5. Vektorové prostory Verze 435.

Dostáváme se k první složitější algebraické struktuře — k vektorovému prostoru. Velké množství aplikací nejen v matematice má právě strukturu vektorového prostoru, proto je nutné tuto strukturu studovat a osvojit si ji.

V této kapitole se snažíme čtenáře seznámit se základní vlastnosti vektorového prostoru báze, dimenze, lineární závislost a nezávislost, složky vektoru v bázi, problematika transformace souřadnic, podprostory součet a průnik podprostorů.

5.1 Vektorový prostor. *Vektorovým prostorem* V nad polem P rozumíme množinu V s operací *sčítání* (označujeme $+$), se kterou V tvoří Abelovu grupu, a zobrazením *skalární násobení* (označujeme $\cdot$) $P \times V \to V$. Tato operace musí splňovat následující podmínky. Pro libovolné $a, b \in P$ a $x, y \in V$ platí

$$
\begin{aligned}
&(a+b)\cdot x = a\cdot x + b\cdot x,\\
&a\cdot(x+y) = a\cdot x + a\cdot y,\\
&(a\cdot b)\cdot x = a\cdot(b\cdot x),\\
&1\cdot x = x.
\end{aligned}
$$

Ačkoliv skalární násobení není operací na V v tom smyslu, jak jsme si ji zavedli (není to zobrazení $V \times V \to V$), budeme ji zapisovat jako operaci, tedy znaménkem mezi její argumenty a ne jako zobrazení, případně budeme znaménko $\cdot$ vynechávat jako u násobení v $\mathbb{R}$.

Prvkům vektorového prostoru říkáme *vektory*.

Pod pojmem *lineární kombinace* vektorů $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$ s koeficienty $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in P$ rozumíme vektor $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$. Vektory $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$ se nazývají *lineárně závislé*, jestliže některý z nich lze vyjádřit ve tvaru lineární kombinace ostatních. Tyto vektory se nazývají *lineárně nezávislé*, jestliže nejsou lineárně nezávislé, tedy rovnice

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0 \tag{5.1}$$

má řešení jen pro $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Řekneme, že vektorový prostor V má *dimenzi* $n \in \mathbb{N}$ (označujeme $\dim V = n$), jestliže existuje n lineárně nezávislých vektorů z V přičemž libovolných $n+1$ vektorů z V je lineárně závislých. Každá n-tice lineárně nezávislých vektorů z V, kde $\dim V = n$ tvoří *bázi vektorového prostoru* V. Vektorový prostor se nazývá *nekonečně rozměrný*, jestliže pro každé $k \in \mathbb{N}$ v něm existuje k lineárně nezávislých vektorů.

Možná se zdá na první pohled nepochopitelné, proč jsme bázi nedefinovali prostě jako množinu vektorů. Skutečně, prozatím by nám taková definice postačovala, dále, zejména až se dostaneme ke složkám vektorů, bychom ale narazili na problémy.

Následující příklad vektorového prostoru patří v lineární algebře mezi nejzákladnější.

Na množině $\mathbb{R}^n$ uvažujeme sčítání n-tic po složkách a jejich skalární násobení čísly z $\mathbb{R}$. Jedná se o vektorový prostor dimenze n. Bází je systém $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ kde $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, \dots, 0, 1)$, neboť je-li $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, platí

$$x = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots + x^n e_n,$$

$$(x^1, x^2, \dots, x^n) = x^1(1, 0, \dots, 0) + x^2(0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + x^n(0, \cdots, 0, 1).$$

To znamená, že každý vektor $\mathbb{R}^n$ je lineární kombinací vektorů $e_1, e_2, \dots, e_n$. Jejich lineární nezávislost je zřejmá. Zmíněná báze se nazývá *přirozená báze* $\mathbb{R}^n$.

