SLEZSKÁ UNIVERZITA V OPAVĚ
Matematický ústav v Opavě
Na Rybníčku 1, 746 01 Opava, tel. (553) 684 611
DENNÍ STUDIUM

ALGEBRA

Téma 1: Matice a determinanty

1. Přehled základních pojmů a tvrzení

Základní pojmy

Číselná matice A typu m/n, hlavní diagonála; schodovitá, diagonální matice; nulová matice 0, jednotková matice E; matice opačná $-A$, komplexně sdružená $\bar{A}$, transponovaná $A^\top$; matice symetrická, antisymetrická; operace s maticemi (součet matic, násobek matice číslem, součin matic).

Lineární kombinace řádků a sloupců, elementární úpravy matice, hodnost matice (rank A), defekt.

Permutace sudá, lichá, identická, inverzní; determinant matice (det A nebo $|A|$), minor (subdeterminant); regulární, singulární matice; matice algebraických doplňků $\widehat{A}$, inverzní matice A^{-1}.

Základní tvrzení

Pravidla pro počítání s maticemi, věta o převodu matice na schodovitý tvar, (Gaussova eliminace), věty o hodnosti matice; vlastnosti determinantů, věta o součinu determinantů, Laplaceova věta o rozvoji determinantu; věta o existenci inverzní matice.

Základní úlohy

Operace s maticemi, výpočet hodnosti matice, výpočet determinantu (Laplaceovým rozvojem, Gaussovou eliminací; Sarrusovo pravidlo), výpočet inverzní matice (pomocí elementárních úprav, pomocí matice algebraických doplňků).

Přehled vzorců

Kroneckerův symbol:

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Levi-Civittův symbol:

$$\varepsilon_{i_1\dots i_n} = \varepsilon^{i_1\dots i_n} = \begin{cases} 1, & \text{permutace } (i_1,\dots,i_n) \text{ je sudá}, \\ -1, & \text{permutace } (i_1,\dots,i_n) \text{ je lichá}, \\ 0, & \text{alespoň dva indexy } i_1,\dots,i_n) \text{ jsou stejné}. \end{cases}$$

Je-li $A = (a^i_j)$, $B = (b^i_j)$, $C = (c^i_j) = A + B$, $D = (d^i_j) = A \cdot B$, pak

$$c^i_j = a^i_j + b^i_j, \qquad d^i_j = a^i_k b^k_j, \qquad E = (\delta^i_j).$$

Jsou-li A, B, C takové matice, že naznačené operace mají smysl, pak

1. $A + B = B + A,\ A + (B + C) = (A + B) + C,\ A + 0 = A,\ A + (-A) = 0,$
2. $A(BC) = (AB)C,\ AE = EA = A,\ AA^{-1} = A^{-1}A = E,$

3. $A(B+C) = AB + AC,\ (A+B)C = AC + BC,$
4. $(A+B)^\top = A^\top + B^\top,\ (A^\top)^\top = A,\ (AB)^\top = B^\top A^\top,$
5. $\det A = \sum_\sigma (-1)^{|\sigma|} a_1^{\sigma(1)} \dots a_n^{\sigma(n)} = \varepsilon_{i_1 \dots i_n} a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n} = \varepsilon^{i_1 \dots i_n} a_{i_1}^1 \dots a_{i_n}^n$
6. $\det(AB) = \det(BA) = \det A \cdot \det B$
7. $\det A = \det A^\top$
8. $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \widehat{A}^\top$
9. $(A^{-1})^{-1} = A$
10. $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
11. $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$
12. $\det \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix} = a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2$
13. $\det \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix} = a_1^1 a_2^2 a_3^3 + a_1^2 a_2^3 a_3^1 + a_1^3 a_2^1 a_3^2 - a_3^1 a_2^2 a_1^3 - a_3^2 a_2^3 a_1^1 - a_3^3 a_2^1 a_1^2$
14. $\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2} \begin{pmatrix} a_2^2 & -a_2^1 \\ -a_1^2 & a_1^1 \end{pmatrix}$

Úmluva

Při zápisu prvků matic ve tvaru a_j^i je horní index řádkový (udává číslo řádku) a dolní index sloupcový.

