$f: X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in \mathrm{cl}\, X \quad x_0 \in \mathrm{cl}\, X \cap (-\infty, x_0)$

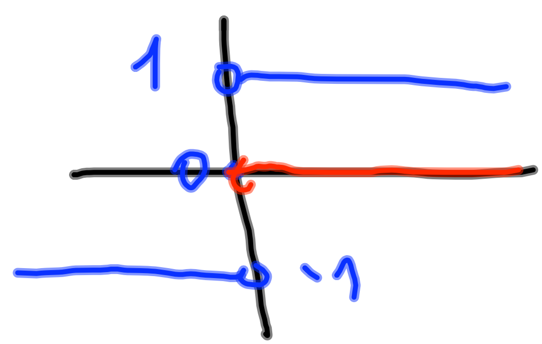
$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{x \to x_0} f|_{X \cap (-\infty, x_0)}(x)$$

limita funkce f v bodě x_0 zleva

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

limita f v x_0 zprava

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \qquad \lim f|_{X \cap (x_0, \infty)}(x)$$



Rozšířená množina reálných čísel

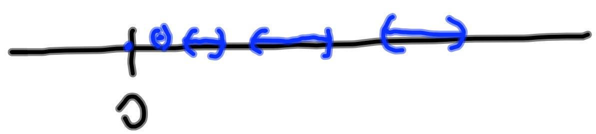
$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

uspořádání $x \in \mathbb{R}$ $\quad x < \infty$ a $x > -\infty$

Topologie $\overline{\mathbb{R}}$

$X \subset \overline{\mathbb{R}}$ je otevřená $\Leftrightarrow$

1. $X \cap \mathbb{R}$ je otevřená
2. jestliže $\infty \in X$ potom $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ $(x_0, \infty) \subset X$
3. jestliže $-\infty \in X$ potom $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ $(-\infty, x_0) \subset X$



Věta 4.27 (zobecněná věta o supremu a infimu)
Každá podmnožina $\overline{\mathbb{R}}$ má supremum i infimum

Důkaz:
1. předpokládejme, že X není shora ohraničená
v tom případě $\sup X = \infty$.
2. obdobně pro neohraničenou zdola
$\inf X = -\infty$
3. $X = \emptyset$ množina horních závor $\overline{\mathbb{R}}$
$\sup \emptyset = -\infty$
dolních závor $\overline{\mathbb{R}}$
$\inf \emptyset = \infty$

Věta
$\forall$ nepr. shora ohraničen podmožinu $\mathbb{R}$ má supr

Limity uvažujeme vždy v $\overline{\mathbb{R}}$

$f(x) = x^2 \qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{R}}$

$\infty \in \operatorname{cl} \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ – limita v nevlastním bodě

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ – nevlastní limita

Věta 4.28 $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - monotonní bod

$x_0 \in \mathrm{Cl}\, X \cap (-\infty, x_0)$ potom existuje

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x);$$

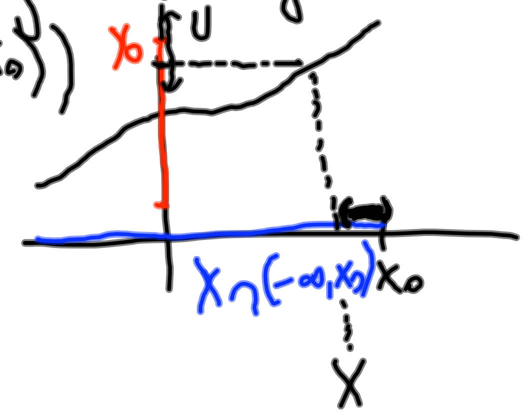
$x_0 \in \mathrm{Cl}\, X \cap (x_0, \infty)$ potom existuje

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

$x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

Důkaz: Předpokládejme, že f je neklesající

$$y_0 = \sup_{\substack{x \in X \\ x < x_0}} f(x) = \sup f(X \cap (-\infty, x_0))$$



U - okolí y_0

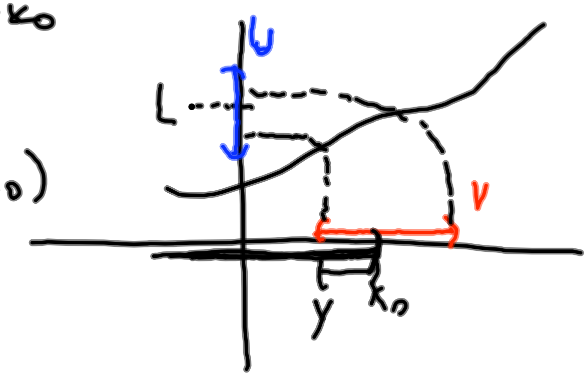
$x \in X \cap (-\infty, x_0)$ $f(x) \in U$

$\boxed{(x, x_0) \cap X}$ $> x$ $f(X \cap (-\infty, x_0)) < y_0$

$$\underbrace{f((x, x_0) \cap X)}_{f(x) < \quad < y_0} \subset U$$

Věta 4.29 $f: X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ x_0 – bodem uzávěru $X \cap (-\infty, x_0)$ tak i $X \cap (x_0, \infty)$
Limita $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ právě když existují limity $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ a $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ a rovnají se.

