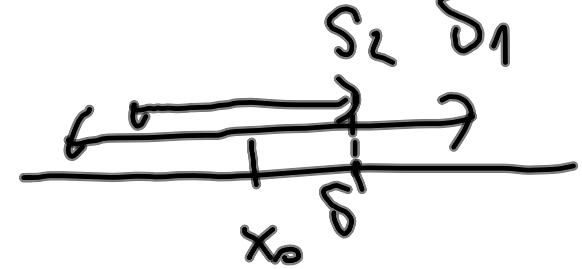
Věta 4.14. $f, g, h: X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojité, $h(X) \not\ni 0$

1. $f+g$ - spojitá
2. $f \cdot g$ - spojitá
3. f/h - spojitá



Důkaz: 1. $x_0 \in X$ volím $\varepsilon > 0$ libovolné

f, g - spojité proto existují $\delta_1, \delta_2 > 0$ takové, že

$$|x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$$

$$|x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$|x - x_0| < \delta$

$$|(f+g)(x) - (f+g)(x_0)| = |f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)| \leq$$

$$\leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

2. $x_0 \in X$, $\underline{\varepsilon > 0}$ - libovolné

$\frac{\varepsilon}{2|g(x_0)|}$ $\exists \delta_1 > 0$ $|x - x_0| < \delta_1$ $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2|g(x_0)|}$

$\frac{\varepsilon}{2M}$ $\exists \delta_2 > 0$ $|x - x_0| < \delta_2$ $|g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2M}$

$|f(x)| < M$

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ $|x - x_0| < \delta$

$$|(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)| = |f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)| =$$

$$= |f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)| \leq$$

$$\leq |f(x)g(x) - f(x)g(x_0)| + |f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)|$$

$$= \underbrace{|f(x)|}_{< M} \underbrace{|g(x) - g(x_0)|}_{< \frac{\varepsilon}{2M}} + |g(x_0)| \underbrace{|f(x) - f(x_0)|}_{< \frac{\varepsilon}{2g(x_0)}} < \underbrace{\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}}_{= \varepsilon}$$

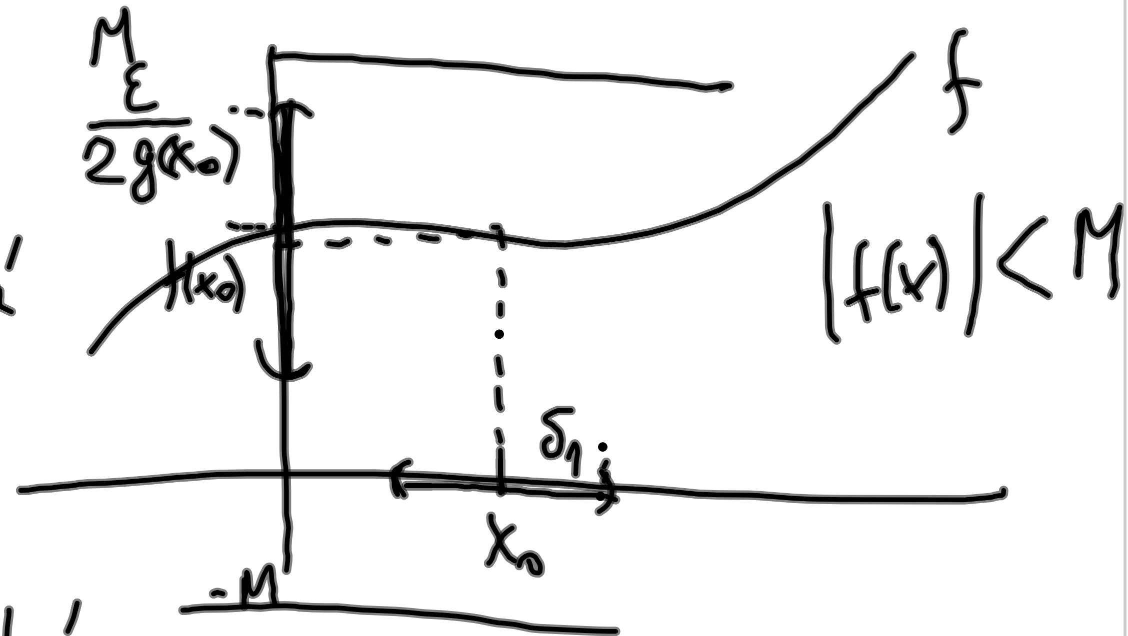
3. $\frac{f}{h} = f \cdot \underbrace{(k \circ h)}_{\text{spojitá}}$

