

$f: X \rightarrow Y$ je spojitě v $x \in X$

$\forall V \in \mathcal{N}_{f(x)} \exists U \in \mathcal{N}_x$ takové, že $f(U) \subset V$.

Věta 3.4 Zobrazení $f: X \rightarrow Y$ je spojitě právě když vzor libovolné otevřené množiny je otevřená množina.

Důkaz: předp. $f: X \rightarrow Y$ spojitě. Bud' $V \in \mathcal{O}_p(Y)$
proč. $f^{-1}(V)$ - otevřená $x \in f^{-1}(V)$, nebo-li $f(x) \in V$
 $V \in \mathcal{N}_{f(x)}$ protože f je spojitě $\exists U \in \mathcal{N}_x$ $f(U) \subset V$

Platí $f(U) \subset V \stackrel{?}{\implies} U \subset f^{-1}(V)$

Předpokládejme vzor otevřený je otevřená
 $x \in X$, volim $V \in \mathcal{N}_{B_{f(x)}}$ libovolně $f(x) \in V$
 $f^{-1}(V)$ - otevřená množina $x \in f^{-1}(V)$

$\underbrace{f^{-1}(V)}_U \in \mathcal{N}_{B_x}$ zda $f(U) \subset V$
 $f(f^{-1}(V)) \subset V$ platí

$y \in f(\underline{f^{-1}(V)}) \exists x \in f^{-1}(V) f(x) = y$
 $y = f(x) \in V$

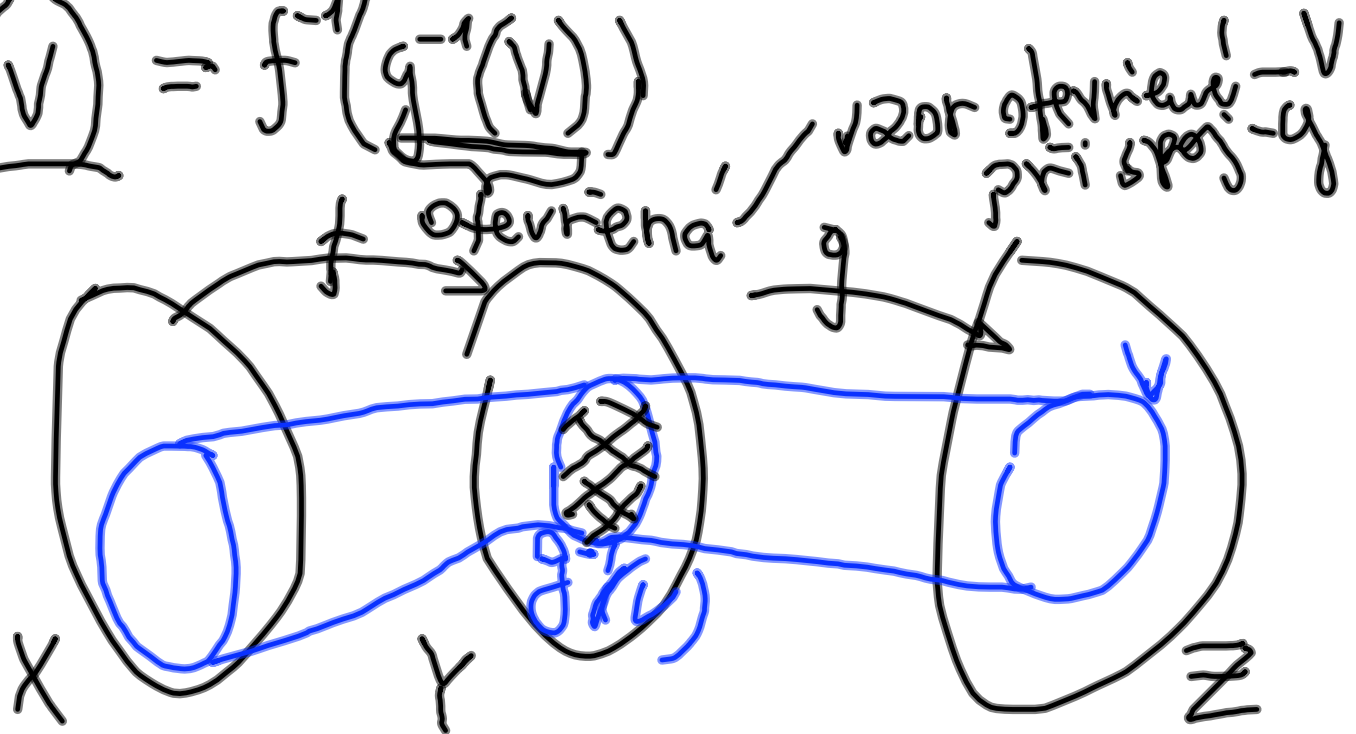
Věta 3.5. Složením spojitých zobrazení je spojitě zobrazení.

