SLEZSKÁ UNIVERZITA V OPAVĚ
Matematický ústav v Opavě
Na Rybníčku 1, 746 01 Opava, tel. (553) 684 611
DENNÍ STUDIUM

ALGEBRA

Téma 2: Soustavy lineárních rovnic

1. Přehled tematiky

Základní pojmy

Soustava lineárních rovnic, matice soustavy, rozšířená matice soustavy, maticový zápis soustavy; řešení soustavy, parametry řešení.

Homogenní soustava, obecné řešení homogenní soustavy, obecné řešení nehomogenní soustavy, fundamentální systém řešení homogenní soustavy.

Základní tvrzení

Frobeniova věta, Cramerovo pravidlo, vlastnosti množiny řešení soustavy homogenních lineárních rovnic a soustavy nehomogenních lineárních rovnic.

Základní úlohy

Nalézt obecné řešení soustavy lineárních rovnic, rozhodnout o existenci a jednoznačnosti řešení.

Základní vzorce

Je-li A regulární, pak

$$Ax = b \Leftrightarrow x = A^{-1}b,$$

$$x_i = \frac{\det A_{(i)}}{\det A} \quad \text{(Cramerovo pravidlo).}$$

2. Cvičení

Kontrolní otázky

1. Buď dána soustava m rovnic o n neznámých. Jakého typu je matice soustavy resp. rozšířená matice soustavy?
2. Kolik řešení má soustava s rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

3. Kolik řešení má soustava rovnic s regulární maticí soustavy?
4. Může mít soustava n lineárních rovnic o $n+1$ neznámých
   (a) žádné řešení,
   (b) právě jedno řešení?
5. Může homogenní soustava nemít žádné řešení?
6. Může mít nehomogenní soustava lineárních rovnic nulové řešení?
7. Uveďte příklad soustavy rovnic se singulární maticí soustavy, která má
   (a) jediné řešení,
   (b) žádné řešení,
   (c) nekonečně mnoho řešení.
8. Jak se projevují řádkové úpravy rozšířené matice soustavy na řešení soustavy? (A sloupcové úpravy?)
9. Rozepište Cramerovo pravidlo pro soustavu
   $$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned}$$
   Kdy má tato soustava jediné řešení?
10. Jaké vlastnosti má množina všech řešení homogenní soustavy lineárních rovnic? Zdůvodněte.
11. Jak souvisí množina všech řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic s množinou všech řešení příslušné homogenní soustavy. Dokažte.
12. Definujte pojem fundamentálního systému řešení homogenní soustavy lineárních rovnic.
13. Co lze říci o řešení soustavy lineárních rovnic s racionálními koeficienty?
14. Jaká je nutná a postačující podmínka existence řešení soustavy lineárních rovnic?
15. Kdy existuje nenulové řešení homogenní soustavy lineárních rovnic?

Příklady

1. Řešte systémy lineárních rovnic:

   (a) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 &+& 5x_2 &+& 4x_3 &+& x_4 &=& 20 \\ x_1 &+& 3x_2 &+& 2x_3 &+& x_4 &=& 11 \\ 2x_1 &+& 10x_2 &+& 9x_3 &+& 7x_4 &=& 40 \\ 3x_1 &+& 8x_2 &+& 9x_3 &+& 2x_4 &=& 37 \end{array}$$

   (b) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x &-& 5y &+& 3z &+& t &=& 5 \\ 3x &-& 7y &+& 3z &-& t &=& -1 \\ 5x &-& 9y &+& 6z &+& 2t &=& 7 \\ 4x &-& 6y &+& 3z &+& t &=& 8 \end{array}$$

   (c) $$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 &+& x_2 &+& 4x_3 &+& 4x_4 &+& 9x_5 &=& -9 \\ 2x_1 &+& 2x_2 &+& 17x_3 &+& 17x_4 &+& 82x_5 &=& -146 \\ 2x_1 && &+& 3x_3 &-& x_4 &+& 4x_5 &=& -10 \\ && x_2 &+& 4x_3 &+& 12x_4 &+& 27x_5 &=& -26 \\ x_1 &+& 2x_2 &+& 2x_3 &+& 10x_4 && &=& 37 \end{array}$$