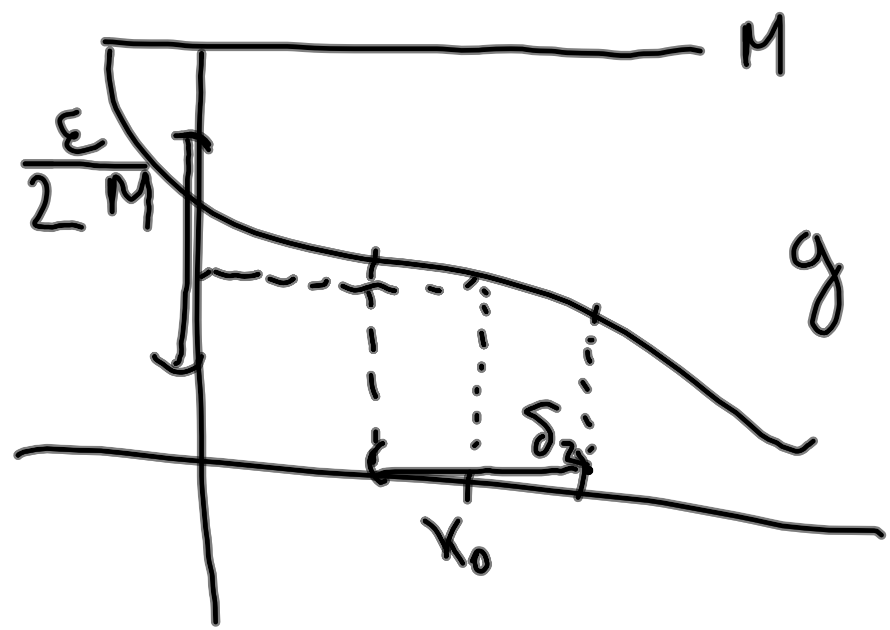
$k = 1/x$

f - spoj.

podle bodu 2,

je $f \cdot (k \circ h)$ spojitá





Důsl.: f, g spoj. $\quad \alpha f + \beta g$ - spojité $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Důsl.: $\forall$ afinní funkce je spojitá

Důsl.: $\forall n \in \mathbb{N}$ pow_n - spojitá funkce

Věta 4.18. $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $A \subset X$ A-hustá $(\bar{A} = X)$
spojité

Potom množina $\{x \mid f(x) = g(x)\}$ je uzavřená
$\{x \mid f(x) \leq g(x)\}$ je uzavřená

Důkaz: $\underbrace{\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}}_{\in Cl} = h^{-1}(\underbrace{\{0\}}_{\in Cl})$ $\quad h = f - g$

$\underbrace{\{x \in X \mid f(x) \leq g(x)\}}_{\in Cl} = h^{-1}(\underbrace{(-\infty, 0]}_{\in Cl})$

Důsl $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - spojité $A \subset X$ hustá v X (neboli $\bar{A} = X$).

1. $f|_A = g|_A$ potom $f = g$
2. $f|_A \leq g|_A$ potom $f \leq g$

Důkaz 1. $B = \{x \in X \ f(x) = g(x)\}$ je uzavřená

$\bar{B} = B \qquad A \subset B \quad \bar{A} \subset \bar{B}$

$B = \bar{B} \supset \bar{A} = X \quad B \supset X \quad B \subset X \quad B = X$

2. úplně stejně

Věta 4.21. Libovolný interval otevřený je homeomorfní s $\mathbb{R}$.