Důkaz: $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ – spojitá

ukážeme, že $g \circ f$ – spojitá: $X \rightarrow Z$

$V \in \mathcal{O}_p(Z)$ musíme ukázat, že $(g \circ f)^{-1}(V) \in \mathcal{O}_p(X)$

$$(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$$

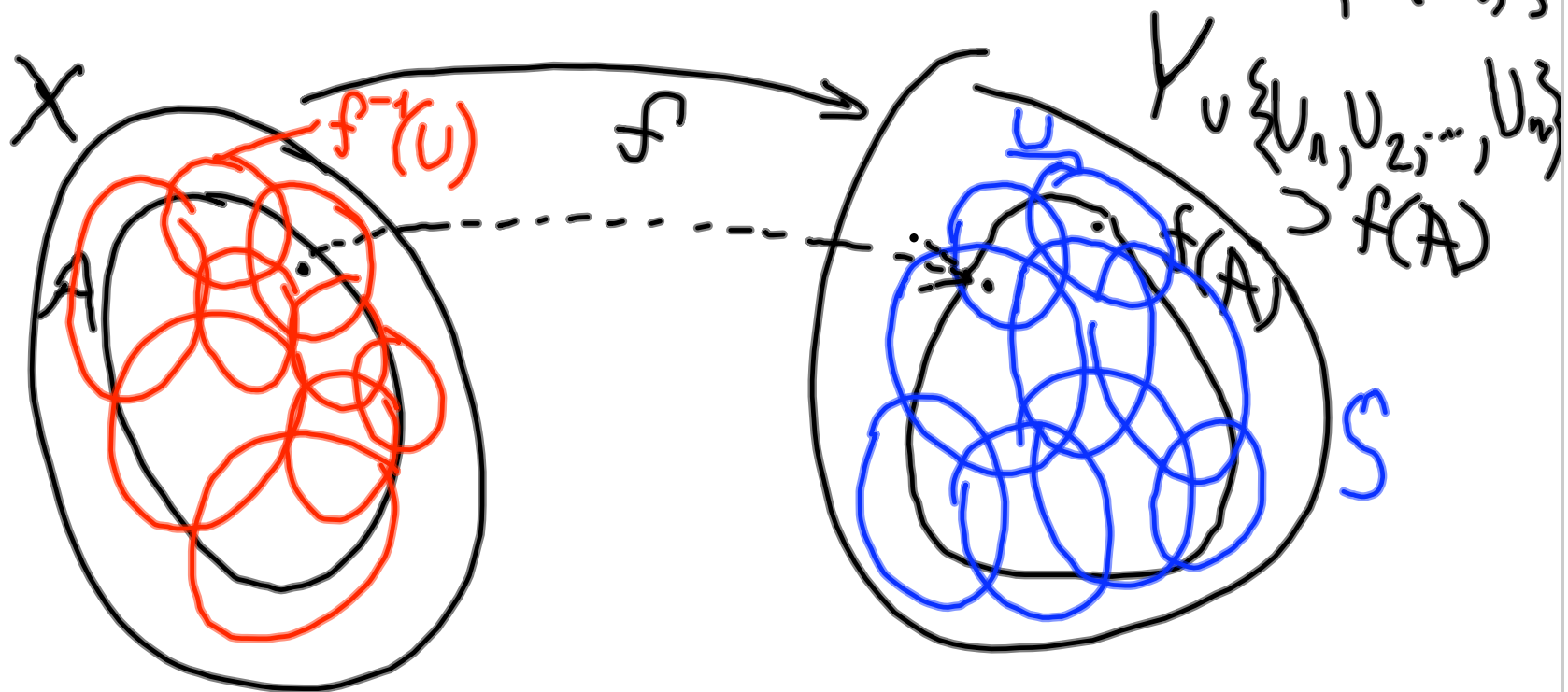


Věta 3.6 Spojitý obraz kompaktní množiny je kompaktní množina.

