb{R}^6$ generovaných vektory

$$U : (1, 5, 6, 3, 4, 7),\ (2, 2, 1, 5, 2, 1),\ (3, 3, 2, 0, 1, 5),$$
$$V : (2, 1, 1, 3, 2, 3),\ (5, 8, 8, 11, 8, 11),\ (7, 6, 4, 8, 5, 9).$$

5. Buď $V$ podprostor konečněrozměrného vektorového prostoru $U$, $\dim V = \dim U$. Dokažte, že $U = V$.
6. Buďte $U, V$ dva podprostory vektorového prostoru $W$. Nechť $\dim U + \dim V = \dim(U + V) = \dim W$. Ukažte, že pak $W = U \oplus V$.
7. Buď $W = U \oplus V$ rozklad vektorového prostoru $W$ na přímé sčítance, buď $u_1, \dots, u_n$ báze v $U$, buď $v_1, \dots, v_m$ báze ve $V$. Dokažte, že $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m$ je báze ve $W$.
8. Ukažte, že platí $U \subset V, U \neq V$ jsou-li $U, V$ podprostory v $\mathbb{R}^6$ generované vektory

$$U : (3, 5, 2, 8, 1, 1),\ (2, 1, 1, 2, 3, 0),\ (0, 7, 1, 10, -7, 2)$$
$$V : (-1, 3, 0, 4, -5, 1),\ (3, 5, 3, 1, 3, 1),\ (1, 4, 2, -1, 0, 1)$$

9. Nechť $\mathbb{C}[x]$ je systém všech polynomů proměnné $t$ s komplexními koeficienty, uvažovaný s operacemi sčítání polynomů a násobení polynomu komplexním číslem.
   a) Ukažte, že $\mathbb{C}[x]$ je komplexní vektorový prostor. Co je nulovým prvkem v $\mathbb{C}[x]$?
   b) Určete, zda následující vektory z $\mathbb{C}[x]$ jsou lineárně závislé nebo nezávislé: $1, t, t^2, \dots, t^n, \dots$.
   c) Nechť $u, x, y, z$ jsou vektory z $\mathbb{C}[x]$ definované vztahy

   $$u(t) = 1 + t + t^2, \quad x(t) = 1, \quad y(t) = t, \quad z(t) = t^2.$$

   Ukažte, že tyto vektory jsou lineárně závislé, ale libovolné tři z nich jsou lineárně nezávislé.
10. Polynom $x \in \mathbb{C}[x]$ nazveme *sudým*, když $x(-t) = x(t)$ pro každé $t$ a *lichým*, když $x(-t) = -x(t)$ pro každé $t$. Ukažte, že třída $M$ sudých i třída $N$ lichých polynomů tvoří podprostor v $\mathbb{C}[x]$, a že $\mathbb{C}[x] = M \oplus N$ (přímý součet).

11. Uvažujme vektorový prostor $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ čtvercových matic řádu 2 nad $\mathbb{R}$ s operací sčítání matic a násobení matice reálným číslem

    a) Určete dimenzi tohoto prostoru a nalezněte alespoň jednu jeho bázi. Určete složky vektoru

    $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

    v této bázi.

    b) Rozhodněte, zda vektory

    $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

    jsou lineárně závislé nebo nezávislé.

    c) Rozhodněte, zda podmnožina $M$ všech matic typu

    $$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

    tvoří vektorový podprostor $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

    d) Uveďte příklad 2-rozměrného podprostoru v $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.