Uvažujme množinu polynomů s reálnými koeficienty, spolu s operacemi sčítání polynomů a násobení polynomu reálným číslem tvoří vektorový prostor (Ověřte!). Jedná se o příklad nekonečně rozměrného prostoru. Kdyby totiž existovala n-tice lineárně nezávislých polynomů $f_1(x), \dots, f_n(x)$ a každý polynom by se dal vyjádřit jako jejich lineární kombinace. Pokud bychom si vzali polynom $f(x) = x^m$, kde m je vyšší než nejvyšší řád z polynomů $f_1(x), \dots, f_n(x)$ dostaneme spor, protože takový polynom nelze vyjádřit jako lineární kombinace těchto polynomů.

Nechť M je podmnožina vektorového prostoru V. *Lineární obal množiny M* (označujeme $[\![M]\!]$) je množina vektorů z V, které lze vyjádřit jako lineární kombinace nějakých prvků z M.

Vraťme se k vektorovému prostoru $\mathbb{R}^3$, uvažujme množinu $M = \{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$. Její lineární obal tvoří všechny uspořádané trojice, které mají uprostřed 0. Stejný lineární obal bude mít i množina $\{(1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$. Protože jednak $(x_1, 0, x_3) = x_1(1, 0, 0) + x_3(0, 0, 1)$ a jednak $(x_1, 0, x_3) = x_1(1, 0, 1) + (x_3 - x_1)(0, 0, 1)$.

Pokud se zamyslíme nad definicí báze, dostáváme následující výsledek

Věta 5.1. *Lineární obal báze V je celý prostor V.*

Věta 5.2 (Steinitzova o výměně). *Každou lineárně nezávislou podmnožinu v konečně rozměrném vektorovém prostoru lze doplnit na bázi ve V.*

D ů k a z. Nechť $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ je lineárně nezávislá množina ve V, $\dim V = n$. Označme $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ nějakou bázi ve V. Evidentně je $k \leq n$. Je-li $k = n$, pak systém $(f_1, f_2, \dots, f_k)$ tvoří bázi a věta je dokázána.

Tedy předpokládejme, že $k < n$. Uvažujme systém $(f_1, e_1, e_2, \dots, e_n)$. Tento systém musí být lineárně závislý. To znamená, že existují koeficienty $\alpha^1, \beta^1, \dots, \beta^n$, z nichž nejsou všechny rovny nule takové, že $\alpha^1 f_1 + \beta^1 e_1 + \beta^2 e_2 + \dots + \beta^n e_n = 0$. Jelikož $f_1 \neq 0$ (systém $(f_1, e_1, e_2, \dots, e_n)$ by nemohl být nezávislý), musí být některý z koeficientů β^i nenulový a tedy e_i lze tím pádem vyjádřit pomocí ostatních. Z našeho systému odstraníme e_i a dostaneme opět bázi $(f_1, e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n)$.

Takto postupujeme dále. Nyní předpokládejme, že máme už bázi ve tvaru $(f_1, f_2, \dots, f_m, e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-m}})$. Do tohoto systému přidáme vektor f_{m+1}. Dostáváme lineárně závislý systém $(f_1, f_2, \dots, f_m, f_{m+1}, e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-m}})$. Tedy existují koeficienty α^l, β^k ne všechny rovny nule tak, že

$$\alpha^1 f_1 + \alpha^2 f_2 + \dots + \alpha^m f_m + \alpha^{m+1} f_{m+1} + \beta^1 e_{i_1} + \dots + \beta^{n-m} e_{i_{n-m}} = 0.$$

Ovšem protože systém $(f_1, f_2, \dots, f_m, f_{m+1})$ je lineárně nezávislý, musí být nenulový některý koeficient β^k. Tedy e_{i_k} lze vyjádřit pomocí ostatních následovně

$$\begin{aligned} e_{i_k} = &-\frac{\alpha^1}{\beta^k} f^1 - \dots - \frac{\alpha^m}{\beta^k} f^m - \frac{\alpha^{m+1}}{\beta^k} f^{m+1} - \frac{\beta^1}{\beta^k} e^{i_1} - \dots - \frac{\beta^{k-1}}{\beta^k} e^{i_{k-1}} - \\ &- \frac{\beta^{k+1}}{\beta^k} e^{i_{k+1}} - \dots - \frac{\beta^{n-m}}{\beta^k} e^{i_{n-m}}. \end{aligned}$$

Proto e_{i_k} z našeho systému vynecháme a získáme opět bázi.

