Věta 5.8 Mějme posloupnost funkcí (f_n).
Posloupnost (f_n) konverguje stejnoměrně, právě když $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n_1, n_2 > n_0 \ \forall x \in Y$ platí $|f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x)| < \varepsilon$

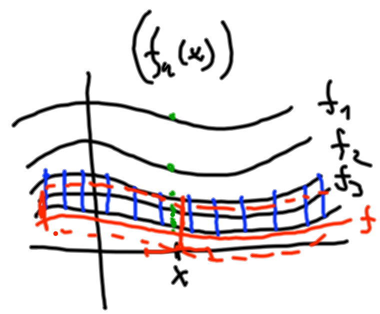
Důkaz: Předpokl. (f_n) konverguje stejnoměrně k f.
tzn. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n > n_0 \ \forall x \in Y \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$
volím $\varepsilon > 0$ vím, že platí $n_1, n_2 > n_0 \ \forall x \in Y$

$$|f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x)| = |f_{n_1}(x) - f(x) + f(x) - f_{n_2}(x)| =$$
$$\leq |f_{n_2}(x) - f(x)| + |f_{n_1}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Předpokládám
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall n_1, n_2 > n_0 \ \forall x \in Y$ platí $|f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x)| < \varepsilon$
potože $(f_n(x))$ je Cauchyovská je $(f_n) \to f$
$\varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n > n_0 \ \forall x \in Y \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
Volím $\varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \underline{\forall n_1, n_2 > n_0 \ \forall x \in Y \ |f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}}$
$n > n_0 \ x \in Y$

$|f_n(x) - f(x)|$
$\leq |f_m - f_n| + |f_m - f| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$f(x) = \lim_{m \to \infty} f_m(x)$
$\exists m \ |f_m - f| < \frac{\varepsilon}{2}$



Věta 5.9 Nechť posl. (f_n) spojitých funkcí stejnoměrně konverguje k f na Y. Potom f je na Y spojitá.

Důkaz $x_0 \in Y$ $\quad \varepsilon > 0$ dokážu $\forall x \in U \cap Y$ $\; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

k $\varepsilon > 0$, $x_0 \in Y$ $\; \exists n_1 \in \mathbb{N}$ $\forall n > n_1$ platí

(*) $\quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$\exists n_2 \in \mathbb{N}$ $\forall n > n_2$ platí

(**) $\quad |f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$n > \max\{n_1, n_2\}$ platí (*), (**)

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)|$$

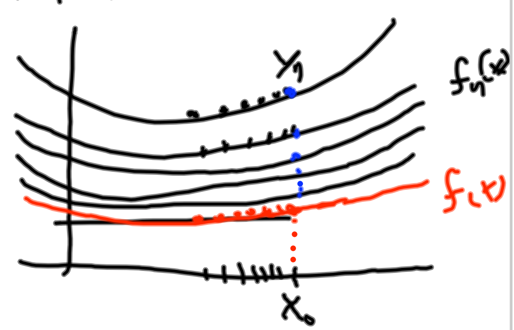
$$\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Důsledek 5.10 (Věta o záměně limit)

Nechť f_n konv. stejnoměr. k f a nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $\lim_{x \to x_0} f_n(x) = y_n$. Potom

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{n \to \infty} y_n.$$



5.4 ŘADY

$\sum x_n \quad \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ posloupnosti (x_n)

$\sum x_n$ posloupnost (s_n) $s_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$

posloupnost částečných součtů $\sum x_n$

konverguje-li (s_n) řekneme, že konverguje $\sum x_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \quad \sum_{n=k}^{\infty} x_n$ budeme mít na mysli $\underline{\sum_{n=1}^{\infty} x_{n+k-1}}$

Příklady $q \in \mathbb{R}$ $x_n = q^n$ $n = 0, 1, 2, \dots$

$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \sum q^{n-1}$ – geometrická řada

$$s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1-q}{1-q}\left(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}\right) =$$

$$= \frac{1\cdot(1-q) + q(1-q) + \dots + q^{n-1}(1-q)}{1-q} =$$

$$= \frac{1 \cancel{- q} \cancel{+ q} \cancel{- q^2} \cancel{+ q^2} \cancel{- q^3} \cancel{+} \dots \cancel{+ q^{n-2}} \cancel{- q^{n-1}} \cancel{+ q^{n-1}} - q^n}{1-q} =$$

$$= \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$\lim s_n = \lim \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} \quad \boxed{\lim_{n\to\infty} q^n} \quad -1 < q < 1$$

$$\sum q^{n-1} = \frac{1}{1-q}$$

$\sum \frac{1}{n}$ – harmonická řada diverguje

$\sum (-1)^n$ – Grandiho řada oscilující

$(x_n) = (-1, 1, -1, 1, -1, \dots)$

Věta 5.11. Mějme řadu $\sum x_n$. Řada $\sum x_n$ koverg.
$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n_1, n_2 > n_0$

$$|x_{n_1} + x_{n_1+1} + \dots + x_{n_2}| < \varepsilon$$

Důkaz: Označme s_n – posl. částečných součtů $\sum x_n$

$$s_{n_1} = x_1 + x_2 + \dots + x_{n_1}$$

$$s_{n_2} = x_1 + x_2 + \dots + x_{n_1} + x_{n_1+1} + \dots + x_{n_2}$$

$$|x_{n_1} + x_{n_1+1} + \dots + x_{n_2}| = |s_{n_2} - s_{n_1-1}| < \varepsilon$$

