3. Polynomy Verze 338.

V této kapitole se věnujeme vlastnostem polynomů. Definujeme základní pojmy, které se k nim váží, definujeme algebraické operace s polynomy. Diskutujeme *dělitelnost* polynomů, existenci *největšího společného dělitele*. Dále se zabýváme *kořeny* polynomů, jejich násobností a hledání. Závěr kapitoly je pak věnován polynomům s reálnými, celočíselnými koeficienty a racionálním lomeným funkcím.

Polynomem (jedné proměnné označené x) n-tého *stupně* s koeficienty z číselného pole P rozumíme výraz[1)]

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0, \tag{3.1}$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in P$ a $a_n \neq 0$. Číslu a_n říkáme *vedoucí koeficient*. Číslům $a_0, \ldots, a_n$ říkáme *koeficienty* polynomu $f(x)$. *Nulový polynom* je číslo 0. Pokud je vedoucí koeficient roven jedné mluvíme o *normovaném polynomu*. Pokud je stupeň polynomu roven dvěma (respektive jedné, respektive nule) nazýváme jej *kvadratický*(respektive *lineární*, respektive *konstantní*). Stupeň polynomu $f(x)$ označujeme deg $f(x)$.

Jelikož polynomy úzce souvisí s funkcemi, označujeme polynomy stejně jako jsme zvyklí označovat zobrazení (tedy například $f(x)$).

3.1 Operace s polynomy. Nechť $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x^1 + a_0$, $g(x) = b_m x^m + \cdots + a_1 x^1 + a_0$ jsou dva polynomy a $n \geq m$ definujeme *součet polynomů* jako polynom

$$f(x) + g(x) = a_n x^n + \cdots + a_{m-1} x^{m-1} + (a_m + b_m) x^m + \cdots + (b_1 + a_1) x^1 + a_0 + b_0.$$

Obdobně definujeme součet pro případ, že $n < m$. Dále definujeme *součin polynomů*

$$f(x) \cdot g(x) = a_n b_m x^{n+m} + \cdots + \Big(\sum_{i+j=k} a_i b_j \Big) x^k + \cdots + a_0 b_0.$$

Věta 3.1 (Dělení se zbytkem). *K libovolné dvojici polynomů $f(x), g(x)$ existují polynomy $q(x), r(x)$ takové, že platí*

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x), \tag{3.2}$$

přičemž stupeň polynomu $r(x)$ je menší než stupeň polynomu $g(x)$. Polynomy $q(x), r(x)$ jsou určeny jednoznačně.

Polynom $q(x)$ se nazývá *(částečný) podíl* a polynom $r(x)$ *zbytek* dělení polynomů $f(x)$ a $g(x)$.

D ů k a z. **Existence není zatím dokázána.**

Ověřme jednoznačnost polynomů $r(x), q(x)$. Předpokládejme, že existují různé $r_1(x), r_2(x)$ a $q_1(x), q_2(x)$ splňující

$$f(x) = q_1(x) \cdot g(x) + r_1(x)$$

1) V tomto výrazu znamená x^i i-tou mocninu čísla x. Nejedná se zde o index. To je třeba mít na mysli v celé této kapitole.

$$f(x) = q_2(x) \cdot g(x) + r_2(x).$$

Porovnáme pravé strany obou rovnic.

$$g(x)(q_1(x) - q_2(x)) = r_1(x) - r_2(x). \tag{3.3}$$

Pokud by $q_1(x) - q_2(x)$ nebyl nulový, pak by stupeň $r_1(x)$ nebo $r_2(x)$ nebyl menší než stupeň $g(x)$. Musí tedy být $q_1(x) = q_2(x)$. V tom případě ale z rovnice (3.3) plyne $r_1(x) = r_2(x)$.

Polynom $f(x)$ je *dělitelný* polynomem $g(x)$, jestliže zbytek po jejich dělení $r(x) = 0$. To, že polynom $g(x)$ je dělí polynom $f(x)$ značíme $g \mid f$.