Takto postupujeme až získáme požadovanou bázi ve tvaru $(f_1, f_2, \dots, f_k, e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-k}})$.

5.2 Souřadnice vektoru. Nechť V je vektorový prostor dimenze $n \in \mathbb{N}$ a $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ jeho báze. Uvažujme $x \in V$ vektor, systém $(e_1, e_2, \dots, e_n, x)$ je již lineárně závislý tedy existují čísla $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha_n, \beta \in P$ taková že alespoň jedno z nich je nenulové a platí

$$\alpha^1 e_1 + \alpha^2 x_2 + \dots + \alpha^n e_n + \beta x = 0.$$

Ovšem $\beta \neq 0$, jinak by totiž systém $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ byl lineárně závislý a nemohl by tvořit bázi. Vektor x můžeme tedy vyjádřit následovně

$$x = -\frac{\alpha^1}{\beta} e_1 - \frac{\alpha^2}{\beta} x_2 - \cdots - \frac{\alpha^n}{\beta} e_n.$$

Systém čísel $(-\alpha^1/\beta, \dots, -\alpha^n/\beta)$ nazýváme *souřadnicemi vektoru x* (nebo též *složkami vektoru*) v bázi $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, Častěji jej však označujeme $(x^1, \dots, x^n)$ a pro souřadnice vektoru dostáváme

$$x = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \cdots + x^n e_n. \tag{5.2}$$

To, že jsou souřadnice vektoru vzhledem k pevné bázi určeny jednoznačně tvrdí následující věta.

Věta 5.3. *Necht'V je vektorový prostor dimenze $n \in \mathbb{N}$ nad polem P, $(e_1, \dots, e_n)$ jeho báze. Pak ke každému vektoru $x \in V$ existují jednoznačně určené složky $(x^1, \dots, x^n)$, kde $x^i \in P$. Tedy pro něž platí (5.2).*

D ů k a z. Existence souřadnic $(x^1, \dots, x^n)$ vektoru x již byla dokázána v odstavci před touto větou.

Zbývá tedy dokázat jen jejich jednoznačnost. Předpokládejme, že kromě uvedených souřadnic ještě existuje systém $(x'^1, \dots, x'^n)$, splňující

$$x = x'^1 e_1 + x'^2 e_2 + \cdots + x'^n e_n. \tag{5.3}$$

Porovnáním pravých stran v (5.2) a (5.3) dostáváme

$$x^1 e_1 + x^2 e_2 + \cdots + x^n e_n = x'^1 e_1 + x'^2 e_2 + \cdots + x'^n e_n$$

a odtud

$$(x^1 - x'^1) e_1 + (x^2 - x'^2) e_2 + \cdots (x^n - x'^n) e_n = 0.$$

Protože je systém $(e_1, \dots, e_n)$ lineárně nezávislý plyne z předchozí rovnice, že všechny koeficienty musí být rovny nule. Tedy $x^1 - x'^1 = x^2 - x'^1 = \cdots = x^n - x'^n = 0$. Což znamená, že jsou složky vektoru x určeny jednoznačně.

Souřadnice vektorů budeme zapisovat do sloupcové matice.

$$(x^i) = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

Je jasné, že souřadnice nám jednoznačně určují vektor, jen pokud je pevně zvolena báze. To musíme mít vždy na paměti. Jestliže se rozhodneme uvažovat jinou bázi složky vektorů v nové bázi budou pochopitelně jiné.

Máme-li bázi (e_i) vektorového prostoru V dimenze 3 a vektor x má složky $(x^i) = (1, 0, 0)^\top$, je jasné, že se jedná o vektor e_1. Zde je vidět, že není možné definovat bázi pouze jako množinu v níž jsou bázové vektory „neuspořádané“. Stačí totiž v bázi změnit pořadí bázových vektorů a složky $(1, 0, 0)^\top$ určují úplně jiný vektor.

