2. Systémy lineárních rovnic

V této kapitole se budeme zabývat soustavami lineárních rovnic s koeficienty z pole reálných případně komplexních čísel. Uvádíme podmínku pro existenci řešení systému lineárních rovnic. Dále zkoumáme metody jejich řešení, a strukturu množiny jejich řešení.

Nechť tedy máme přirozená čísla n, k pod pojmem *systém lineárních rovnic* rozumíme rovnice ve tvaru

$$\begin{array}{rcl} a_1^1x^1 + a_2^1x^2 + \cdots + a_n^1x^n &=& b^1 \\ a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + \cdots + a_n^2x^n &=& b^2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & .. \\ a_1^kx^1 + a_2^kx^2 + \cdots + a_n^kx^n &=& b^k \end{array}$$

matici $A = (a_j^i)$ říkáme *matice koeficientů* (zjednodušeně *koeficienty*) a vektoru $b = (b^i)$ říkáme *vektor pravé strany* (*pravá strana*). Maticově zapisujeme systém lineárních rovnic

$$Ax = b.$$

Pokud jsou $b^1 = b^2 = \cdots = b^k = 0$, mluvíme o *homogenním systému lineárních rovnic* (případně pouze o *homogenním systému*) v opačném případě o *nehomogenním systému*. Matici

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 & b^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 & b^2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_1^k & a_2^k & \cdots & a_n^k & b^k \end{array}\right)$$

nazýváme *rozšířenou maticí systému lineárních rovnic* (zkráceně označujeme $(A|b)$). *Řešením* takového systému rovnic rozumíme vektor $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)^\top$ splňující

$$Ax_0 = b. \tag{2.1}$$

Množinu všech vektorů x_0 splňujících (2.1) nazýváme *obecné řešení* systému. Dvěma systémům lineárních rovnic $Ax = b$ a $A'x = b'$ jsou *ekvivalentní* jestliže mají stejné obecné řešení.

Následující dva systémy mají stejné obecné řešení (jsou ekvivalentní)

$$x^1 + 2x^2 + 3x^3 = 4 \qquad \begin{array}{rcl} 2x^1 + 4x^2 + 6x^3 &=& 8 \\ 4x^1 + 8x^2 + 12x^3 &=& 16. \end{array}$$

Věta 2.1. *Ekvivalentními řádkovými úpravami rozšířené matice systému $(A|b)$ se nemění množina řešení.*

D ů k a z. Mějme lineární soustavu $Ax = b$, provedené elementární úpravě odpovídá regulární matice U, kterou se původní matice po vynásobení zleva původní matice transformuje na matici po elementární úpravě. Tedy $(A|b) \sim U(A|b) = (UA|Ub)$. Je-li x_0 řešením systému $(A|b)$, máme $Ax_0 = b$. Dosadíme-li toto řešení do systému $(UA|Ub)$, máme

$$(UA)x_0 = Ub.$$

Vynásobíme zleva maticí U^{-1} a využijeme asociativity násobení matic.

$$\begin{aligned} U^{-1}(UA)x &= U^{-1}(Ub) \\ (U^{-1}U)Ax &= (U^{-1}U)b \\ Ax &= b \end{aligned}$$

Důkaz opačným směrem probíhá obdobně.

2.1 Frobeniova věta. Následující věta je jedním z nejdůležitějších nástrojů v této kapitole, neboť dává nutnou a postačující podmínku existence řešení systému lineárních rovnic.

Věta 2.2 (Frobeniova věta). *Systém lineárních rovnic má řešení tehdy a jen tehdy, jestliže matice systému rovnic má stejnou hodnost jako matice rozšířeného systému, tedy*

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A|b).$$

D ů k a z. Upravíme matici rozšířeného systému na schodovitý tvar, který si označíme $(A'|b')$.

Pokud by hodnost A' byla l a hodnost $(A'|b')$ byla $l+m$, pak pro řádek $l+m$ bychom dostali

$$a_1'^{l+m}x^1 + a_2'^{l+m}x^2 + \cdots + a_n'^{l+m}x^n = b'^{l+m}$$

kde $a_1'^{l+m}x^1 = a_2'^{l+m} = \cdots = a_n'^{l+m} = 0$ a $b^{l+m} \neq 0$. Tedy tato rovnice řešení mít nemůže.

Pokud tedy jsou si hodnosti A a $(A|b)$ rovny, jsou si rovny i hodnosti A' a $(A'|b')$. Neboť $(A'|b')$ je ve schodovitém tvaru poslední nenulový řádek (vzato shora) odpovídá rovnici

$$a_k'^p x^k + a_{k+1}'^p x^{k+1} + \cdots + a_n'^p x^n = b'^p.$$

Hodnoty $x^{k+1}, \dots, x^n$ volíme libovolně a x^k snadno dopočítáme. O řádek výš máme

$$a_l'^{p-1}x^l + a_{l+1}'^{p-1}x^{l+1} + \cdots + a_{l+r}'^{p-1}x^{l+r} + a_k'^{p-1}x^k + a_{k+1}'^{p-1}x^{k+1} + \cdots + a_n'^{p-1}x^n = b'^{p-1}.$$

Hodnoty $x^{l+1}, \cdots, x^{l+r}$ volíme libovolně, hodnoty $x^k, \dots, x^n$ už máme zvoleny či vypočteny z předchozího kroku. Nyní můžeme vypočítat hodnotu x^l. A pokračujeme k přecházejícímu řádku. Tímto způsobem postupně nalezneme kýžené řešení.