Věta 3.2 (Vlastnosti dělitelnosti). 1) *Jestliže $g \mid f$ a $g \mid h$, potom $f \mid h$.*
2) *Jestliže $h \mid f$ a $h \mid g$, potom i $h \mid (f \pm g)$.*
3) *Jestliže $h \mid f$ a $g(x)$ je libovolný polynom, potom i $h \mid (f \cdot g)$.*
4) *Každý polynom je dělitelný polynomem stupně* 0.
5) *Jestliže $h \mid f$ a $c \in P$, potom $(c \cdot h) \mid h$.*
6) *Děliteli polynomu $f(x)$ stejného stupně jako $f(x)$ jsou všechny polynomy tvaru $c \cdot f(x)$, $c \in P \setminus \{0\}$.*
7) *Polynomy jsou vzájemně dělitelné, jestliže pro nějaké $c \in P$ je $g(x) = c \cdot f(x)$.*
8) *Každý z dělitelů polynomů $f(x)$ a $c \cdot f(x)$ je dělitelem i druhého.*
D ů k a z. Přenecháváme čtenáři jako užitečné cvičení.

Největší společný dělitel polynomů $f(x)$ a $g(x)$ je libovolný polynom $h(x)$, který je dělitelem obou polynomů a zároveň je sám dělitelný každým společným dělitelem $f(x)$ a $g(x)$. Libovolné dva polynomy mají největší společný dělitel a ten je určen jednoznačně až na násobek polynomem nultého stupně (označujeme jej $NSD(f(x), g(x))$).

Eukleidův algoritmus *Nechť $f(x)$ a $g(x)$ jsou neulové polynomy,* $\deg f(x) \geq \deg g(x)$, *posloupnost polynomů $r_0(x), r_1(x), r_2(x), \ldots$ taková, že $r_0(x) = f(x), r_1(x) = g(x)$ a je-li $r_k(x), r_{k+1}(x)$ již známo, je r_{k+2} rovno zbytku po dělení $r_k(x)$ a r_{k+1}, tedy*

$$r_k(x) = r_{k+1}(x) \cdot q_k(x) + r_{k+2}$$

kde $\deg r_{k+2}(x) < \deg r_{k-1}(x)$ *nebo* $r_{k+2}(x) = 0$. *Potom existuje nejměnší číslo $n \in \mathbb{N}$ takové, že $r_{n+1}(x) = 0$ a polynom $r_n(x)$ je největší společný dělitel polynomů $f(x)$ a $g(x)$.*
D ů k a z. Nejprve dokážeme exitenci čísla n. Kdyby totiž byly všechny polynomy r_k nenulové platilo by $\deg r_1(x) > \deg r_2(x) > \deg r_3(x) > \cdots$, což ale není možné pro nekonečně mnoho členů. Tedy požadované číslo n existuje.

Nyní ukážeme, že $r_n(x)$ je společný dělitel $f(x)$ a $g(x)$. Platí

$$\begin{aligned}
&r_{n-1}(x) = r_n(x) \cdot q_{n-1}(x) && \text{(definice čísla } n\text{)}\\
&r_{n-2}(x) = r_{n-1}(x) \cdot q_{n-2}(x) = r_n(x) \cdot q_{n-1}(x) \cdot q_{n-2}(x)\\
&\cdots\\
&r_0 = r_n(x) \cdot q_{n-1}(x) \cdot q_{n-2}(x) \cdots q_0(x).
\end{aligned}$$

Tedy $r_n(x)$ dělí $f(x) = r_0(x)$ i $g(x) = r_1(x)$.

Zbývá ukázat, že $r_n(x)$ je největší. Nechť tedy $d(x)$ je také společný dělitel $r_0(x)$ a $r_1(x)$. To ale $d(x)$ dělí i $r_2(x)$, protože

$$r_2(x) = r_0(x) - r_1(x) \cdot q_0(x). \qquad \text{(viz 2), 3) věta 3.2)}$$

Podobně lze postupovat dále, až dostaneme, že $d(x)$ dělí i $r_n(x)$. To ale znamená, že $r_n(x)$ je největší společný dělitel.