Proto vyvstává otázka, jak se změní složky vektoru, přejdeme-li od jedné báze ke druhé. Odpověď leží v následujícím tvrzení.

Věta 5.4 (transformace souřadnic). *Necht'$(e_1, \dots, e_n)$ a $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ jsou dvě báze vektorového prostoru V. Existuje regulární matice T typu n/n nad P taková, že je-li x vektor z V a (x^i) jeho složky v bázi (e_i), pak $(\bar{x}^i)$ dané vztahem*

$$\bar{x}^k = \sum_{i=1}^{n} t_i^k x^i \tag{5.4}$$

jsou složky vektoru x v bázi $(\bar{e}_i)$.

Matice T se nazývá *matice přechodu* od báze (e_i) k bázi $(\bar{e}_i)$.

D ů k a z. [1] Matici T přímo zkonstruujeme. Můžeme najít složky vektory báze (e_i) v bázi $(\bar{e}_i)$. Tedy pro vektor e_k čísla $t_k^1, \dots, t_k^n$ jsou jeho složky v bázi $(\bar{e}_i)$. Platí proto

$$e_k = t_k^i \bar{e}_i. \qquad \text{(použita sumační konvence)} \tag{5.5}$$

Ukážeme, že matice $T = (t_j^i)$ má požadované vlastnosti. Že se jedná o matici n/n nad P je ale jasné.

Pro vektor $x \in V$ platí jednak $x = x^i e_i$ a jednak $x = \bar{x}^i e_i$. Proto

$$\begin{aligned} &\bar{x}^i \bar{e}_i = x^j e_j \\ &\bar{x}^i \bar{e}_i = x^j t_j^i \bar{e}_i && \text{(viz (5.5))} \\ &(\bar{x}^i - x^j t_j^i)\bar{e}_i = 0. \end{aligned}$$

Opět z lineární nezávislosti báze $(\bar{e}_i)$ plyne nulovost koeficientů $\bar{x}^i - x^j t_j^i$ pro $i = 1, \dots, n$. Dostáváme

$$\bar{x}^i = t_j^i x^j.$$

Což je požadovaný vztah.

Nyní dokážeme, že matice T je regulární. Nejprve si uvědomme, že souřadnice bázového vektoru e_j v bázi (e_i) jsou (δ_j^i)[2] Nechť $S = (s_j^i)$ označuje matici přechodu od báze $(\bar{e}_i)$ k bázi (e_i). To znamená, že $\bar{e}_i = s_i^k e_k$. Máme

$$\begin{aligned} &\delta_j^k e_k = e_j = t_j^i \bar{e}_i = t_j^i s_i^k e_k \\ &(\delta_j^k - t_j^i s_i^k) e_k = 0 \\ &\delta_j^k = t_j^i s_i^k, \quad \text{pro každé } i, k \in \{1, \dots, n\} && \text{(jako obvykle)} \\ &E = S \cdot T. && \text{(maticový zápis)} \end{aligned}$$

Obdobně dostaneme, že $E = T \cdot S$. Matice T a S jsou k sobě inverzní, to znamená, že jsou regulární.

Jak je vidět v závěru předchozího důkazu, je-li matice T matice přechodu od báze (e_i) k bázi $(\bar{e}_i)$ a matice S matice přechodu od $(\bar{e}_i)$ k (e_i). Je

$$S = T^{-1}. \tag{5.6}$$

Právě získané znalosti si vyzkoušíme na následujícím příkladu.

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ na polem $\mathbb{R}$ máme bázi $(e_i) = ((1, 3, 0), (0, 1, 1), (0, -3, -1))$ a bázi $(\bar{e}_i) = ((1, 0, 3), (0, 1, 1), (1, -1, 0))$. Vektor x má v bázi (e_i) složky $x^i = (3, 17, 9)^\top$, určeme jeho složky $(\bar{x}^i)$ vzhledem k bázi $(\bar{e}_i)$.

