Věta 5.20 (d'Alembertovo kritérium)

Nechť $\sum x_n$ - řada s nezápornými členy a $\exists q < 1$ n_0 taková, že $\forall n > n_0$ je

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < q$$

potom $\sum x_n$ konverguje. Existuje-li n_0 taková, že $\forall n > n_0$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$$

potom $\sum x_n$ nesplňuje nutnou podmínku konvergence.

Důkaz: Předp. $\exists n_0, q<1$ $\underbrace{\forall n \geq n_0 \ \frac{x_{n+1}}{x_n} < q}$

$y_n = x_0 \cdot q^n$

$n \geq n_0$

$$x_{n_0+1} < q\, x_{n_0} = y_1$$
$$x_{n_0+2} < q\, x_{n_0+1} < q^2 x_{n_0} = y_2$$
$$x_{n_0+3} < \ldots\ldots < q^3 x_{n_0} = y_3$$
$$\vdots$$
$$x_{n_0+k} < \qquad < q^k x_{n_0} = y_k$$

$\sum y_n = \sum x_0 q^n$

$= x_0 \sum q^n$

Geometrická řada konverguje $q<1$

$\exists n_0: \ \forall n > n_0 \quad \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$

$x_{n+1} > x_n \quad \lim x_n \neq 0$ Nesplňuje podmínku konvergence.

Věta 5.21 (limitní podílové kritérium)

Mějme $\sum x_n$ - řadu s nezápornými čísly

Je-li
$$\limsup \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$$
potom $\sum x_n$ konverguje.

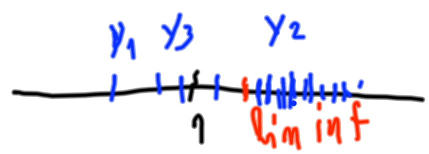
Je-li
$$\liminf \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$$
potom $\sum x_n$ nesplňuje nutnou podmínku konverg.

Důkaz: Předp. $\limsup \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$

počínaje n_0 $\forall n > n_0$ $\underbrace{\frac{x_{n+1}}{x_n} < q}_{} < 1$

Podle d'Alambertova kritéria $\sum x_n$ konverguje.

Předp. $\liminf \underbrace{\frac{x_{n+1}}{x_n}}_{y_n} > 1$



$\exists n_0 \; \forall n > n_0$

$\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$ podle d'Alembertova kriteria $\sum x_n$ diverguje

Příklad $\sum \frac{1}{n}$ $\quad x_n = \frac{1}{n}$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \longrightarrow 1$$

Věta 5.22 (Cauchyho odmocninové kritérium)
Buď $\sum x_n$ - řada s nezápornými členy
Pokud $\exists n_0, q<1$ takové, že $\forall n>n_0$

$$\sqrt[n]{x_n} < q$$

potom řada $\sum x_n$ - konverguje.
Pokud $\exists n_0$ takové, že $\forall n>n_0$

$$\sqrt[n]{x_n} > 1$$

Potom $\sum x_n$ nesplňuje nutnou podmínku konverg.

Důkaz: Počínajíc n_0 $\forall n>n_0$ $\underbrace{\sqrt[n]{x_n}}_{\text{pow}_n(\ )} < \underbrace{q}_{\text{pow}_n(\ )} < 1$

$$x_n < \underbrace{q^n}_{\text{geometrická posloupnost}}$$

$\sum q^n$ - majoranta $\sum x_n$, $q<1$

$\sum x_n$ - konverguje

Předp. $\exists n_0 : \forall n>n_0$ $\sqrt[n]{x_n} > 1$
$\forall n>n_0$ platí $x_n > 1$ $\lim x_n \neq 0$
nesplňuje nutnou podmínku konvergence.

Věta 5.23 (limitní odmocninové kritérium)
Máme $\sum x_n$ - řadu s nezápornými členy.
Je-li $\limsup \sqrt[n]{x_n} < 1$
potom $\sum x_n$ konverguje.
Je-li $\limsup \sqrt[n]{x_n} > 1$
potom $\sum x_n$ nesplňuje nutnou podmínku konv.

Příklad $\sum \frac{1}{n}$ $x_n = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

Příklad $\sum \frac{1}{n^2}$ $x_n = \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+2n+1} = 1$$

$\sum \frac{1}{n^k} \leftarrow$ konverguje $k>1$
diverguje $k \leq 1$

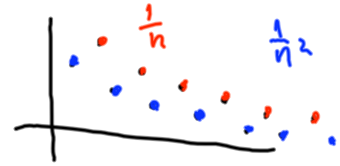
5.2 Alternující řady.