Důsledek 3.3 (Bezoutova věta). *Nechť $f(x)$, $g(x)$ jsou polynomy a $h(x)$ jejich největší společný dělitel, potom existují polynomy $u(x)$, $v(x)$ takové, že*

$$f(x) \cdot u(x) + g(x) \cdot v(x) = h(x). \tag{3.4}$$

Speciálně, jsou-li $f(x)$ a $g(x)$ nesoudělné, potom

$$f(x) \cdot u(x) + g(x) \cdot v(x) = 1. \tag{3.5}$$

Najděme největší společný dělitel polynomů $f(x) = x^4 + x^2 - 2$ a polynomu $g(x) = x^2 + 2x - 3$. Nejprve podělme se zbytkem $f(x)$ a $g(x)$, tedy

$$\begin{array}{r l}
(x^4 + x^2 - 2) & : (x^2 + 2x - 3) = x^2 - 2x + 8 + \dfrac{-22x + 22}{x^2 + 2x - 3}. \\
\underline{-(x^4 + 2x^3 - 3x^2)} & \\
-2x^3 + 4x - 2 & \\
\underline{-(-2x^3 - 4x^2 + 6x)} & \\
8x^2 - 6x - 2 & \\
\underline{-(8x^2 + 16x - 24)} & \\
-22x + 22 &
\end{array}$$

V označení použitém v Euleidově algoritmu máme $r_0(x) = x^4 + x^2 - 2$, $r_1(x) = x^2 - 2x + 8$. Po provedeném dělení je další člen posloupnosti roven zbytku po tomto dělení, můžeme si dovolit ale tento zbytek vynásobit libovolným číslem, třeba $-\frac{1}{22}$. Tedy $r_2(x) = x - 1$. Pokračujeme dělením $r_1(x)$ a $r_2(x)$.

$$\begin{array}{r l}
(x^2 + 2x - 3) & : (x - 1) = x + 3 \\
\underline{-(x^2 - x)} & \\
3x - 3 & \\
\underline{3x - 3} & \\
0 &
\end{array}$$

Vyšlo nám $r_3(x) = 0$, tedy největší společný dělitel polynomů $f(x)$ a $g(x)$ je $r_2(x) = x - 1$.

3.2 Kořeny polynomů. Nechť $f(x)$ je polynom s koeficienty z pole P, číslo $c \in P$ nazveme *kořenem polynomu* $f(x)$, jestliže platí $f(c) = 0$. Hodnotou polynomu $f(x)$ v bodě $b \in P$ rozumíme číslo $f(b)$. Kořen c polynomu $f(x)$ je k-násobný, kde $k \in \mathbb{N}$, jestliže je $f(x)$ dělitelný $(x - c)^k$ ale není dělitelný $(x - c)^{k+1}$.

Problematiku existence kořenů polynomu nad polem komplexních čísel řeší následující věta.

Věta 3.4 (Gaussova, Základní věta Algebry). *Každý nekonstantní polynom s koeficienty z pole komplexních čísel má v tomto poli alespoň jeden kořen.*

V současné době není bohužel znám jednoduchý důkaz, který by využíval pouze základních znalostí. Existují důkazy založené na výsledcích komplexní analýzy. Proto je důkaz této věty ponechán do tohoto předmětu.

Věta 3.5. *Číslo $c \in P$ je kořenem polynomu $f(x)$, právě když je $f(x)$ dělitelný polynomem $x - c$.*

D ů k a z. Nechť $c \in P$ je kořenem $f(x)$. Vypočtěme podíl (se zbytkem) polynomů $f(x)$ a $x - c$. Existuje tedy polynom $q(x)$ a konstantní polynom $r(x)$ takové, že $f(x) = q(x) \cdot (x - c) + r(x)$. Do levé i pravé strany nyní dosadíme $x = c$. Dostáváme

$$f(c) = 0 = q(c) \cdot (c - c) + r(c) = 0 + r(c).$$

Jelikož je $r(x)$ konstantní, $r(c) = 0$ znamená, že je to nulový polynom. Proto $f(x)$ je dělitelné $x - c$.

Nyní je-li $f(x)$ dělitelný polynomem $x - c$, existuje polynom $q(x)$ takový, že $f(x) = q(x) \cdot (x - c)$.

Dosadíme-li $x = c$, máme $f(c) = 0$. Tedy c je kořenem $f(x)$.