Nejprve si sestavíme matici přechodu od báze (e_i) k bázi $(\bar{e}_i)$, to znamená, že nalezneme složky vektorů $\bar{e}_i$ v bázi (e_i). Tedy pro $\bar{e}_1$ řešíme soustavu

---

[1] V důkazu používáme tak zvanou Einsteinovu sumační konvenci. V zápisu, kde se vyskytuje ve výrazu index nahoře i dole, má být před tímto výrazem suma přes tento index. Meze jsou dány významem. Například $x^i e_i$ znamená $\sum_{i=1}^n x^i e_i$.

[2] Kronekerovo δ_j^i, které je rovno nule, je-li $i \neq j$; a je rovno jedné, je-li $i = j$. Například, máme-li třetí vektor naší báze e_3, jsou jeho souřadnice v této bázi $(\delta_3^i) = (0, 0, 1, 0, \dots, 0)^\top$.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right)$$

Odtud $(t_1^i) = (-2, 6, 3)^\top$. Obdobně dostaneme $(t_i^2) = (0, 1, 0)^\top$ a $(t_i^3) = (1, -4, -1)^\top$. Z nich sestavíme matici přechodu.

$$T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Složky vektoru x v bázi $(\bar{e}_i)$ vypočítáme vynásobením matice T a složek (x_i). Takže

$$(\bar{x}_i) = T \cdot (x_i) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 17 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5.3 Podprostory vektorových prostorů. Uvažujme vektorový prostor V nad polem P, množinu $W \subset V$ nazveme *podprostorem vektorového prostoru* V (zkráceně *podprostorem* V), je-li sama vektorovým prostorem nad P vzhledem k operacím na V.

Snadno se ověří, že lineární obal množiny $M \subset V$ je vektorový podprostor V. Stačí dokázat následující lemma. To je ale snadné.

Lemma 5.5. *Množina $W \subset V$ je podprostorem V, právě když je uzavřená vzhledem ke sčítání a skalárnímu násobení. Tedy jestliže 1) pro každé $x, y \in W$ je $x + y \in W$; 2) pro každé $x \in W$ a $\alpha \in P$ je $\alpha x \in W$.*

Nejjednoduššími příklady vektorových podprostorů V je množina $\{0\}$ a celé V. Nazýváme je *triviální podprostory*. To jsou sice důležité ale ne příliš zajímavé příklady.

Zvolíme-li si ve V množinu k-vektorů $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ a položíme $W = [\![a_1, a_2, \ldots, a_k]\!]$ získáme podprostor ve V. Skutečně, je-li $x, y \in W$, platí

$$x = x^1 a_1 + x^2 a_2 + \cdots + x^k a_k \quad \text{a} \quad y = y^1 a_1 + y^2 a_2 + \cdots + y^k a_k,$$

pro nějaké $x^i, y^i \in P$. Ovšem

$$x + y = (x^1 + y^1)a_1 + (x^2 + y^2)a_2 + \cdots + (x^k + y^k)a_k.$$

To dokazuje, že $x + y \in W$. Podobně se dokáže, že pro libovolné $\alpha \in P$ je $\alpha x \in W$. Systému vektorů (a_i) říkáme *generátory podprostoru* W. Každý prvek z W je lineární kombinací systému $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, tedy $\dim W \leq k$. Jsou-li navíc vektory $a_1, \ldots, a_k$ lineárně nezávislé, tvoří ve W bázi a tudíž má W dimenzi k.

Vraťme se nyní k soustavě (2.5). Jak již víme, tento systém má dvě nezávislé rovnice a jeho fundamentální systém má tři prvky (viz (2.6)). Z Věty 2.5, věty 2.6 a lemmatu 5.5 plyne, že obecné řešení soustavy (2.5) tvoří vektorový podprostor prostoru $\mathbb{R}^5$ dimenze 3 a jeho báze je příslušný fundamentální systém. Označíme-li si tento podprostor L, máme $L = [\![(-2, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 0), (4, 0, 0, 1, 1)]\!]$

Pokud máme obecný vektorový prostor V dimenze n, a nechť L je jeho podprostor dimenze $k < n$. Nechť $(e_1, \ldots, e_k)$ je báze v L. Doplníme tuto bázi na bázi V, $(e_1, \ldots e_k, \ldots e_n)$. Je-li $x \in L$ prvek našeho podprostoru a x^i jeho složky ve zmíněné bázi, potom pro složky x v této bázi platí $x^i = 0$, pro $k < i \leq n$ (rovnice podprostoru).