Důsledkem předchozí věty je následující tvrzení.

Věta 2.3. *Homogenní systém lineárních rovnic má vždy řešení.*

Není obtížné ověřit, že homogenní systém má alespoň nulové řešení.

2.2 Cramerovské systémy. Systém $Ax = b$ se nazývá *cramerovský*, jestliže A je čtvercová regulární matice.

Opět jednoduchým důsledkem Frobeniovy věty dostáváme

Věta 2.4. *Každý cramerovský systém má právě jedno řešení.*

Metody řešení cramerovského systému

$$Ax = b. \tag{2.2}$$

— **Gausovou eliminací.** Matici rozšířeného systému $(A|b)$ upravíme na schodovitý tvar.

Gausova eliminační metoda je nejobecnějším postupem řešení rovnic. Výhodnou se stává pro větší systémy, kde ostatní metody potřebují pro vyřešení nesrovnatelně větší počet aritmetických operací.

— **Inverzní maticí.** Nalezneme inverzní matici A^{-1}.

Mějme cramerovský systém (2.2). Vynásobíme rovnici (2.2) maticí A^{-1} zleva a dostaneme

$$\begin{aligned} A^{-1}Ax &= A^{-1}b \\ x &= A^{-1}b. \end{aligned}$$

Tato metoda je velice výhodná, potřebujeme-li řešit soustavu (2.2) pro různé pravé strany. Najdeme inverzní matici A^{-1} a pak prostým vynásobením A^{-1} a vektorů pravých stran dostáváme příslušná řešení.

— Cramerovo pravidlo

Mějme cramerovský systém (2.2), označme si A_i matici A v níž je i-tý sloupec nahrazen vektorem b, potom

$$x^i = \frac{\det A_i}{\det A}. \tag{2.3}$$

Cramerovo pravidlo, nejčastěji používáme pro systémy s nízkým počtem neznámých. Například pro dvě rovnice o dvou neznámých dostáváme řešení skutečně okamžitě.

2.3 Systémy homogenních rovnic. Uvažujme systém lineárních rovnic s nulovou pravou stranou

$$Ax = 0. \tag{2.4}$$

Věta 2.5. *Libovolná lineární kombinace řešení systému (2.4) je opět řešením tohoto systému.*
D ů k a z. Nechť x_1, x_2 jsou dvě řešení systému (2.4) a $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Máme

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2 = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 = 0.$$

Právě jsme dokázali, že lineární kombinace $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ je řešením našeho systému.

Fundamentální systém je taková množina řešení systému homogenních rovnic, která je lineárně nezávislá a každé jiné řešení lze vyjádřit jako lineární kombinace řešení z této množiny.

Věta 2.6. *Fundamentální systém řešení systému k nezávislých homogenních rovnic pro n neznámých má $n-k$ prvků (počet parametrů).*
D ů k a z. Evidentně $n \geq k$, jinak by matice systému nemohla mít maximální hodnost. Upravíme-li matici systéme na schodovitý tvar dostaneme právě $n-k$ proměnných jako parametry. Za ně volíme nezávislé vektory parametrů (například $(1,0,0,\dots,0)^\top, (0,1,0,\dots,0)^\top, \dots (0,0,\dots,0,1)^\top$) ostatní neznáme dopočítáme.

Později se ukáže, že právě uvedená věta říká, že obecné řešení tvoří vektorový prostor dimenze $n-k$ a fundamentální systém řešení je jeho báze.

Řešme soustavu

$$\begin{aligned} x^1 + 2x^2 - x^3 + x^4 - 5x^5 &= 0 \\ -2x^1 - 4x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 4x^5 &= 0 \\ -x^1 - 2x^2 + x^3 + 5x^4 - x^5 &= 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Převedeme matici systému do schodovitého tvaru.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -5 \\ -2 & -4 & 2 & 4 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poslední matici v předchozím řádku si označíme B. Vidíme, že matice A má hodnost $k = 2$. Počet neznámých je $n = 5$. Počet parametrů je tedy $n-k = 3$. Za parametry si vybereme proměnné x^2, x^3 a x^5. Postupně položíme $(x^2, x^3, x^5)^\top$ rovno $(1,0,0)^\top$, $(0,1,0)^\top$ a $(0,0,1)^\top$. Pro tyto volby z rovnice $Bx = 0$ vypočítáme zbývající neznámé.