   (d) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 &+& 7x_2 &+& 3x_3 &-& x_4 &=& 5 \\ x_1 &+& 3x_2 &+& 5x_3 &-& 2x_4 &=& 3 \\ x_1 &+& 5x_2 &-& 9x_3 &+& 8x_4 &=& 1 \\ 5x_1 &+& 18x_2 &+& 4x_3 &+& 5x_4 &=& 12 \end{array}$$

   (e) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} 4x_1 &-& 3x_2 &+& 2x_3 &-& x_4 &=& 8 \\ 3x_1 &-& 2x_2 &+& x_3 &-& 3x_4 &=& 7 \\ 2x_1 &-& x_2 && &-& 5x_4 &=& 6 \\ 5x_1 &-& 3x_2 &+& x_3 &-& 8x_4 &=& 1 \end{array}$$

(f)
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} -x & + & y & + & z & + & t & = & a \\ x & - & y & + & z & + & t & = & b \\ x & + & y & - & z & + & t & = & c \\ x & + & y & + & z & - & t & = & d \end{array}$$

(g)
$$\begin{array}{rcrcr} 7x_1 & + & 3x_2 & = & 2 \\ x_1 & - & 2x_2 & = & -3 \\ 4x_1 & + & 9x_2 & = & 11 \end{array}$$

2. Určete obecné řešení systému lineárních rovnic a nalezněte jeho fundamentální systém řešení:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 3x_1 & + & x_2 & - & 8x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & - & 7x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 11x_2 & - & 12x_3 & + & 34x_4 & - & 5x_5 & = & 0 \\ x_1 & - & 5x_2 & + & 2x_3 & - & 16x_4 & + & 3x_5 & = & 0 \end{array}$$

3. Rozhodněte, pro která α je řešitelná soustava

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & \alpha \end{array}$$

a soustavu vyřešte.

4. Řešte soustavu lineárních rovnic s obecnými koeficienty:

$$\begin{array}{rcrcrcl} ax_1 & + & ax_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ ax_1 & + & 2x_2 & + & ax_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & ax_2 & + & ax_3 & = & 1 \end{array}$$

Návod: Pro ty hodnoty a, pro něž je determinant matice soustavy roven nule, použijte Gaussovy eliminace, pro ostatní použijte Cramerovo pravidlo.

5. Řešte soustavu s parametrem α:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x & + & 5y & + & 2z & + & 7u & + & 9v & = & 1 \\ x & + & 7y & + & 3z & + & 10u & + & 13v & = & \alpha \\ \alpha x & + & 2y & + & 4z & + & 6u & + & 10v & = & 0 \end{array}$$

Návod: Vyberte regulární submatici.

6. Řešte soustavu s neznámými x, y, z.

(a)
$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha x & + & \beta y & + & z & = & 0 \\ \alpha x & + & y & + & \beta z & = & 0 \\ x & + & \alpha y & + & \beta z & = & 0 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & y & + & z & = & p \\ x & + & ay & + & z & = & q \\ x & + & y & + & az & = & r \end{array}$$

7. Řešte soustavu rovnic jako maticovou rovnici

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & - & 6x_4 & = & 0 \\ 7x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 1 \\ 6x_1 & + & 5x_2 & - & 13x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 13x_2 & + & 40x_3 & - & 16x_4 & = & 13 \end{array}$$

8. Řešte maticové rovnice

(a) $X \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 11 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Dokažte Frobeniovu větu v tomto znění: Buď dána soustava m lineárních rovnic o n neznámých, buď r resp. r' hodnost matice soustavy resp. rozšířené matice soustavy. Pak

   (a) Soustava má alespoň jedno řešení $\Leftrightarrow r = r'$;

   (b) Je-li $r = r'$, pak obecné řešení soustavy závisí na $n - r$ nezávislých parametrech.

   Návod:

   (a) Má-li soustava řešení, pak je poslední sloupec rozšířené matice soustavy lineární kombinací sloupců předcházejících.

   (b) Nejdříve ukažte, že pro $n = r$ má soustava regulární matici a proto jediné řešení (0 parametrů). Potom zkoumejte případy $r < n$.

10. Dokažte Cramerovo pravidlo $x_i = \det A_{(i)} / \det A$, kde

$$A_{(i)} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & ai - 1^1 & b^1 & a_{i+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ & \cdots & & & & \cdots & \\ a_1^m & \cdots & a_{i-1}^m & b^m & a_{i+1}^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}.$$

   Návod: Porovnejte vztah $x = A^{-1}b = \widehat{A}^{\top} b / \det A$ s Laplaceovým rozvojem determinantu $\det A_{(i)}$ podle i-tého sloupce.