Při zápisu prvků matic ve tvaru $a_{i\,j}$ je první index řádkový a druhý index sloupcový.

Doporučená literatura

J. Musilová, D. Krupka, Lineární a multilineární algebra, Skriptum UJEP Brno; SPN, Praha, 1989

L. Bican, Lineární algebra, SNTL Praha, 1979

A.G. Kuroš, Kurs vysšej algebry, Nauka, Moskva, 1968

G.L. Bradley, A Primer of Linear Algebra, Prentice-Hall, New Jersey, 1975

H. Anton, Elementary Linear Algebra, John Willey & Sons, New York, 1984

I.V. Proskurjakov, Sbornik zadač po linějnoj algebre, Nauka, Moskva, 1978.

2. Cvičení

Kontrolní otázky

1. Buďte dány matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3+2i \\ i & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i & -2 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(a) vypište jejich hlavní diagonály, (b) nalezněte matice opačné, matice komplexně sdružené, matice transponované.

2. Rozhodněte, které z matic

$$\begin{pmatrix} 1+2i & 3-2i & i \\ 3-2i & -1 & 2 \\ i & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3i \\ -2 & 1 & 1 \\ 3i & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3i \\ -2 & 0 & 1 \\ 3i & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

jsou symetrické resp. antisymetrické.

3. Mají pojmy symetrická, antisymetrická matice smysl pro matice typu m/n, kde $m \neq n$?
4. Jaký nejmenší výběr prvků a_i^j určuje jednoznačně symetrickou (resp. antisymetrickou) matici A typu n/n?
5. Určete, pro které dvojice z následujících matic je definován součet resp. součin resp. součin v obou pořadích:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2+i \\ -3 & 3 & 3i & 0 \\ 3-i & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

6. Jakého typu musí být matice A, B, aby je bylo možno sečíst, vynásobit, resp. vynásobit v obou pořadích?
7. Je sčítání resp. násobení matic komutativní? Je sčítání resp. násobení matic asociativní? Je násobení matic distributivní vzhledem ke sčítání? Napište odpovídající formule.
8. Jaký je vztah mezi maticemi $\bar{A}^\top$ a $\overline{A^\top}$?
9. Napište pro následující matice lineární kombinaci 1., 2. a 3. řádku s koeficienty $i, -i, 1$ resp. 2., 3. a 4. sloupce s koeficienty $2, 0, -1$:

$$\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & i \end{pmatrix} \text{ resp. } \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_1^4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_2^4 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_3^4 \end{pmatrix}.$$

10. Vyjmenujte elementární úpravy matic.
11. Jsou matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ve schodovitém tvaru?

12. Uveďte příklad matice ve schodovitém tvaru, která není diagonální. Uveďte příklad diagonální matice, která není ve schodovitém tvaru.
13. Čemu je rovna hodnost matice ve schodovitém tvaru?
14. (a) Mění se elementárními úpravami počet lineárně nezávislých řádků (resp. sloupců) matice?
    (b) Mění se elementárními úpravami hodnost matice?
15. Je nějaký vztah mezi počtem lineárně nezávislých řádků matice a počtem jejích lineárně nezávislých sloupců?
16. Určete zpaměti hodnost následujících matic:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ r & s & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

17. Jaký je vztah mezi hodností matice A a matice k ní transponované?
18. Co lze říci o hodnosti čtvercové matice A, pro niž $\det A \neq 0$?
19. Jsou elementární matice regulární nebo singulární?
20. Vypište všechny permutace na množině $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$. Kolik je permutací na množině $\{1, 2, \ldots, n\}$?
21. Má identická permutace sudou nebo lichou paritu?
22. Které elementární úpravy nemění resp. mění determinant matice a jak?
23. Jak se změní determinant matice A, jestliže
    (a) zaměníme dva řádky (sloupce),
    (b) matici transponujeme,
24. Čemu je roven determinant matice,
    (a) která má jeden řádek (sloupec) nulový,
    (b) která má dva řádky (sloupce) stejné,
    (c) $\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ 0 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ & & \cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$
25. Jak je definována inverzní matice? Pro které matice existuje?