Důsledek 3.6 (Rozklad na kořenové činitele). *Nekonstantní polynom $f(x)$ stupně n má n kořenů a lze jej psát ve tvaru*

$$f(x) = a(x - c_1) \cdot (x - c_2) \cdot \cdots \cdot (x - c_n),$$

kde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ jsou kořeny $f(x)$ a a je vedoucí koeficient.

Věta 3.7 (Viétovy vzorce). *Každý normovaný polynom je jednoznačně určen svými kořeny. Tedy je-li $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ a $c_1, c_2, \ldots c_n$ jsou jeho kořeny, potom*

$$\begin{aligned}
a_{n-1} &= -(c_1 + c_2 + \cdots + c_n),\\
a_{n-2} &= c_1c_2 + \cdots + c_1c_n + c_2c_3 + \cdots + c_2c_n + \cdots + c_{n-1}c_n,\\
a_{n-3} &= -(c_1c_2c_3 + c_1c_2c_4 + \ldots + c_1c_{n-1}c_n + \cdots + c_{n-2}c_{n-1}c_n),\\
&\cdots\\
a_1 &= (-1)^{n-1}(c_1 \cdots c_{n-2}c_{n-1} + c_1 \cdots c_{n-2}c_n + \cdots + c_2 \cdots c_{n-1}c_n),\\
a_0 &= (-1)^n c_1c_2 \cdots c_n.
\end{aligned}$$

D ů k a z. O platnosti Viétových vzorců je možné se přesvědčit z rovnosti

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = (x - c_1) \cdot (x - c_2) \cdot \cdots \cdot (x - c_n).$$

Uvažujme polynom $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, polynom $f'(x) = na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$ nazýváme *derivace polynomu f*. Lze se přesvědčit, že jsou-li $f(x), g(x)$ dva polynomy pak platí $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$ a $(f(x) \cdot g(c))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Následující věta objasňuje, jak spolu souvisí derivace a násobnost kořenů polynomu. Současně nám dává nástroj, jak zjistit, zda právě nalezený kořen je vícenásobným kořenem polynomu.

Věta 3.8. *Je-li c k-násobný kořen polynomu $f(x)$ pro $k > 1$, pak je $k - 1$-násobným kořenem $f'(x)$.*
D ů k a z. Jestliže je c k-násobným kořenem $f(x)$ existuje polynom $g(x)$ takový, že $f(x) = (x - c)^k g(x)$. Z toho, co jsme si řekli o derivaci polynomů, vidíme, že

$$\begin{aligned}
f'(x) &= ((x - c)^k g(x))' = \\
&= ((x - c)^k)'g(x) + (x - c)^k g'(x) = && \text{(viz výše)}\\
&= k(x - c)^{k-1}g(x) + (x - c)^k g'(x) = && \text{(ověřte)}\\
&= (x - c)^{k-1}(kg(x) + (x - c)g'(x)).
\end{aligned}$$

Z toho vidíme, že c je $k - 1$-násobný kořen $f'(x)$.

Příklad!!

3.3 Polynomy s reálnými koeficienty. V tomto odstavci se budeme podrobněji věnovat polynomům, které mají své koeficienty z pole reálných čísel.

Uvažujeme polynom $f(x) = x^2 + 1$. Snadno ověříme, že $f(x) = (x - \mathrm{i})(x + \mathrm{i})$. Jak je vidět z toho příkladu, to, že má polynom všechny koeficienty reálná čísla, neznamená, že i jeho kořeny jsou z téhož pole.

Jak je vidět z uvedeného příkladu pro reálné polynomu neplatí obdobná verze Gassovy věty. Platí však následující slabší tvrzení.

Věta 3.9. *Každý reálný polynom lichého stupně má alespoň jeden reálný kořen.*

Tuto větu lze dokázat se znalostmi z spojitých reálných funkcí. Důkaz necháváme čtenáři jako cvičení z matematické analýzy.

Věta 3.10. *Je-li číslo c kořenem reálného polynomu* $f(x)$*, pak je jeho kořenem i číslo komplexně sdružené. Navíc je-li c k-násobným kořenem* $f(x)$*, je i* c^* *k-násobným kořenem* $f(x)$.