11. Homogenní soustava rovnic má fundamentální systém řešení tvaru $\{(1, 1, 1, 1, 1), (2, -1, 3, 0, 1), (3, -1, 0, 0, -1)\}$.

   (a) Rozhodněte, zda $(2, 3, 1, 1, -1)$ je řešením této soustavy.

   (b) Kolik lineárně nezávislých rovnic a kolik neznámých musí mít soustava rovnic, aby matice $(1, 1, 1, 1, 1)$, $(2, -1, 3, 0, 1)$, $(3, -1, 0, 0, -1)$ tvořily fundamentální systém řešení? Napište takovou soustavu rovnic. Je určena jednoznačně? Zdůvodněte.

12. Nehomogenní soustava lineárních rovnic má partikulární řešení $(2, 1, 1, -1, 0)$ a fundamentální systém řešení její homogenizované soustavy je tvaru $\{(3, 0, 1, 1, 1), (0, 3, 1, 1, 1)\}$.

   (a) Kolik nezávislých rovnic o kolika neznámých má taková soustava? Je určena jednoznačně? Zdůvodněte. Napište takovou soustavu rovnic.

   (b) Je $(1, 1, 1, 1, 1)$ řešením této soustavy?

13. Nechť $(0, 2, 0, 0)$, $(1, 1, -1, -1)$ jsou dvě partikulární řešení jisté soustavy nehomogenních lineárních rovnic. Rozhodněte, zda $\{(1, 1, 1, 1), (2, 0, 1, -1)\}$ může být fundamentálním systémem řešení příslušné homogenní soustavy. Zdůvodněte.

14. Napište alespoň tři různé systémy lineárních rovnic, které mají jediné řešení, a to $(1, 1, 1, 1, 1)$.

3. Zápočtové příklady

1. Rozhodněte, pro která α, β je řešitelná soustava

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x & + & y & + & z & + & 3u & + & 3v & = & \alpha \\ 3x & + & 2y & + & z & + & 5u & + & 4v & = & \beta \\ 3x & - & y & + & 4z & + & 2u & + & 7v & = & \beta \\ & & 2x & + & 4y & - & 2z & + & 6u & = & 0 \end{array}$$

   a soustavu vyřešte. Vyšetřete přitom všechny možnosti výběru volných neznámých (parametrů).

2. Řešte soustavy s neznámými x, y, z:

$$\begin{array}{rcrcrcl} (\alpha+1)x & + & 2y & + & 3z & = & 6 \\ x & + & (\alpha+2)y & + & 3z & = & 6 \\ x & + & 2y & + & (\alpha+3)z & = & 6 \end{array}$$

3. Nalezněte všechny hodnoty parametrů α, β, pro něž má soustava

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} & & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ \alpha x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ \beta x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}$$

   nenulové řešení. Určete fundamentální systém řešení pro každou nalezenou hodnotu parametrů.

4. Buď dána soustava n rovnic o n neznámých. Pak jsou následující tři výroky ekvivalentní:
   (a) soustava má řešení pro všechny pravé strany;
   (b) soustava má právě jedno řešení pro všechny pravé strany;
   (c) příslušná homogenní soustava má pouze nulové řešení.

   Dokažte.

5. Napište soustavu homogenních lineárních rovnic, jejíž fundamentální systém řešením má tvar $\{(3, 2, 0, 0, 3), (1, 1, 2, 3, -1)\}$.

6. Napište soustavu nehomogenních lineárních rovnic, jejímž partikulárním řešením je $(3, 2, 1, 1)$, a jejíž homogenizovaná soustava má fundamentální systém řešení $\{(-1, 1, 1, 1), (0, 1, -3, 2)\}$.

7. Rozhodněte, zda $(2, 1, 1, -2, 0)$ je řešením nehomogenní soustavy lineárních rovnic, znáte-li partikulární řešení $(1, 1, 1, 1, 1)$ a množina $\{(3, 0, 4, 5, -3), (1, 2, 0, 0, -1), (1, 1, 1, 2, -1)\}$ je fundamentální systém řešení homogenizované soustavy.