Důkaz $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$

$f : (a_1, b_1) \longrightarrow (a_2, b_2) \quad f(x) = \dfrac{x - a_1}{b_1 - a_1} b_2 + \dfrac{x - b_1}{a_1 - b_1} a_2$

$f(a_1) = a_2, \; f(b_1) = b_2 \qquad f((a_1, b_1)) = (a_2, b_2)$

(a_1, b_1) je homeomorfní s (a_2, b_2)

$(-1, 1)$ je homeomorfní s $\mathbb{R}$

$g : \mathbb{R} \longrightarrow (-1, 1) \quad g(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$ - spojitá funkce

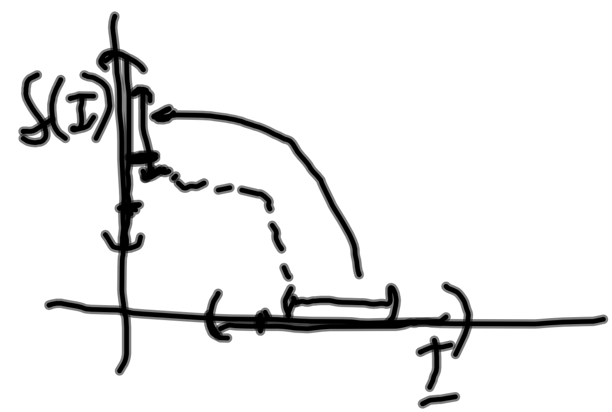
$g^{-1} : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R} \quad g^{-1}(x) = \dfrac{x}{1 - |x|}$. spoj. na $(-1, 1)$

$g \circ g^{-1} = \mathrm{id}_{(-1,1)} \qquad g^{-1} \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$

Věta 4.22. Libovolná rostoucí nebo klesající spojitá funkce na intervalu I je homeomorfismus I a f(I). Libovolná prostá spojitá funkce intervalu I je rostoucí nebo klesající

Důkaz: ① f spojitá předp. rostoucí $f: I \to f(I)$

$\exists f^{-1}: f(I) \to I$ - spojitá?



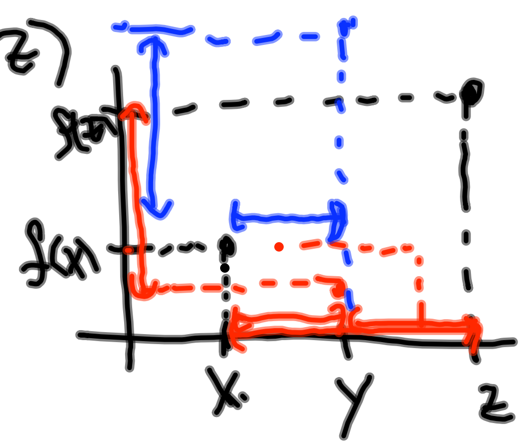
$$f((a,b)) = (f(a), f(b))$$

$$f^{-1}((f(a), f(b))) = (a,b)$$

② $x < y < z$ $\quad f(x) < f(y) < f(z)$

$f(x) \neq f(z)$ $\quad f(x) < f(z)$

$f(x) < f(y) < f(z)$



4.3 Limita

$f: X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in \overline{X}$

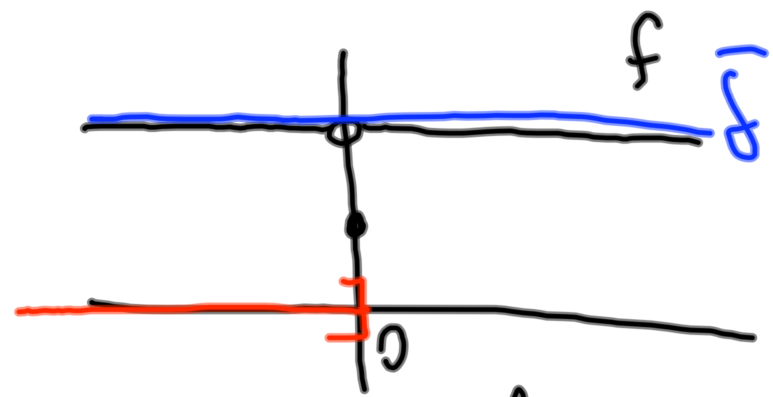
Číslo L je limitou f v x_0 $\quad \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$

$\bar{f}: X \cup \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{L\}$ $\quad \bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq x_0 \\ L & x = x_0 \end{cases}$

je spojitá v x_0.