D ů k a z. Jelikož c je kořenem $f(x)$, platí $f(c) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$. Pro c^* platí

$$\begin{aligned} f(c^*) &= a_n(c^*)^n + a_{n-1}(c^*)^{n-1} + \cdots + a_0 = \\ &= a_n^*(c^n)^* + a_{n-1}^*(c^{n-1})^* + \cdots + a_0^* = \\ &= (a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_0)^* = 0. \end{aligned}$$

Nyní předpokládejme, c je k-násobným kořenem $f(x)$ a c^* je l-násobným kořenem $f(x)$. Předpokládejme, $k \neq l$, například, že $k > l$ (opačná nerovnost se dokáže obdobně), označme si

$$\varphi(x) = (x-c)(x-c^*) = x^2 - (c+c^*)x + cc^*.$$

Jelikož $(c + c^*), cc^* \in \mathbb{R}$, má $\varphi(x)$ reálné koeficienty. Polynom $f(x)$ je dělitelný $\varphi^k(x)$, tedy existuje polynom $g(x)$ s reálnými koeficienty takový, že

$$f(x) = \varphi^l(x) \cdot g(x).$$

Ovšem $g(x)$ musí být dělitelný $(x - c^*)^{l-k}$, což je ve sporu s tím, že $g(x)$ má pouze reálné koeficienty; protože $(x-c)^{l-k}$ nedělí $g(x)$.

Důsledek 3.11. *Každý reálný polynom n-tého stupně,* $n > 2$*, lze vyjádřit jako součin lineárních a kvadratických polynomů s reálnými koeficienty.*

Příklad!!

3.4 Metody hledání kořenů. V případě konstantních polynomů a polynomů prvního stupně je situace naprosto triviální a proto se jí nezabýváme.

Kvadratický polynom

$$ax^2 + bx + c = 0. \qquad \text{(Kvadratická rovnice)}$$

Explicitní vzorec pro kořeny pomocí koeficientů

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Kubický polynom

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0. \qquad \text{(Kubická rovnice)} \tag{3.6}$$

Substituce $x = y - b/(3a)$ převede kubickou rovnice na tvar

$$y^3 + py + q = 0. \tag{3.7}$$

Předpokládáme, že $p \neq 0$ (jinak se jedná o binomickou rovnici). Očekáváme kořeny rovnici (3.7) ve tvaru $y_1 = \alpha + \beta$, $y_2 = \alpha\varepsilon + \beta\varepsilon^2$, $y_3 = \alpha\varepsilon^2 + \beta\varepsilon$, kde

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \qquad \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \tag{3.8}$$

a $\varepsilon = \frac{1}{2}(-1 + \mathrm{i}\sqrt{3})$. Třetí odmocniny jsou v (3.8) voleny tak, aby $3\alpha\beta = -p$. Výše uvedené vzorce naleznete v literatuře označené jako *Cardanovy vzorce*.

Příklad!!

Binomické rovnice, $n \in \mathbb{N}$

$$x^n = a. \qquad \text{(Binomická rovnice)}$$

Hledání kořenů polynomů vyšších řádů je obtížné, existují ale speciální tvary polynomů, pro které je možno některé jeho kořeny najít nebo alespoň převést problém nalezení jeho kořenů na hledání kořenů polynomu nižšího stupně. Zde máme namysli zejména reciproké polynomy. Pro tyto a další případy odkazujeme čtenáře na běžně dostupnou literaturu například [1] či [3].

3.5 Polynomy s celočíselnými koeficienty. Často se setkáváme s polynomy, které mají koeficienty z množiny $\mathbb{Z}$. Proto není od věci se alespoň trochu podívat na to, co z toho plyne pro jejich kořeny.

Věta 3.12. *Nechť $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ je polynom s celočíselnými koeficienty (tedy čísla $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{Z}$), $n \geq 1$. Je-li racionální číslo $\frac{p}{q}$ (p, q nesoudělná) kořenem $f(x)$, pak jednak koeficient a_0 je dělitelný p a jednak koeficient a_n je dělitelný q.*

D ů k a z. Platí

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0.$$

Obě strany vynásobíme q^n, dostáváme

$$\begin{aligned}
a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1 pq^{n-1} + a_0 q^n &= 0\\
a_n p^n &= -(a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1 pq^{n-1} + a_0 q^n)\\
&= -q(a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 pq^{n-2} + a_0 q^{n-1}).
\end{aligned}$$

Jelikož $(a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 pq^{n-2} + a_0 q^{n-1}) \in \mathbb{Z}$, musí být $a_n p^n$ dělitelné q. Ovšem p a q jsou nesoudělná. Tedy a_n musí být dělitelné q.