Důkaz: $f : X \rightarrow Y$ - spojitě

$A \subset X$ - kompaktní. S - otevřené pokrytí $f(A)$

$S' = \{f^{-1}(U) \mid U \in S\}$ - otevř. pokrytí A $S' = \{f^{-1}(U_1), f^{-1}(U_2), \dots, f^{-1}(U_n)\}$



Věta 3.7. Spojitý obraz souvislé množiny
je souvislá množina.

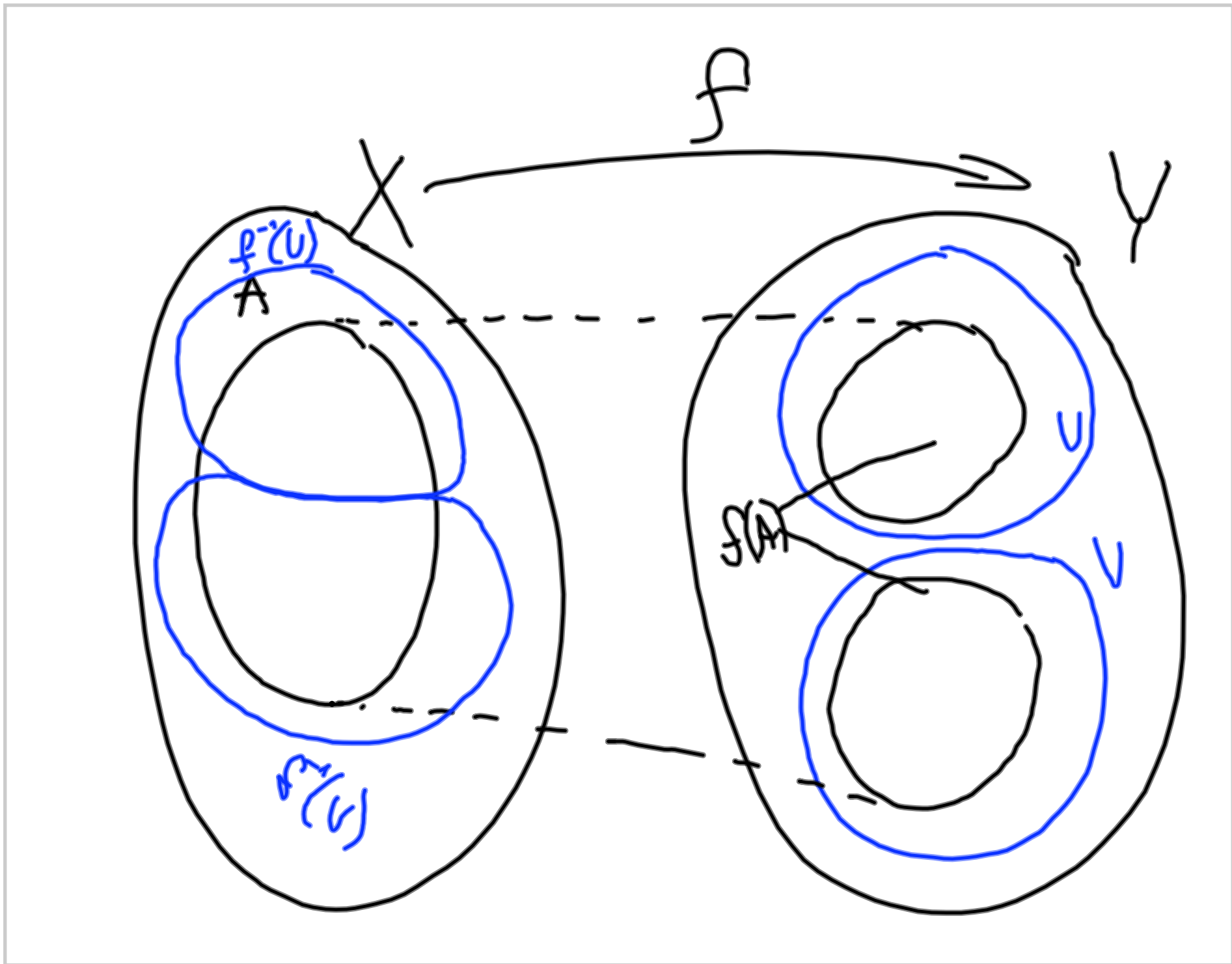
Důkaz předp. $f: X \rightarrow Y$ spojitý a A - souvislá
ale $f(A)$ nesouvislá.