Například pro volbu parametrů $(x^2, x^3, x^5)^\top = (1,0,0)^\top$ dostáváme

$$\begin{aligned} 1x^1 + 2\cdot 1 - 1\cdot 0 + x^4 - 5\cdot 0 &= 0\\ 0\cdot 1 + 0\cdot 0 + x^4 - 1\cdot 0 &= 0\\ 0\cdot 1 + 0\cdot 0 \qquad + 0\cdot 0 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1x^1 + x^4 &= -2\\ x^4 &= 0. \end{aligned}$$

Odtud $x^4 = 0$ a $x^1 = -2$. Prvním prvkem fundamentálního systému řešení je $(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5)^\top = (-2, 1, 0, 0, 0)^\top$. Stejným postupem pro volby parametrů $(x^2, x^3, x^5)^\top = (0, 1, 0)^\top$ a $(0, 0, 1)^\top$ dostáváme další dva prvky fundamentálního systému řešení. Celkově tento systém vypadá následovně

$$\{(-2, 1, 0, 0, 0)^\top, (1, 0, 1, 0, 0)^\top, (4, 0, 0, 1, 1)^\top\}. \tag{2.6}$$

Každé řešení soustavy (2.5) je tedy lineární kombinací prvků z množiny (2.6).

2.4 Nehomogenní lineární systémy. Jak vypadají všechna řešení homogenního systému, již víme z předchozího odstavce. Jak ale tyto znalosti zúročit v případě, že máme nalézt všechna řešení nehomogenního systému.

Uvažujme obecné soustavu lineárních rovnic

$$Ax = b. \qquad \text{(obecný lineární systém)} \tag{2.7}$$

Dále uvažujme tentýž systém avšak s nulovou pravou stranou

$$Ax = 0. \qquad (\textit{homogenizovaný systém}) \tag{2.8}$$

Věta 2.7. *Je-li vektor x_p řešením systému (2.7) a vektor x_0 řešením systému (2.8), potom je $x_0 + x_p$ řešením (2.7).*

D ů k a z. Postupujeme přímo, ověříme, že pro vektor $x_0 + x_p$ je splněna (2.7). Nechť tedy x_p splňuje (2.7) a vektor x_0 splňuje (2.8). Dosaďme $x_0 + x_p$ do levé strany (2.7). Platí

$$A(x_0 + x_p) = Ax_0 + Ax_p = 0 + b = b.$$

Tedy $x_0 + x_p$ je tedy řešením (2.7).

Věta 2.8. *Nechť x_p je nějaké pevně zvolené řešení obecného lineárního systému. Potom každé řešení x obecného lineárního systému lze psát ve tvaru $x = x_0 + x_p$, kde x_0 je řešením homogenizovaného systému.*

D ů k a z. Mějme tedy x_p pevně zvolené řešení (2.7). Zvolme x libovolné řešení (2.7), nyní položíme $x_0 = x - x_p$ a ověříme, že se jedná o řešení homogenizovaného systému. Máme

$$Ax_0 = A(x - x_p) = Ax - Ax_p = b - b = 0.$$

Řešení x_p z předchozích dvou vět se nazývá *partikulární řešení* systému lineárních rovnic. Tedy větu 2.8 by bylo možno zformulovat: Každé řešení systému lineárních rovnic lze psát ve tvaru součtu partikulárního řešení tohoto systému a řešení jejího homogenizovaného systému.

Ještě jinak: Obecné řešení systému lineárních rovnic je součtem nějakého partikulárního řešení tohoto systému a obecného řešení příslušného homogenizovaného systému.

Najděme obecné řešení soustavy nehomogenních rovnic

$$\begin{aligned} x^1 + 2x^2 - x^3 + x^4 - 5x^5 &= 1 \\ -2x^1 - 4x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 4x^5 &= 2 \\ -x^1 - 2x^2 + x^3 + 5x^4 - x^5 &= 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Homogenizovaný systém jsme již řešili viz 2.5. Dospěli jsme k fundamentálnímu systému řešení 2.6. Proto stačí nyní již jen najít partikulární řešení 2.9 (tedy jedno řešení zmíněné soustavy). Rozšířenou matici našeho systému upravíme na schodovitý tvar

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 & -5 & 1 \\ -2 & -4 & 2 & 4 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Jelikož hodnost matice rozšířeného systému je rovna 2 stejně jako hodnost matice systému má systém řešení. Za x^5 volíme například 1, z druhé rovnice dopočítáme, že $x^4 = 1$. Za x^2 a x^3 volíme 0 a dopočítáme $x^1 = 5$. Partikulární řešení je tedy

$$x_p = (5, 0, 0, 1, 1)^\top.$$

Obecné řešení systému (2.9) je podle věty 2.8 součtem obecného řešení homogenizovaného systému a partikulárního řešení. Tedy každé řešení x systému (2.9) je tvaru

$$x = (5, 0, 0, 1, 1)^\top + \alpha_1(-2, 1, 0, 0, 0)^\top + \alpha_2(1, 0, 1, 0, 0)^\top + \alpha_3(4, 0, 0, 1, 1)^\top$$

pro nějaká čísla $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Reference

[1]