Obdobným postupem se dokáže i dělitelnost a_0 číslem p.

Důsledek 3.13. *Všechny celočíselné kořeny polynomu s celočíselnými koeficienty leží v množině dělitelů absolutního členu.*

Příklad!!

3.6 Racionální lomené funkce. Velice často se setkáváme s funkcemi, které se dají vyjádřit jako podíl dvou polynomů. Takovýmto podílům říkáme *racionální lomené funkce*.

Pomocí následujících vět, které zde uvádíme bez důkazů, lze každou racionální lomenou funkci převést na „jednoduchý tvar," přesněji řečeno na součet jednodušších racionálních lomených funkcí.

Věta 3.14 (Rozklad na parciální zlomky). *Nechť $g(x)$ je polynom takový, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $Q(x) = c(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdots(x-a_k)^{n_k}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}(x^2+p_2x+q_2)^{m_2}\cdots(x^2 p_l x+q_l)^{m_l}$, kde $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, $a_1, \ldots, a_k$ jsou po dvou různá reálná čísla a $x^2+p_1x+q_1, \ldots, x^2+p_lx+q_l$ jsou po dvou různé polynomy, které nemají reálné kořeny. Dále nechť $f(x)$ je polynom stupně menšího než $g(x)$.*

Potom existují čísla $A_{1,1}, A_{1,2}, \ldots A_{k,n_k}, B_{1,1}, B_{1,2}, \ldots, B_{l,m_l}, C_{1,1}, C_{1,2}, \ldots, C_{l,m_l} \in \mathbb{R}$ taková, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která $g(x) \neq 0$, platí

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_{1,n_1}}{(x-a_1)^{n_1}} + \frac{A_{1,n_1-1}}{(x-a_1)^{n_1-1}} + \cdots + \frac{A_{1,1}}{(x-a_1)} +&\\
+ \frac{A_{2,n_2}}{(x-a_2)^{n_2}} + \frac{A_{2,n_2-1}}{(x-a_2)^{n_2-1}} + \cdots + \frac{A_{2,1}}{(x-a_2)} +&
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\dots \\
&+\frac{A_{k,n_k}}{(x-a_k)^{n_k}}+\frac{A_{k,n_k-1}}{(x-a_k)^{n_k-1}}+\dots+\frac{A_{k,1}}{(x-a_k)}+ \\
&+\frac{B_{1,m_1}x+C_{1,m_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}}+\frac{B_{1,m_1-1}x+C_{1,m_1-1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}}+\dots+\frac{B_{1,1}x+C_{1,1}}{(x^2+p_1x+q_1)}+ \\
&+\frac{B_{2,m_2}x+C_{2,m_2}}{(x^2+p_2x+q_2)^{m_2}}+\frac{B_{2,m_2-1}x+C_{2,m_2-1}}{(x^2+p_2x+q_2)^{m_2}}+\dots+\frac{B_{2,1}x+C_{2,1}}{(x^2+p_2x+q_2)}+ \\
&\dots \\
&+\frac{B_{l,m_l}x+C_{l,m_l}}{(x^2+p_lx+q_l)^{m_l}}+\frac{B_{l,m_l-1}x+C_{l,m_l-1}}{(x^2+p_lx+q_l)^{m_l}}+\dots+\frac{B_{l,1}x+C_{l,1}}{(x^2+p_lx+q_l)}.
\end{aligned}
$$

Zlomky na pravé straně předchozí rovnice nazýváme *parciální zlomky*.

V případě kdy neplatí $\deg f(x) < \deg g(x)$ je nutné nejprve polynomy $f(x)$ a $g(x)$ podělit se zbytkem (věta 3.1) a na zbytek a polynom $g(x)$ aplikovat větu 3.14.