$$f(A) = (U \cap f(A)) \cup (V \cap f(A)) = (U \cup V) \cap f(A)$$

$f^{-1}(U) \cap A, f^{-1}(V) \cap A$ - otevřené množiny

$$\begin{aligned} (f^{-1}(U) \cap A) \cup (f^{-1}(V) \cap A) &= (f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)) \cap A = \\ &= f^{-1}(U \cup V) \cap A \supset f^{-1}(f(A)) \cap A = A \end{aligned}$$

$$(f^{-1}(U) \cap A) \cup (f^{-1}(V) \cap A) = A \quad U \cup V \supset f(A)$$



$f: X \rightarrow Y$ - homeomorfismus

f - je spojitel' a f^{-1} - spojitel'

X a Y jsou homeomorfn' \exists -li $f: X \rightarrow Y$
homeomorfismus

Veta 3.8. Kompozice dvou homeomorfizmu' je homeomorfismus.

Du'leka jasn'.

4 TOPOLOGICKÉ VLASTNOSTI MNOŽINY REÁLNÝCH ČÍSEL

$(A \text{ - otevřená} \Leftrightarrow \forall x \in A \exists \text{ otevř. interval } I \ni x, \text{ že } I \subset A)$

Věta 4.1 System takto definovaných množin je topologie
Důkaz: Ax. 1. \emptyset, \mathbb{R} - splňují.

Ax. 2. U, V - ot. $x \in U \cap V \Rightarrow x \in I \subset U, x \in J \subset V$
 $x \in \underline{I \cap J} \subset U \cap V$

Ax. 3. S - systém ot. množin $U_S, x \in U_S$ tak.
 $\exists A \in S : x \in A \dots x \in I \subset A \quad I \subset U_S$

Lemma 4.2. $X \subset \mathbb{R}$ o vlastnosti: je-li $x, y \in X$ tak $[x, y] \subset X$. Potom X je interval.

Důkaz: $\sup X$, $\inf X$ - existují

$$a < c < b$$

$$a < x < c \quad c < y < b$$

$\in X \qquad \in X$

$$x < c < y$$
$$c \in [x, y] \subset X$$

Věta 4.3 $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$ potom, násled. podm. ekv.:

1. X - je souvislá;
2. X - je interval.

Důkaz: Předpokládejme, že X -interval je nespojitý

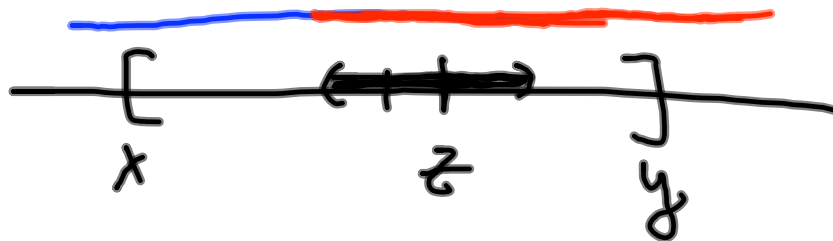
$$\exists U, V \in \mathcal{O}_p \quad X = (U \cap X) \cup (V \cap X)$$

$$[x, y] \subset X$$

$$\underbrace{(U \cap [x, y])} \cup \underbrace{(V \cap [x, y])}$$

$$z = \sup U \cap [x, y]$$

~~$$z \in \underbrace{U \cap [x, y]}$$~~
~~$$z \in \underbrace{V \cap [x, y]}$$~~



Předpokládáme, že X není interval

$x, y \in X$ a bod $z \in [x, y]$

$x < z < y$ $z \notin X$

$U = (-\infty, z)$

$V = (z, \infty)$

$$X = (U \cap X) \cup (V \cap X)$$

Důsledek 4.4. (Bolzano) Spojitý obraz interv. je interval.

Důsledek 4.5 (Darboux) $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ spoji
 $f(a) < f(b)$ potom $\forall c \in (f(a), f(b))$ existuje $x \in (a, b)$
 $f(x) = c$