$f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad A \subset X$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) = \lim_{x \to x_0} f|_A(x)$$



$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

Věta 4.23. Mějme $f: X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A \subset X$
číslo y je limitou f v x_0 $\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = y\right) \iff$
$\forall$ okolí V y $\exists$ okolí U x_0 takové, že $f(U \setminus \{x_0\}) \subset V$

Důkaz. důsledek def. limity a spojitosti

Věta 4.24 (ε-δ-kritérium limity)
$f: X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad y = \lim_{x \to x_0} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0:$
$\forall x \in X$, $x \neq x_0$, $|x - x_0| < \delta$ platí $|f(x) - y| < \varepsilon$.

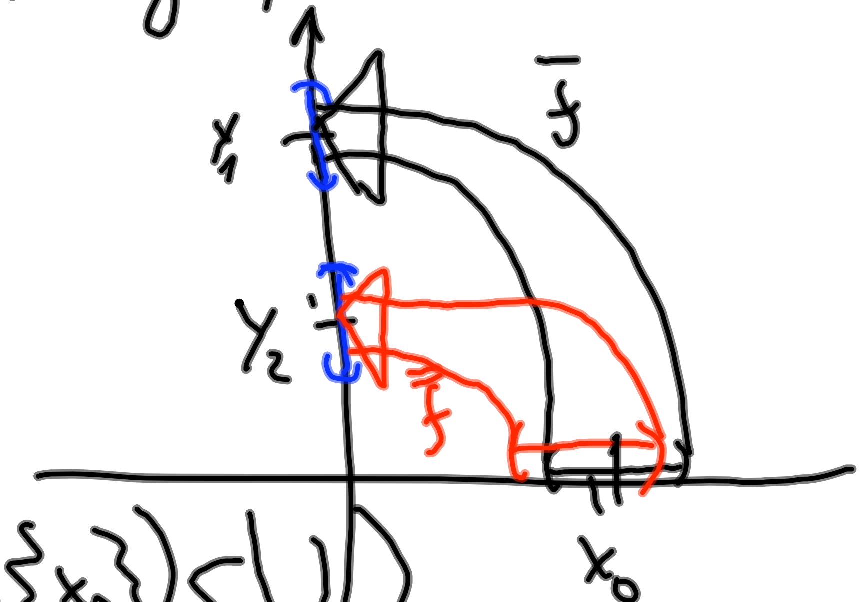
Věta 4.26 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, $x_0 \in \overline{X}$, $y_0 = \lim_{x \to x_0} f(x)$
g - je spojité v y_0. Potom má limitu v x_0

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = g(y_0)$$

$\bar{f}$ - spoj v x_0

Věta 4.25 Každá funkce $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má nejvýše jednu limitu

Důkaz: y_1, y_2 různé limity f v x_0



$U_1 \in Nb_{y_1}$ $\quad U_1 \cap U_2 = \emptyset$

$U_2 \ Nb_{y_2}$

$V_1 \in Nb_{x_0}, V_2 \in Nb_{x_0}$

$f(V_1 \setminus \{x_0\}) \subset U_1, \ f(V_2 \setminus \{x_0\}) \subset U_2$

$x \in V_1 \cap V_2$ $\quad \left.\begin{matrix} f(x) \in U_1 \\ f(x) \in U_2 \end{matrix}\right\}$ spor.

$\neq x_0$

Title: 11. 21-3:25 odp. (10 of 10)