Důkaz když existuje $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ triviálně existuje i $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ a $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$



$V \cap (-\infty, x_0)$

Předpokládejme, že
$L = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$

$\forall U \in Nb_L$ $\exists$ okolí V bodu x_0 takové, že $f(V \cap X \setminus \{x_0\}) \subset U$

- (y, x_0) – tak, že $f((y, x_0)) \subset U \leftarrow$ protože $L = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$
- (x, z) – tak, že $f((x_0, z)) \subset U \leftarrow$ protože $L = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$

$V = (y, z)$ – okolí x_0 $f(\underline{(y,z) \cap X \setminus \{x_0\}}) \subset U$

Věta 4.30 (o třech limitách)

$f, g, h: X \subset \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ $f \leq g \leq h$ $x_0 \in \operatorname{cl} X$

existují-li $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = y_0$

potom existuje i $\lim_{x \to x_0} g(x) = y_0$

Důkaz: U okolí y_0 $\exists$ interval $J \ni y_0$ $J \subset U$

Protože J je okolí y_0 existuje okolí V bodu x_0 tak, že

$f(X \cap V \setminus \{x_0\}) \subset J$

$h(X \cap V \setminus \{x_0\}) \subset J$

proč by mělo platit, že $g(X \cap V \setminus \{x_0\}) \subset J$

$x \in X \cap V \setminus \{x_0\}$ $\underset{J}{\underset{\uparrow}{f(x)}} \leq \underset{J}{\underset{\uparrow}{g(x)}} \leq \underset{J}{\underset{\uparrow}{h(x)}}$

POSLOUPNOSTI A ŘADY

$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ – posloupnost

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (x_n) $\infty \in \mathrm{cl}\, \mathbb{N}_{n_0}$ ∞

$\underline{(n_0, \infty) \cap \mathbb{N}}$

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n$ $\lim x_n$

Věta 5.1 Posloupnost (x_n) má limitu x_0, jestliže $\forall$ okolí U bodu x_0 existuje n_0 takové, že $\forall n \in \mathbb{N}$ $n > n_0$ $x_n \in U$

(x_n) – posloupnost

y – hromadná hodnota posloupnosti (x_n) jestliže $\forall U$-okolí y $\exists$ nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$ $x_n \in U$

Věta 5.2 Množina hromadných hodnot posloupnosti (x_n) je uzavřená.

Důkaz: Předpokládejme, že bod x_0 není hromadný ale v každém jeho okolí nějaký hromadný bod leží.
Ukážeme, že x_0 je hromadnou hodnotou (x_n).
Nechť U je okolí x_0, v takovém okolí leží hromadná hodnota y. U je okolím y a tedy existuje nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$ tak, že $x_n \in U$ to znamená, že x_0 je hromadnou hodnotou (x_n).
Tedy spor.

Věta 5.3 Buď (x_n) posloupnost prvků v X - kompaktní prostor. Potom

1. (x_n) má hromadnou hodnotu
2. Má-li (x_n) jedinou hromadnou hodnotu y pak $\lim x_n = y$.

Důkaz: ① Předp. že žádný prvek X není hromadnou hodnotou (x_n)

$\forall x \in X \ \exists U_x \in Nb_x$ $n \in \mathbb{N}$ $x_n \in U_x$ je konečně mnoho

$S = \{U_x \mid x \in X\}$ - otevřené pokrytí X

$S' = \{U_{x_1}, U_{x_2}, \dots, U_{x_N}\}$ - konečné podpokrytí S.

spor.

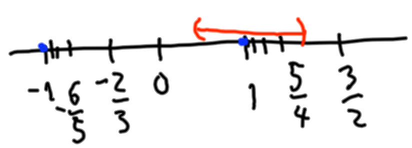
② Proč y - jediná hrom. hodnota $\lim x_n = y$?

Co kdyby $y \neq \lim x_n$

To znamená, že $\exists U \in Nb_y$ $X \setminus U$ obsahuje nekonečně mnoho prvků (x_n)

ale $X \setminus U$ je kompaktní. Podle bodu 1. $X \setminus U$ obsahuje další hromadnou hodnotu.

$x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$



Největší hromadné hodnotě říkáme limes superior ozn. $\limsup x_n$

Nejmenší hromadné hodnotě říkáme limes inferior ozn. $\liminf x_n$