(s_n) – konvergentní

Důsledek 5.12 (Nutná podmínka konvergence)
Je-li $\sum x_n$ konvergentní potom $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

Věta 5.14 Mějme $\sum x_n, \sum y_n$ – konvergentní a $c \in \mathbb{R}$. Potom konvergují řady

$$\sum (x_n + y_n) = \sum x_n + \sum y_n$$

$$\sum (c x_n) = c \cdot \sum x_n .$$

Důkaz: Posl. část. součtů $\sum (x_n + y_n)$

$$\lim (x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + \ldots + x_n + y_n) =$$

$$= \lim (\underbrace{x_1 + x_2 + \_\_ + x_n}) + \lim (\underbrace{y_1 + y_2 + \_\_ + y_n})$$

$$= \sum x_n + \sum y_n$$

$$\lim (c x_1 + c x_2 + \_\_ + c x_n) = c \lim (x_1 + x_2 + \_\_ + x_n)$$

$$= c \cdot \sum x_n$$

Věta 5.15 $\sum x_n, \sum y_n$ $\exists n_0\ \forall n > n_0$ platí $y_n = x_n$. Potom $\sum x_n \to$ právě když $\sum y_n \to$

Věta 5.16 Nechť $k \in \mathbb{N}$ potom řada $\sum_{n=k}^{\infty} x_n$ konverguje, právě když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$

Věta 5.17 Nechť (k_n) ($k_1 = 1$), rostoucí posloupnost v $\mathbb{N}$ a $\sum x_n$ - konvergentní řada. Potom

$$y_n = x_{k_n} + x_{k_n+1} + \dots + x_{k_{n+1}-1} \qquad \sum y_n = \sum x_n$$

$$(x_n) = (\underbrace{\boxed{x_1\ x_2\ x_3}}_{y_1}\ \underbrace{\boxed{x_4\ x_5}}_{y_2}\ x_6 \dots)$$

$k_1 = 1$
$k_2 = 4$
$k_3 = 6$

$\sum (-1)^n$ -

5.5. ŘADY S NEZÁPORNÝMI ČÍSLY

$\sum x_n \quad x_n \geq 0 \ \forall n$

Co platí pro s_n - neklesající

Co to znamená pro (s_n)?

$s_n \to \iff s_n$ shora ohraničené

Věta 5.18 (Srovnávací kritérium)

Nechť $\sum x_n, \sum y_n$ - řady s nezápornými členy

a nechť $\exists n_0 : \forall n > n_0 \ x_n \leq y_n$ potom

z konvergence $\sum y_n$ plyne konvergence $\sum x_n$

Důkaz: $\sum \bar{x}_n \quad \bar{x}_n = \begin{cases} x_n & n > n_0 \\ 0 & n \leq n_0 \end{cases}$

$\forall n \ \bar{x}_n \leq y_n$, označme $\bar{s}_n$ - posl. část. součtů $\sum \bar{x}_n$

t_n - posl. část. součtů $\sum y_n$

$\bar{s}_n \leq t_n$

$\lim t_n$ existuje

$\lim \bar{s}_n$ - existuje $< \infty$

$\sum \bar{x}$ konverguje a podle Věty 5.15 konverguje i $\sum x_n$.

$\sum \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \qquad \sin\left(\frac{1}{n}\right) \leq \underbrace{\sin(1)}_{<1} \ \forall n$

$\sum (\sin(1))^n$

Věta 5.19 (limitní srovnávací kriterium)
Mějme $\sum x_n, \sum y_n$ - řady s nezápornými čísly
nechť existuje

$$\limsup \frac{x_n}{y_n} \in \mathbb{R}.$$

Potom z konvergence řady $\sum y_n$ plyne
konvergence řady $\sum x_n$.

Důkaz:
Protože $\limsup \frac{x_n}{y_n} \in \mathbb{R}$, posloupnost $\left(\frac{x_n}{y_n}\right) \leq M$
$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leq M \cdot y_n$

$\sum x_n$ existuje $\sum M y_n$ - konverguje

$\sum x_n \quad \sum y_n \qquad x_n \leq y_n \ \forall n \geq n_0$
$\sum y_n$ - majoranta $\sum x_n$
$\sum x_n$ - minoranta $\sum y_n$