Příklady

1. Vypočtěte: (a) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$,
(c) $\begin{pmatrix} 5 & 7 & -3 & -4 \\ 7 & 6 & -4 & -5 \\ 6 & 4 & -3 & -2 \\ 8 & 5 & -6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -123 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

   Výsledky: (a) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -5 & -10 \\ 7 & 7 & 7 & 7 \\ 10 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$,
(d) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Vypočtěte: (a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3$, (b) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^5$.

   Výsledky: (a) $\begin{pmatrix} 13 & -14 \\ 21 & -22 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 304 & -61 \\ 305 & -62 \end{pmatrix}$.

3. Dokažte, že
$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.$$
   Návod: Matematickou indukcí.

4. Spočtěte
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^3$$

5. Zapište ve sčítací symbolice tyto vztahy a výrazy:
   (a) $\alpha^1 e_1 + \alpha^2 e_2 + \cdots + \alpha^n e_n$,
   (b) $\beta^i = \gamma^1 a^i_1 + \gamma^2 a^i_2 + \cdots + \gamma^n a^i_n$,
   (c) $c^1_1 = a^1_1 b^1_1 + a^2_1 b^1_2 + \cdots + a^n_1 b^1_n$,
   $c^1_2 = a^1_2 b^1_1 + a^2_2 b^1_2 + \cdots + a^n_2 b^1_n$,
   $\ldots$
   $c^1_n = a^1_n b^1_1 + a^2_n b^1_2 + \cdots + a^n_n b^1_n$,

   (d) $a^1_1 b^1_1 + a^1_2 b^2_1 = 1$, $\quad a^1_1 b^1_2 + a^1_2 b^2_2 = 0$
   $a^2_1 b^1_1 + a^2_2 b^2_1 = 0$, $\quad a^2_1 b^1_2 + a^2_2 b^2_2 = 1$

6. Rozepište jako součty (sčítá se od 1 do n): $\xi^i e_i,\ a_{ik}\xi^k = b_i,\ a^i_k b^k_j = \delta^i_j,\ g_{ij} e^i e^j,\ F^{ij} F_{ij},\ t_{ik} = a^p_i a^q_k t_{pq}$.

7. Rozepište následující vztahy mezi maticemi pomocí jejich prvků (užijte sčítací symboliku): $A = A^\top,\ A = -A^\top,\ A = B,\ C = \alpha A,\ C = A + B,\ C = AB,\ AB = E,\ AB = BA,\ C = AB^\top,\ C = A^\top B^\top$.

8. Zapište následující vztahy v maticovém tvaru:
   (a) $c^i_j = a^i_j + b^i_j,\ c^i_j = \alpha a^i_j + \beta b^i_j,\ c^i_j = a^j_i,\ c^i_j = a^i_k b^k_j,\ c^i_j = a^k_j b^i_k,\ c^i_j = a^k_j b^i_k,\ c^i_j = \delta^i_j,\ a^i_k b^k_j = \delta^i_j,\ a^i_j + a^j_i = 0$, kde $1 \le i \le n,\ 1 \le j \le n$.
   (b) $c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj},\ c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{jk},\ c_{ij} = \sum_k a_{ki} b_{jk}$,

9. Dokažte, že platí základní vzorce (1)–(3). Pojmenujte zákony, které vyjadřují.

10. Buď N taková matice, že pro libovolnou matici A stejného typu platí $A + N = A$. Dokažte, že N je nutně nulová matice
    Návod: Položte $A = 0$.

11. Buď M taková čtvercová matice, že pro libovolnou matici A stejného typu platí $AM = A$. Dokažte, že M je nutně jednotková matice.
12. Uveďte příklad dvou matic A, B, pro které $AB = BA$ a příklad dvou matic A, B, pro které $AB \neq BA$.
13. Dokažte, že platí základní vzorce (4).
14. Nechť A je čtvercová matice.

    (a) Dokažte, že matice $A + A^\top$ je symetrická a matice $A - A^\top$ je antisymetrická.

    (b) Dokažte, že každou čtvercovou matici lze zapsat jednoznačně ve tvaru součtu symetrické a antisymetrické matice.

