SLEZSKÁ UNIVERZITA V OPAVĚ
Matematický ústav v Opavě
Na Rybníčku 1, 746 01 Opava, tel. (553) 684 611
DENNÍ STUDIUM

ALGEBRA

Téma 3: Polynomy

Základní pojmy

Polynom jedné neurčité (proměnné) x nad číselným polem P, koeficienty polynomu, konstantní polynom, nulový polynom; normovaný polynom, stupeň deg f polynomu f; součet a součin polynomů. Největší společný dělitel; dělitelnost polynomů, věta o dělení se zbytkem; Eukleidův algoritmus. Kořen polynomu, násobnost kořene, kořenoví činitelé, algebraicky uzavřené pole, Hornerovo schema; formální derivace polynomu, Lagrangeův interpolační polynom, Taylorův rozvoj polynomu, rozklad na parciální zlomky.

Základní tvrzení

Zákony o krácení, věta o dělení se zbytkem, Bézoutova věta, Viétova věta, Základní věta algebry (Gaussova věta), věta o kořenech polynomů s reálnými koeficienty, věta o existenci a jednoznačnosti rozkladu na ireducibilní faktory, věta o existenci a jednoznačnosti rozkladu na parciální zlomky.

Základní úlohy

Výpočet největšího společného dělitele, vyhledání násobných kořenů a určení jejich násobnosti, vyhledání racionálních kořenů polynomu s racionálními koeficienty, řešení binomických a kubických rovnic, rozklad polynomu na ireducibilní faktory nad $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$.

Základní vzorce

1. Je-li $f = f_n x^n + f_{n-1}x^{n-1} + \dots + f_1 x + f_0$, $\deg f = m$, $g = g_n x^n + g_{n-1}x^{n-1} + \dots + g_1 x + g_0$, $\deg g = n$, pak $(fg)_k = \sum_{i+j=k} f_i g_j$, $\deg fg = m + n$, $(f+g)_k = f_k + g_k$, $\deg(f+g) \le \max\{\deg f, \deg g\}$.
2. Dělení polynomu f polynomem g s částečným podílem q a zbytkem r:
$$f = qg + r, \qquad r = 0 \text{ nebo } \deg r < \deg f.$$
3. Derivace polynomu:
$$f' = n f_n x^{n-1} + (n-1) f_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2 f_2 x + f_1,$$
$$(f+g)' = (f' + g'), \qquad (fg)' = f'g + fg', \qquad (f^n)' = n f^{n-1} f'.$$
4. Viétovy vzorce:
$$\begin{aligned} -\frac{f_{n-1}}{f_n} &= x_1 + x_2 + \dots + x_n \\ \frac{f_{n-2}}{f_n} &= x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n \\ &\dots \\ (-1)^{n-1}\frac{f_1}{f_n} &= x_1 \dots x_{n-2}x_{n-1} + x_1 \dots x_{n-2}x_n + \dots + x_2 \dots x_{n-1}x_n \\ (-1)^n \frac{f_0}{f_n} &= x_1 \dots x_{n-1}x_n. \end{aligned}$$

Obecně pro $1 \leq k \leq n$:

$$(-1)^k \frac{f_k}{f_n} = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n}.$$

5. Lagrangeův interpolační vzorec

$$f(x) = \sum_{i=1}^n f(b_i) \frac{(x-b_1)\ldots(x-b_{i-1})(x-b_{i+1})\ldots(x-b_n)}{(b_i-b_1)\ldots(b_i-b_{i-1})(b_i-b_{i+1})\ldots(b_i-b_n)}$$

$\deg f < n$

Označení

$\mathbb{R}[x]$ množina polynomů s reálnými koeficienty.

Kontrolní otázky

1. Definujte stupeň polynomu.
2. Čemu je roven stupeň konstantního polynomu? (Pozor na nulový polynom!)
3. Ukažte, že $\deg(f+g) \leq \max\{\deg f, \deg g\}$. Uveďte příklad, kdy $\deg(f+g) < \max\{\deg f, \deg g\}$.
4. Určete všechny největší společné dělitele polynomů $f = x+1$, $g = x+2$ v $\mathbb{R}[x]$.
5. Napište Viétovy vztahy explicitně pro $n = 1, 2, 3, 4$.
6. Vyslovte základní větu algebry.
7. Kolik nejméně a kolik nejvíce komplexních kořenů může mít polynom s komplexními koeficienty? Kolik jich je, počítáme-li každý kořen tolikrát, kolik je jeho násobnost?
8. Uveďte příklad polynomu 4. stupně, který má trojnásobný kořen 0. Kolik má ještě kořenů?
9. Polynom s reálnými koeficienty má dvojnásobný kořen $1+2\mathrm{i}$. Uveďte další kořen tohoto polynomu. Je také dvojnásobný?
10. Kubický polynom má kořeny $0, 1, -1$. Můžete zjistit, o který polynom se jedná? Je určen jednoznačně?
11. Kvadratický polynom s reálnými koeficienty má kořen $1+\mathrm{i}$. Můžete zjistit, o který polynom se jedná? Je určen jednoznačně?
12. Uveďte příklad kvadratického polynomu, který je a) reducibilní nad $\mathbb{R}$, b) ireducibilní nad $\mathbb{R}$.