Věta 5.6. *Průnik podprostorů vektorového prostoru V je podprostor V.*

D ů k a z. Věta platí pro libovolný systém podprostorů. My si ji však dokážeme pro pro případ průniku dvou podprostorů L_1 a L_2.

Ukážeme, že $L_1 \cap L_2$ splňuje předpoklady lemmatu 5.5. Nechť $x, y \in L_1 \cap L_2$ jsou dva libovolné vektory. Pak jednak $x, y \in L_1$ a tedy $x + y \in L_1$ a jednak $x, y \in L_2$ a tudíž $x + y \in L_2$. Proto $x + y \in L_1 \cap L_2$.

Průnik podprostorů W_1 a W_2 prostoru V značíme stejně jako průnik množin, tedy $W_1 \cap W_2$. *Součet podprostorů* W_1 a W_2 prostoru V je $[\![W_1 \cup W_2]\!] = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in W_1, x_2 \in W_2\}$ a značíme jej $W_1 + W_2$. Je-li průnikem W_1 a W_2 pouze nulový vektor, mluvíme o *přímém součtu podprostorů* a ten značíme $W_1 \dot{+} W_2$ (někdy se můžete setkat též s označením $W_1 \oplus W_2$).

Součet podprostorů W_1 a W_2 jsme nemohli definovat jako jejich sjednocení, protože sjednocení takových podprostorů nemusí být podprostor. Například máme-li ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^2$ podprostor $W_1 = [\![(1,0)]\!]$ (tedy všechny uspořádané dvojice s nulovou druhou souřadnicí) a $W_2 = [\![(0,1)]\!]$, $W_1 \cup W_2$ by byla množina všech uspořádaných dvojic (x, y), kde alespoň jedno z čísel x, y je rovno nule. Je jasné, že to ale není vektorový prostor, neboť tato množina není uzavřená vzhledem ke sčítání ($(1,0) + (0,1) = (1,1) \notin W_1 \cup W_2$). Proto jsme součet museli definovat jinak.

Věta 5.7. *Buď V vektorový podprostor dimenze n a $L \subset V$ jeho podprostor dimenze k. Pak existuje podprostor L' prostoru V o dimenzi $n-k$ takový, že $L \cap L' = \{0\}$ a $L + L' = V$.*

D ů k a z. Je konstruktivní. Označme $(e_1, \dots, e_k)$ bázi L a podle Steinitzovy věty o výměně (věta 5.2) ji doplňme vektory $e_{k+1}, \dots, e_n$ na bázi ve V. Dokážeme, že $L' = [\![e_{k+1}, \dots, e_n]\!]$. Jeho dimenze je $n-k$. Nejprve si zvolme libovolný prvek $x \in V$, můžeme jej rozvinout ve zmíněné bázi. tedy

$$x = x^1 e_1 + \dots + x^k e_k + x^{k+1} e_{k+1} + \dots + x^n e_n.$$

To znamená, že vektor x je součtem vektorů $x_L = x^1 e_1 + \dots + x^k e_k$ a $x_{L'} = x^{k+1} e_{k+1} + \dots + x^n e_n$. Protože $x_L \in L$ $x_{L'} \in L'$ máme $V = L + L'$.

Nyní zvolme $x \in L \cap L'$, to znamená, že

$$x = x^1 e_1 + \dots + x^k e_k = x^{k+1} e_{k+1} + \dots + x^n e_n.$$

Odtud

$$x^1 e_1 + \dots + x^k e_k - x^{k+1} e_{k+1} - \dots - x^n e_n = 0.$$

Jelikož je systém (e_i) nezávislý, dostáváme $x^i = 0$, pro každé $i = 1, \dots, n$. Proto je $L \cap L' = \emptyset$.