Rozklad na parciální zlomky si vyzkoušíme na následujícím příkladu. Rozložte na součet parciálních zlomků:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^{10}+2x^9+3x^7+4x^6+x^4+2x^37x-1}{x^9+2x^6+x^3}.$$

Stupeň polynomu v čitateli není nižší než stupeň polynomu ve jmenovateli, proto nejprve použijeme větu 3.1 a polynomy se zbytkem podělíme. Dostaneme

$$\frac{f(x)}{g(x)}=x+2+\frac{x^7+7x-1}{x^9+2x^6+x^3}.$$

Nyní již můžeme racionální lomenou funkci v předchozím integrálu rozložit na parciální zlomky. Snadno se zjistí, že polynom $x^9+2x^6+x^3$ má trojnásobný kořen $x=0$ dvojnásobný kořen $x=-1$ a lze jej napsat ve tvaru $x^9+2x^6+x^3=x^3(x+1)^2(x^2-x+1)^2$. Podle věty 3.14 tedy existují čísla $A, B, C, D, E, M, N, P, R \in \mathbb{R}$ a platí

$$\frac{x^7+7x-1}{x^9+2x^6+x^3}=\frac{A}{x^3}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x}+\frac{D}{(x+1)^2}+\frac{E}{x+1}+\frac{Mx+N}{(x^2-x+1)^2}+\frac{Px+R}{x^2-x+1}.$$

Nyní musíme nalézt čísla $A, B, C, D, E, M, N, P, R$. Sečtením zlomků na pravé straně a porovnáním čitatelů (jmenovatelé se rovnají), dostáváme

$$
\begin{aligned}
x^7+7x-1 &= A(x+1)^2(x^2-x+1)^2+Bx(x+1)^2(x^2-x+1)^2+ \\
&\quad +Cx^2(x+1)^2(x^2-x+1)^2+Dx^3(x^2-x+1)^2+ \\
&\quad +Ex^3(x+1)(x^2-x+1)^2+Mx^3(x+1)^2(x^2-x+1)^2+ \\
&\quad +Nx^3(x+1)^2(x^2-x+1)^2+Px^3(x+1)^2+Rx^3(x+1)^2(x^2-x+1)= \\
&= Bx+Cx^2+Ex^3+A+Ax^6+2Ax^3+Bx^7+2Bx^4+Cx^8+2Cx^5+Dx^7- \\
&\quad -2Dx^6+3Dx^5-2Dx^4+Ex^8-Ex^7+Ex^6+Ex^5-Ex^4+Mx^6+2Mx^5+ \\
&\quad +Mx^4+Nx^5+2Nx^4+Nx^3+Px^5+Px^4+Rx^4+Rx^3+Px^8+Px^7+ \\
&\quad +Rx^7+Rx^6+Dx^3.
\end{aligned}
$$

Nyní porovnáme koeficienty u odpovídajících si mocnin. Tedy

$$\begin{aligned}
-1 &= A\\
7 &= B\\
0 &= C\\
0 &= E + 2A + D + N + R\\
0 &= 2N + 2B + R - 2D - E + M + P\\
0 &= 3D + 2M + N + E + 2C + P\\
0 &= E + M - 2D + A + R\\
1 &= D + B + P + R - E\\
0 &= E + P + C
\end{aligned}$$

Odtud dostáváme, že $A = -1$, $B = 7$, $C = 0$, $D = 1$, $E = \frac{31}{9}$, $M = -\frac{1}{3}$, $N = -\frac{7}{3}$, $P = -\frac{31}{9}$ a $R = -\frac{1}{9}$.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = x + 2 - \frac{1}{x^3} + \frac{7}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{31}{9(x+1)} - \frac{x+7}{3(x^2-x+1)^2} - \frac{31x+1}{9(x^2-x+1)}.$$

Literatura

[1] H. J. Bartsch, *Matematické vzorce*, Praha, SNTL, 1983.

[2] M. Krupka, M. Malek, *Matematická anlýza I,II*, Pomocný učební text, Slezská univerzita, Opava 2006.

[3] K. Rektorys a kol., *Přehled užité matematiky*, Prometheus, 1995