Příklady

1. Nalezněte Lagrangeův polynom f třetího stupně, nabývající hodnot $f(0) = 1$, $f(1) = 4$, $f(-2) = -5$, $f(-3) = -20$.
2. Nalezněte částečný podíl a zbytek při dělení polynomu f polynomem g

a)	$f = x^5 + 2x^3 + x^2 - x + 1$,	$g = x^3 - x^2 + 1$,
b)	$f = x^5 - 4x^2 + 3x - 2$,	$g = x^2 + x - 3$,
c)	$f = x^3 - \mathrm{i}x^2 + (3+\mathrm{i})x - 1$,	$g = \mathrm{i}x^2 + 2x - \mathrm{i} - 3$,
d)	$f = \mathrm{i}x^2 + (1-\mathrm{i})x + (\mathrm{i}-2)$,	$g = (1+2\mathrm{i})x + \mathrm{i} - 3$,
e)	$f = x^{101} - 1$,	$g = x^{99} - 1$,

3. Ověřte, že $g|f$:

a)	$f = x^4 + 4,$	$g = x^2 + 2x + 1,$
b)	$f = x^6 + 27,$	$g = \frac{1}{3}x^2 + x + 1,$
c)	$f = x^4 - 4,$	$g = x + \sqrt{2},$

4. Nalezněte největšího společného dělitele polynomů f, g, je-li

a)	$f = x^5 + x^2 - 2,$	$g = x^3 + 2x - 3,$
b)	$f = \mathrm{i}x^3 - x - 1 + \mathrm{i},$	$g = 2x^2 + 3x + 2 - 3\mathrm{i},$

5. Rozhodněte, mají-li polynomy f, g společné kořeny, je-li

a)	$f = x^5 + x^2 - 2,$	$g = x^3 + 2x - 3,$
b)	$f = x^3 + 6x^2 + 11x + 6,$	$g = x^3 - 7x - 6,$

   Návod: Hledejte kořeny $\mathrm{D}(f, g)$.

6. Nalezněte největšího společného dělitele d polynomů f, g a polynomy u, v takové, že $fu + gv = d$, je-li

a)	$f = x^4 + x^2 - 2,$	$g = x^2 + 2x - 3,$
b)	$f = x^3 + 3x^2 + 8x,$	$g = x^2 - 7x - 5,$

7. Rozhodněte, zda mají následující polynomy násobný kořen a nalezněte jej:

a)	$f = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1,$
b)	$f = x^4 - 2\mathrm{i}x^3 + 2x^2 - 2\mathrm{i}x + 1,$

8. Ukažte, že polynom s reálnými koeficienty má s každým komplexním kořenem $a + b\mathrm{i}$ kořen komplexně sdružený $a - b\mathrm{i}$, a to ve stejné násobnosti.
9. Normovaný polynom $f \in \mathbb{R}[x]$ má jednonásobný kořen 0 a trojnásobný kořen i. Jakého nejméně stupně je polynom f? Nalezněte jej.
10. Kolik reálných kořenů má polynom $f \in \mathbb{R}[x]$, který má trojnásobný kořen $3 + 5\mathrm{i}$ a je sedmého stupně?
11. Polynom $f \in \mathbb{R}[x]$ je lichého stupně. Ukažte, že f má alespoň jeden reálný kořen.
12. Určete $a, b, c \in \mathbb{R}$ víte-li, že jsou kořeny polynomu $x^3 - ax^2 + bx - c$.
    Návod: Použijte Viétovu větu.
13. Ukažte, že polynom $f \in \mathbb{R}[x]$ druhého stupně je reducibilní nad $\mathbb{R}$ právě tehdy, když má reálný kořen.
14. Buď r/s, kde $r \in \mathbb{Z}$ je nesoudělné s $s \in \mathbb{N}$, racionální kořen polynomu $f = f_m x^m + \cdots + f_0$ s *celými* koeficienty. Ukažte, že pak $r|f_0$, $s|f_m$.
    Návod: Položte $x = r/s$ a vynásobte $f(r/s) \cdot s^m$. Ukažte, že $f_m r^m$ musí být dělitelné s a $f_0 s^m$ musí být dělitelné r.
15. Nalezněte racionální kořeny polynomů

a)	$x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 12x - 8,$
b)	$4x^4 - 17x^2 + 4.$

