X - pole $\quad X \quad \leq$ -uspořádání

úplné $\forall x, y \quad x \leq y$ nebo $y \leq x$

slučitelné s násobením a sčítáním

$\forall x, y, z \in X$

$$x \leq y \text{ potom } x+z \leq y+z \qquad (2.2.1)$$

$$0 \leq x,\ 0 \leq y \text{ potom } 0 \leq xy \qquad (2.2.2)$$

Věta 2.4 V každém uspořádaném poli

1. $0<1$
2. Je-li $x+z \leq y+z$ potom $x \leq y$
3. Je-li $0<x$ potom $0<x^{-1}$
4. Je-li $0<z$ potom $xz \leq yz \iff x \leq y$

Důkaz: 1. předp $0 \not< 1$ $\quad \underbrace{1 \leq 0}$, $1 \neq 0$ proto $1<0$

Využijeme (2.2.1) pro $x=1, y=0, z=-1$

pokud $1 \leq 0$ potom $1-1 \leq 0-1$

$\underbrace{0 \leq -1}$

Využijeme (2.2-2) $x, y=-1$

$0 \leq -1$ potom $0 \leq (-1)(-1)=1$

$1 \leq 0$, $0 \leq 1$ $\quad 1=0$

. .

Title: 10. 17-1:12 odp. (2 of 10)

2. $x+z \leq y+z \Longrightarrow x \leq y$

Využijeme $(2.2.1)$ $x = x+z$; $y = y+z$; $z = -z$

$x+z \leq y+z \Longrightarrow (x+z)+(-z) \leq (y+z)+(-z)$

$x+(z+(-z)) \leq \ldots\ldots$

$x \leq y$.

4. předp. $\underline{z>0}$; $x \leq y \Longleftrightarrow xz \leq yz$

„$x \leq y \Rightarrow xz \leq yz$"

$x \leq y \Rightarrow \underline{0 \leq y-x}$ z $(2.2.2)$ plyne $0 \leq (y-x)z = yz - xz$

$0 \leq yz - xz$

$xz \leq yz$

3. $0 < x \Rightarrow 0 < x^{-1}$, předp $\underline{0 < x}$ ale $0 \not< x^{-1}$; $\underline{x^{-1} \leq 0}$

$\underline{xx^{-1} \leq 0x}$ $\quad 1 \leq 0$ spor !.

4. předp. $z > 0$; $xz \leq yz \implies x \leq y$

podle 3. $z > 0 \dots z^{-1} > 0$

$$xz \leq yz \overset{(2.2.2)}{\Longrightarrow} x\underbrace{zz^{-1}} \leq y\underbrace{zz^{-1}}$$

$$x \cdot 1 \leq y \cdot 1$$

$$x \leq y$$

---

odčítání $x - y := x + (-y)$

dělení $x/y := x \cdot y^{-1}$ $y \neq 0$

$(x,y) = \{z \in X \mid x < z < y\}$ otevřený, vlastní interval

$[x,y] =$ $x \leq z \leq y$ uzavřený

$(x,\infty) = \{z \in X \mid x < z\}$ nevlastní intervaly

$[x,\infty) = \{z \in X \mid x \leq z\}$

$(-\infty, x) =$ $z < x$

2.3 REÁLNÁ ČÍSLA

Řekneme, že $X, \leqslant$ je spojitě uspořádané jestliže $\forall Y, Z \subset X$ $Y \leqslant Z$ existuje $x \in X$ takový, že $Y \leqslant x \leqslant Z$ ← (axiom spojitosti)

Každé spojitě uspořádané pole je množina reálných čísel $\mathbb{R}$.

Řekneme že $X \subset \mathbb{R}$ je shora (zdola) ohraničená jestliže existuje $x \in \mathbb{R}$ takový, že $X \leqslant x$ $(x \leqslant X)$.

Věta 2.5 (o supremu)

Každá neprázdná shora ohraničená množina reálných čísel má supremum.

Důkaz Mějme $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, shora ohraničená

$Y = \{ y \in \mathbb{R} \mid X \leq y \}$ - horní závory X.

$X \leq Y$ existuje $x \in \mathbb{R}$ $\underline{X \leq x \leq Y}$, $\underline{x = \sup X}$

x – nejmenší horní závora?

spor

1. horní závora?
2. je nejmenší předp. $y < x$; $X \leq y \ldots y \in Y \ldots x \not\leq Y$

Věta 2.6 (o infimu)
$\forall$ neprázdná zdola ohraničená množina $\mathbb{R}$ má infimum.

Př.: $[a,b] \leq b \quad b \in [a,b] \quad b = \max[a,b]$

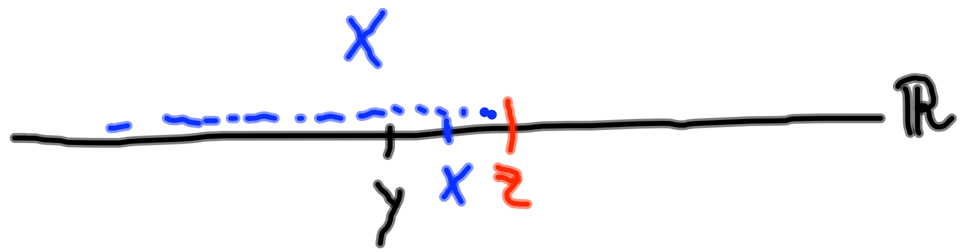
$b = \sup[a,b]$

$(a,b) \leq b$ horní závory $[b,\infty)$

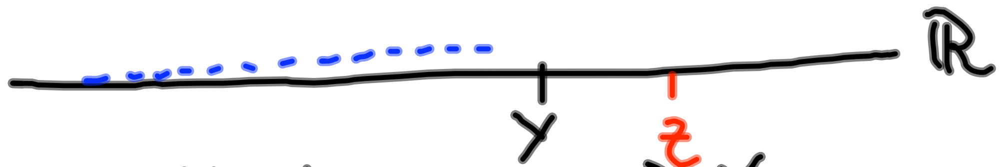
$(a,b) \leq \underline{\underline{[b,\infty)}} \quad b = \sup(a,b)$

Věta 2.7 Následující podm. jsou ekvivalentní.

1. $z = \sup X$,
2. $z \geq X$ a ke každému $y < z$ existuje $x \in X$ takové, že $y \leq x \leq z$



Důkaz



1. ⇒ 2. $z = \sup X$ triviálně plyne $z \geq X$

$\forall y < z \ \exists x \in X \ \ y \leq x \leq z$

$\exists y < z \ \forall x \in X \ \ x \leq y < z$ spor $z = \sup X$.

$X \leq y$

2 ⇒ 1. $z \geq X$

$\forall y < z \ \exists x \in X \ \ y \leq x \leq z$

2.4 PŘIROZENÁ ČÍSLA

$X \subset \mathbb{R}$ Jestliže $1 \in X$, a že $x \in X \Rightarrow x+1 \in X$

X – je induktivní

$\cap \{[0,\infty), (0,\infty), \underline{[1,\infty)}\}$

Př: $[0,\infty)$, $(0,\infty)$, $[1,\infty)$ – induktivní

Lemma 2.9 Průnik libovolného systému induktivních množin je induktivní množina.

Důkaz: S – systém induktivních množin

$\cap S \ni 1$ protože všechny prvky S jsou induktiv. množiny

$\cap S \ni x$ $\forall X \in S$ $x \in X$ $x+1 \in X$

$\forall X \in S$ $x+1 \in X$ $x+1 \in \cap S$

Množina přirozených čísel $\mathbb{N}$
je průnik všech induktivních množin v $\mathbb{R}$