$\sum x_n$ – alternující $\forall n$ x_{n+1} má opačné znaménko než x_n

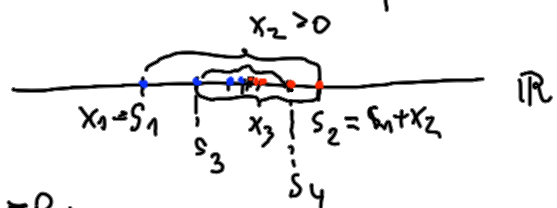
Př.: $\sum (-1)^n$ – osciluje.

Věta 5.24 (Leibnitzovo kritérium)

Buď $\sum x_n$ – alternující řada $\lim x_n = 0$ a $\exists n_0$
$\forall n > n_0$ $|x_{n+1}|/|x_n| < 1$
Potom $\sum x_n$ konverguje.



Důkaz:



Předp $\lim x_n = 0$,
$\forall n \in \mathbb{N}$ $|x_{n+1}|/|x_n| < 1$
$|x_{n+1}| < |x_n|$
označme s_n – posloupnost částečných součtů $\sum x_n$

$$S_{2n+1} = S_{2n} + x_{2n+1}$$

$$S_{2n+2} = S_{2n+1} + x_{2n+2} = S_{2n} + \underbrace{\overbrace{x_{2n+1}}^{<0} + \overbrace{x_{2n+2}}^{>0}}_{<0} < S_{2n}$$

$$S_{2n+3} = S_{2n+1} + \underbrace{\underbrace{x_{2n+2}}_{>0} + \underbrace{x_{2n+3}}_{<0}}_{>0} > S_{2n+1}$$

$s_1 > s_3 > s_5 > \dots \longrightarrow a$? $a = b$?
$s_2 < s_4 < s_6 < \dots \longrightarrow b$

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + x_{2n+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \underbrace{\lim x_{2n+1}}_{=0}$$

$\lim x_n = 0$

5.7 Absolutně konvergentní řady.

Věta 5.25. Konverguje-li $\sum |x_n|$ pak konverguje i řada $\sum x_n$ a platí $|\sum x_n| \leq \sum |x_n|$

Důkaz: s_n - posl. část. součtů $\sum |x_n|$

$\forall n_1, n_2 > n_0 \quad |x_{n_1}| + |x_{n_1+1}| + \_\_ + |x_{n_2}| < \varepsilon$

$\varepsilon > |x_1| + |x_2| + \_\_\_ + |x_{n_2}| \geq |x_1 + x_2 + \_\_ + x_{n_2}| = |S_n|$

posl. část. souč. $(\sum S_n)$

tedy $\sum x_n$ konverguje

$s_n \geq |S_n|$

$\sum |x_n| \geq |\sum x_n|$

Řekneme, že řada $\sum x_n$ je absolutně konvergentní jestliže řada $\sum |x_n|$ konverguje.

Řekneme, že $\sum x_n$ je neabsolutně konvergentní jestliže $\sum x_n$ konverguje ale $\sum |x_n|$ nekonverguje.

Absol. konvergentní

Věta 5.26:
Součet a násobek absolutně konvergentních řad je opět absolutně konvergentní řada

$\sum x_n + y_n = \sum x_n + \sum y_n ;$

$\sum c x_n = c \sum x_n .$

Věta 5.27 (O přerovnání řady)
Buď $\sum x_n$ - absolutně konvergentní řada
a $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekce.
Potom řada $\sum x_{\sigma(n)}$ je konvergentní a
platí $\sum x_n = \sum x_{\sigma(n)}$

Věta 5.30 (Riemannova přerovnávací věta)
Buď $\sum x_n$ - neabsolutně konvergentní řada
a $x \in \mathbb{R}$. Potom existuje bijekce $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
taková, že $\sum x_{\sigma(n)} = x$.

Príklady

$$\boxed{\sum (-1)^{n+1}\frac{1}{n}} \text{ konverguje}$$

Leibnitzovo kritérium: $\lim \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \lim \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \frac{\left|(-1)^{n+2}\frac{1}{n+1}\right|}{\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right|} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} =$$

$$= \frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

Absolutne?

$$\sum \left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right| = \sum \frac{1}{n} \text{ nekonverguje}$$

Pozn. $\sum (-1)^{n+1}\frac{1}{n} = \ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \_\_\_$

$$\sum \underbrace{(-1)^{n+1}\frac{1}{n}}_{x_n} \qquad \sum \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \_\_\_\right)$$

$\sum x_n^+ \qquad \sum \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \_\_\_\right)$ divergentní

$\sum x_n^- \qquad \sum \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \_\_\_\right)$ divergentní

$$\sum x_n = \sum x_n^+ - x_n^-$$