Podprostor L' z předchozí věty se nazývá *doplněk podprostoru* L ve V.

Věta 5.8 (o dimenzi). *Nechť W_1, W_2 jsou podprostory konečně rozměrného vektorového prostoru V. Potom platí*

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2). \tag{5.7}$$

D ů k a z. Označme $r = \dim W_1$ a $s = \dim W_2$. Je-li $W_1 \cap W_2 = \emptyset$, potom $\dim(W_1 \cap W_2) = 0$ a věta platí.

Předpokládejme tedy, že $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$ a tedy tvoří podle věty 5.6 podprostor. Označme jeho dimenzi k a zvolme v něm bázi $(e_1, \dots, e_k)$. Protože $W_1 \cap W_2$ je podprostorem W_1 můžeme (e_i) doplnit na bázi W_1. Tuto označme $(e_1, \dots, e_k, u_{k+1}, \dots, u_r)$. Stejně tak ji můžeme doplnit na bázi W_2, označme ji $(e_1, \dots, e_k, v_{k+1}, \dots, v_s)$. Ukážeme, že systém $(e_1, \dots, e_k, u_{k+1}, \dots, u_r, v_{k+1}, \dots, v_s)$ tvoří bázi $W_1 + W_2$.

Nejprve ověřme jejich lineární nezávislost. Vezměme jejich lineární kombinaci a položme ji rovnu nulovému vektoru.

$$\begin{aligned} &\alpha^1 e_1 + \dots + \alpha^k e_k + \beta^{k+1} u_{k+1} + \dots + \beta^r u_r + \gamma^{k+1} v_{k+1} + \dots + \gamma^s v_s = 0 \\ &\alpha^1 e_1 + \dots + \alpha^k e_k + \beta^{k+1} u_{k+1} + \dots + \beta^r u_r = -\gamma^{k+1} v_{k+1} - \dots - \gamma^s v_s \end{aligned} \tag{5.8}$$

Uvědomme si, že vektory $v_i \notin W_1$, protože kdyby některý z nich ležel ve $W_1 \cap W_2$ byl by lineární kombinací vektorů (e_i) a nemohl by s nimi tedy tvořit bázi W_2. Vektor na levé straně v (5.8) leží ve W_1 a vektor na pravé straně je lineární kombinací vektorů neležících ve W_1. To znamená, že jde o nulový vektor a všechny koeficienty musí být rovny nule.

Nyní ověříme, že generují $W_1 + W_2$. Zvolme si $x \in W_1 + W_2$ libovolně. Je tedy $x = x_1 + x_2$ pro nějaké

$x_1 \in W_1$ a $x_2 \in W_2$. Pak ovšem x_1 je lineární kombinací prvků báze $(e_1, \dots, e_k, u_{k+1}, \dots, u_r)$ a x_2 je lineární kombinací prvků báze $(e_1, \dots, e_k, v_{k+1}, \dots, v_s)$. Snadno se ověří, že potom $x_1 + x_2$ je lineární kombinací prvků systému $(e_1, \dots, e_k, u_{k+1}, \dots, u_r, v_{k+1}, \dots, v_s)$.

Tento systém tedy tvoří bázi $W_1 + W_2$. Pro dimenzi $W_1 + W_2$ tedy platí, že $\dim(W_1 + W_2) = k + (r - k) + (s - k) = r + s - k = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$.

Rejstřík

Značení

Literatura

[1] H. J. Bartsch, *Matematické vzorce*, Praha, SNTL, 1983.

[2] M. Krupka, M. Málek, *Matematická anlýza I,II*, Pomocný učební text, Slezská univerzita, Opava 2006.

[3] D. Krupka, J. Musilová, *Lineární a multilineární algebra*, Univerzita J. E. Purkyně v Brně, Brno 1989.

[4] K. Rektorys a kol., *Přehled užité matematiky*, Prometheus, 1995.