16. Řešte binomické rovnice

a)	$x^8 = 1,$
b)	$x^3 = \mathrm{i} + 1,$

17. a) Ukažte, že substituce $x = y - a_{m-1}/m$ převádí rovnici $x^m + a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + \cdots + a_1 x + a_0$ na tvar $y^m + b_{m-2}y^{m-2} + \cdots + b_1 y + b_0$ (tj. anuluje koeficient u $(m-1)$ní mocniny).
    b) Odvoďte pomocí této substituce známý vzorec pro řešení kvadratické rovnice.

18. a) Vypište Viétovy vzorce pro kubickou rovnici $y^3 + py + q = 0$ s anulovaným kvadratickým členem.
b) Ukažte, že po substituci

$$y_1 = a + b,$$
$$y_2 = \varepsilon_1 a + \varepsilon_2 b,$$
$$y_3 = \varepsilon_2 a + \varepsilon_1 b,$$

kde $\varepsilon_{1,2} = (-1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3})/2$ (třetí odmocniny z 1), je první z Viétových vzorců splněn a druhé dva přejdou na tvar

$$-p = 3ab,$$
$$-q = a^3 + b^3.$$

c) Uvažte, že $-p^3 = 27a^3b^3$ a odvoďte kvadratickou rovnici, jejímiž kořeny jsou a^3, b^3.
d) Napište vzorce pro a, b (tzv. Cardanovy vzorce).

19. Řešte kubické rovnice

a) $x^3 + 6x^2 + 6x + 5 = 0$
b) $x^3 + 2x^2 - 2x + 3 = 0$

20. Ukažte, že zbytek po dělení polynomu f lineárním polynomem $x - c$ je roven funkční hodnotě $f(c)$.
21. Ukažte, že polynom $f \in \mathbb{R}[x]$ druhého resp. třetího stupně je reducibilní nad $\mathbb{R}$ právě tehdy, když má reálný kořen. Uveďte příklad polynomu $f \in \mathbb{R}[x]$ čtvrtého stupně, který je reducibilní nad $\mathbb{R}$, ale nemá reálné kořeny.
22. Rozložte na ireducibilní činitele nad $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}$ polynom $x^4 - 4$, resp. $x^4 + 4$ resp. $x^6 - 1$.
Návod: Nejprve nalezněte kořenové činitele odpovídající komplexním kořenům polynomů, potom vynásobte ty, které odpovídají kořenům komplexně sdruženým.
23. Rozložte na parciální zlomky nad $\mathbb{C}$ a nad $\mathbb{R}$ racionální výrazy

$$\frac{1}{x^4+4}, \qquad \frac{x-1}{(x+1)^2(2x+1)}, \qquad \frac{x^4-1}{x^3+3x^2+3x+1}.$$

Zápočtové příklady

1. Nalezněte Lagrangeův polynom f třetího stupně, nabývající hodnot $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(2) = 1$ a $f(3) = 0$. Vypočtěte $f(-1)$ a $f(5)$.
2. Nalezněte částečný podíl a zbytek při dělení polynomu $f = x^5 - \mathrm{i}x^2 + (6+\mathrm{i})x - 7\mathrm{i}$ polynomem $g = \mathrm{i}x^2 - x + 3 + \mathrm{i}$.
3. Nalezněte největšího společného dělitele polynomů $f = 3x^5 + x^2 - 4$, $g = 2x^3 + 3x - 5$.
4. Nalezněte společné kořeny polynomů $f = x^3 - 10x^2 + 31x - 30$, $g = x^3 - 9x^2 + 23x + 15$.
5. Nalezněte největšího společného dělitele d polynomů f, g a polynomy u, v takové, že $fu + gv = d$, je-li $f = x^4 + x^3 - 2x + 1$, $g = x^2 + x - 3$.
6. Ukažte, že má polynom $x^4 - 6x^2 - 8x - 3$ násobný kořen a nalezněte jej.
7. Polynom $f = x^3 + ax^2 + bx - 15 \in \mathbb{R}[x]$ má kořen $x_1 = 2 + \mathrm{i}$. Nalezněte ostatní kořeny a hodnoty $a, b \in \mathbb{R}$.
8. Rozložte na ireducibilní činitele nad $\mathbb{C}$ a nad $\mathbb{R}$ polynom $x^6 + 27$.
9. Rozložte na parciální zlomky nad $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ a nad $\mathbb{R}$ racionální výrazy $\dfrac{x^4-1}{(x+1)^3}$, $\dfrac{x}{x^4+4x^2+4}$