    Návod: (a) Využijte základních vzorců.
    (b) $A = \frac{1}{2}(A + A^\top) + \frac{1}{2}(A - A^\top)$. Jednoznačnost: Nechť platí $A = M + N$, kde M je symetrická a N je antisymetrická matice. Vypočtěte $\frac{1}{2}(A + A^\top)$ a $\frac{1}{2}(A - A^\top)$.
15. Rozložte následující matice na součet symetrické a antisymetrické matice:

    (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2i \\ -2i & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 3-2i & 0 & 0 & 3+2i \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2i & 1 & -3 \end{pmatrix}$.
16. Buďte A, B dvě symetrické matice. Ukažte, že

    (a) $A + B$

    (b) $AB + BA$

    jsou symetrické matice.
    Návod: Užijte základních vzorců.
17. Nechť A, B jsou čtvercové matice řádu n. Upravte $(A + B)^2$, $(A + B)(A - B)$.
    Jakou podmínku musí splňovat matice A, B, aby platilo $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ a $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$?
18. Dokažte nebo vyvraťte: Pro každé dvě symetrické matice A, B platí

    (a) AB je symetrická matice;

    (b) $AB = BA$.

    Návod: Ověřujte na příkladech. Pokud nenaleznete protipříklad, pokuste se tvrzení dokázat.
19. Určete hodnost následujících matic pomocí Gaussovy eliminační metody i metodou vroubení:

    $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

    Výsledky: 2, 3.
20. Určete λ tak, aby matice

    $$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

    měla minimální hodnost.
    Návod: Nejdříve elementárními úpravami přesuňte λ do pravého dolního rohu.
    Výsledek: Pro $\lambda = 0$ je hodnost dané matice rovna 2; pro $\lambda \neq 0$ je rovna 3.
21. Jak lze pomocí konečného počtu elementárních úprav vyjádřit záměnu i-tého a j-tého řádku (resp. sloupce) matice?
22. Jak se změní součin AB matic A, B, jestliže

    (a) zaměníme i-tý a j-tý řádek matice A,

    (b) k i-tému řádku matice A přičteme j-tý řádek vynásobený číslem c,

    (c) zaměníme i-tý a j-tý sloupec matice B,

    (d) k i-tému sloupci matice B přičteme j-tý sloupec vynásobený číslem c.

Dokažte.

23. Dokažte, že hodnost součinu AB matic A, B není větší než hodnost každé z matic A, B (tj. rank $AB \le$ min{rank A, rank B}.

    Návod: Ukažte nejprve, že sloupce matice AB jsou lineárními kombinacemi sloupců matice B a že řádky matice AB jsou lineárními kombinacemi řádků matice A.

24. Dokažte, že libovolnou matici hodnosti r lze elementárními úpravami převést na tvar, ve kterém $a^1_1 = a^2_2 = \ldots = a^r_r = 1$ a ostatní prvky jsou rovny nule.

    Návod: Řádkovými úpravami převeďte matici na schodovitý tvar a poté použijte sloupcové úpravy.

25. Rozhodněte, která z následujících matic je regulární, a která singulární:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

    Návod: Určete hodnost matice (nebo spočtěte její determinant).

26. Danou matici A převeďte řádkovými úpravami na schodovitý tvar A' a určete matici U, pro kterou $A' = UA$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

    Zformulujte analogickou úlohu pro sloupcové úpravy a vyřešte ji. Proveďte zkoušku.

    Návod: Napište si vedle matice A matici jednotkovou stejného řádu a provádějte současně tytéž elementární řádkové úpravy s maticí A i s maticí E. V okamžiku, kdy A nabude schodovitého tvaru, přejde E v U.

27. Dokažte, že návod k předchozímu příkladu je správný.

    Návod: A přejde v UA, kde U je součin elementárních matic. V co přejde E a proč?

28. Určete paritu permutace: (a) $\binom{1,2,3,4,5}{5,4,2,1,3}$, (b) $\binom{1,2,3,4,5}{2,1,4,3,5}$.

29. Jaké znaménko stojí u členu $a^1_1 a^2_3 a^3_2 a^4_4$, resp. $a^1_2 a^2_3 a^3_4 a^4_1$, resp. $a^2_1 a^1_2 a^3_4 a^4_3$ v determinantu 4tého řádu?

30. Jaké znaménko stojí u členu $a^1_1 a^2_2 \ldots a^n_n$, resp. $a^2_1 a^1_2 a^3_3 \ldots a^n_n$ v determinantu $n$tého řádu?

31. Rozepište definiční vztah pro determinant čtvercové matice řádu n explicitně pro $n = 4$.

32. Jak se změní determinant čtvercové matice řádu n, jestliže ji vynásobíme číslem α?

33. Určete determinanty elementárních matic.

34. Čemu je roven determinant matice (a) inverzní, (b) opačné k matici A?

35. Vypočtěte determinanty:

    (a) $\begin{vmatrix} a^2+ab+b^2 & a^2-ab=b^2 \\ a+b & a-b \end{vmatrix}$,

    (b) $\begin{vmatrix} \sin\alpha+\sin\beta & \cos\beta+\cos\alpha \\ \cos\beta-\cos\alpha & \sin\alpha-\sin\beta \end{vmatrix}$,

    (c) $\begin{vmatrix} \cos\alpha+i\sin\alpha & 1 \\ 1 & \cos\alpha-i\sin\alpha \end{vmatrix}$.

    Výsledky: (a) 0, (b) $-2b^3$, (c) 0, (d) 0.

36. Pomocí Sarrusova pravidla určete determinanty:

    (a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$, (b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$, (c) $\begin{vmatrix} i & 1 & 1-2i \\ 1-2i & i & 1 \\ 1 & 1-2i & i \end{vmatrix}$.

    Výsledky: (a) 40 , (b) $3abc - a^3 - b^3 - c^3$, (c) $-16 - 2i$

37. Dokažte, že

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = \sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)+\sin(\alpha-\beta).$$

38. Vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a^2 & 1 & a \\ a & a^2 & 1 \end{vmatrix},$$

kde $a = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Výsledek: 0.

39. Využijte vlastností determinantů k výpočtu determinantů

$$\text{(a)}\begin{vmatrix} x & x' & ax+bx' \\ y & y' & ay+by' \\ z & z' & az+bz' \end{vmatrix}, \quad \text{(b)}\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & 1 & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & 1 & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & 1 & \cos^2\gamma \end{vmatrix}.$$

Výsledky: (a) 0, (b) 0.

40. Dokažte, že platí:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_{i-1}^1 & b^1+c^1 & a_{i+1}^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_{i-1}^2 & b^2+c^2 & a_{i+1}^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_{i-1}^n & b^n+c^n & a_{i+1}^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_{i-1}^1 & b^1 & a_{i+1}^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_{i-1}^2 & b^2 & a_{i+1}^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_{i-1}^n & b^n & a_{i+1}^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_{i-1}^1 & c^1 & a_{i+1}^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_{i-1}^2 & c^2 & a_{i+1}^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_{i-1}^n & c^n & a_{i+1}^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

Návod: Dokazujte přímo z definice determinantu matice.

41. Pomocí Laplaceovy věty o rozvoji determinantu vypočtěte:

$$\text{(a)}\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}, \quad \text{(b)}\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix},$$

$$\text{(c)}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -3 \\ -4 & -5 & -6 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}, \quad \text{(d)}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Výsledky: (a) $8a+15b+12c-19d$, (b) $abcd$, (c) 490, (d) -3.

42. Pomocí elementárních úprav vypočtěte

$$\text{(a)}\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}, \quad \text{(b)}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Výsledky: (a) 5, (b) -8.

43. Vypočtěte determinant:

$$D = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ & & & \dots & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Návod: Odečtěte 1. řádek od všech zbývajících.
Výsledek: $D = (-1)^{n-1}$

44. Vypočtěte determinant:

$$D = \det \begin{pmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \dots & & & & \\ x & x & x & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

Návod: 1. řádek odečtěte od ostatních, pak z 1. sloupce vytkněte $a_1 - x$, z 2. sloupce $a_2 - x, \dots$, atd. až z n-tého vytkněte $a_n - x$.
Pak všechny sloupce přičtěte k prvnímu. Dostanete determinant matice ve schodovitém tvaru.
Výsledek: $x(a_1 - x)(a_2 - x)\dots(a_n - x)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a_1 - x} + \frac{1}{a_2 - x} + \dots + \frac{1}{a_u - x}\right)$.

45. (a) Rozhodněte, zda ze vztahu $AB = 0$ vyplývá, že alespoň jedna z matic A, B je nulová.
(b) Rozhodněte, zda je pravdivé toto tvrzení: Je-li matice A regulární, pak $AB = 0 \Leftrightarrow BA = 0 \Leftrightarrow B = 0$.
Návod: Tvrzení dokažte, nebo nalezněte příklad, který je vyvrací. Výsledky: (b) platí, (a) nikoliv.

46. Dokažte, že ke každé regulární matici A existuje právě jedna inverzní matice.
Návod: Připusťte existenci dvou inverzních matic a dokažte, že se rovnají.

47. Dokažte, že determinant antisymetrické matice lichého řádu je roven nule.
Návod: Ukažte nejprve, že

$$\det A = (-1)^n \det A^\top = (-1)^n \det A.$$

48. Zjednodušte výraz $(AB)^{-1}(B^{-1}A^{-1})^{-1}$.

49. Buďte A, B čtvercové matice, nechť $AB = E$. Dokažte, že
(a) A i B jsou regulární;
(b) BA je regulární
(c) $BA = E$.
Návod: (a,b) Užijte vzorce (6); (c) Ukažte nejprve, že $BA = BABA$.

50. Určete inverzní matici k maticím

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 8 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -4 & -3 \\ 3 & 8 & -1 & -6 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

(1) metodou elementárních úprav
(2) pomocí matice algebraických doplňků.
a proveďte zkoušku.

Výsledek: (a) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{9}{4} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 24 & 3 & -4 & -8 \\ -\frac{23}{2} & -1 & 2 & \frac{7}{2} \\ 10 & 1 & -2 & -3 \\ -5 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & (-1)^{n-1} \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \dots & (-1)^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & (-1)^{n-3} \\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & & & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

3. Zápočtové příklady

1. Vypočtěte součin matic
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 6 \\ -1 & 6 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$
2. Dokažte matematickou indukcí:
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}.$$
3. Určete hodnosti matic
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 4 & 5 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 4 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$
4. Jaké znaménko stojí u členu $a_2^1 a_3^2 a_1^3 a_5^4 a_4^5$ v determinantu pátého řádu?
5. Spočtěte determinanty
$$\begin{vmatrix} b & ac & ad \\ -a & bc & bd \\ 0 & -d & c \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & i & -2i & 3i \\ 1 & -1+i & 1+2i & -1+3i \\ 2 & 2+i & 2-2i & 2+3i \\ 3 & -3+i & 3+2i & -3+3i \end{vmatrix}.$$
6. Vypočtěte následující determinanty n-tého řádu:
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ & & & \dots & \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 2 & 3 & \dots & n \\ 3 & 3 & 3 & \dots & n \\ & & & \dots & \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}.$$
7. Dokažte, že následující matice jsou singulární:
$$\begin{pmatrix} \sin^2\alpha & \cos 2\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos 2\beta & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos 2\gamma & \cos^2\gamma \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \dots & 1 \\ & & & \dots & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n \end{pmatrix}, \text{ kde } n \text{ je počet řádků.}$$
   Vyjádřete explicitně lineární závislost sloupců těchto matic.
8. Určete (pokud existují) matice inverzní k maticím
$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & i & -1 & -i \\ 0 & -i & 1 & i & -1 \\ i & -1 & -i & 1 & i \end{pmatrix}.$$
   Proveďte zkoušku.
9. K daným maticím určete matice algebraických doplňků a poté matice inverzní:
$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}.$$

10. Buďte A, B čtvercové matice. Ukažte, že čtvercová matice AB je regulární právě tehdy, když jsou regulární obě matice A, B.
11. Dokažte tato tvrzení:
    (a) $AA^\top$ je symetrická matice pro každou matici A.
    (b) Součin symetrických matic A, B je symetrická matice právě tehdy, když $AB = BA$.
    (c) $AB - BA$ je antisymetrická matice pro libovolné dvě antisymetrické matice A, B.