5.2 Posloupnosti v $\mathbb{R}$

(x_n) $x_n \in \mathbb{R}$

je konvergentní existuje $\lim x_n$ a $\lim x_n \in \mathbb{R}$

je divergentní existuje $\lim x_n$ a $\lim x_n \in \{\infty, -\infty\}$

je oscilující jinak.

(x_n) posloupnost v $\mathbb{R}$ a rostoucí posloupnost $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $(x_{\sigma(n)}), (x_{\sigma_n})$ – vybraná posloupnost z (x_n) – podposloupnost.

$\mathbb{N} \ni n \mapsto x_n = n$ $\quad (1, 2, 3, 4, \ldots)$

$\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\sigma(n) = 2n$

(x_{σ_n}) $\quad (2, 4, 6, \ldots)$

$\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\sigma(n) = 2n-1$ $(1, 3, 5, \ldots)$

(x_n), $x_n = n$ $\quad \infty$ – okolí $\to (a, \infty]$

$\exists n > a$ $n \in \mathbb{N}$ $\underset{x_n}{\Psi}$ $\underset{x_{n+1}}{\Psi}$ ....

$[-\infty, 0)$

$\lim n = \infty$

(x_n) $x_n = (-1)^n$ $\quad (-1, 1, -1, 1, \ldots)$

$\sigma(n) = 2n$ $x_{\sigma_n} = (-1)^{2n} = 1$ $(1, 1, 1, \ldots)$

$\tau(n) = 2n-1$ $x_{\tau_n} = (-1)^{2n-1} = -1$ $(-1, -1, -1, \ldots)$

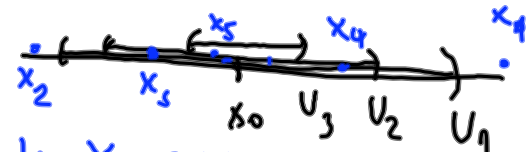
hrom hodnoty $1, -1$

Věta 5.5. Buď (x_n) posl. reál. čísel, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ je hromadnou hodnotou (x_n) právě když existuje vybraná podposloupnost (x_{σ_n}) taková, že $\lim x_n = x_0$.

Důkaz: Předp (x_n) má hrom. hodnotu $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$

To znamená, že $\forall$ okolí x_0 $\exists$ nekonečně mnoho indexů $n \in \mathbb{N}$ tak, že $x_n \in$ okolí.

$U_n = (x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n})$



$\sigma(1) = n_1 \ldots\ldots x_{n_1} \in U_1$ $\quad n_1 = 4 \quad x_4 \in U_1$

$\sigma(2) = n_2 \;\; -- x_{n_2} \in U_2 \quad n_2 > n_1$ $\qquad \lim x_{\sigma_n} = x_0$

$\sigma(3) = n_3 \ldots\ldots x_{n_3} \in U_3 \quad n_3 > n_2$

Předp. že σ_n - posl $\lim x_{\sigma_n} = x_0$

Máme ukázat, že $\forall$ okolí U bodu x_0 $\exists$ nekonečně mnoho indexů $k \in \mathbb{N}$ takových, že $x_k \in U$

Mám U - okolí x_0

z toho, že $\lim x_{\sigma(n)} = x_0$ k okolí U $\exists n_0 \in \mathbb{N}$

$\forall n > n_0 \;\; x_{\sigma_n} \in U$

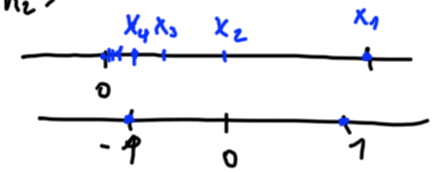
k může být $\sigma_{n_0+1}, \sigma_{n_0+2}, \sigma_{n_0+3}, \text{———}$

(x_n) - posloupnost v $\mathbb{R}$ cauchyovská

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}, \ n_1, n_2 > n_0 \quad |x_{n_1} - x_{n_2}| < \varepsilon$

Příkl. $x_n = \frac{1}{n}$

$x_n = (-1)^n$



Věta 5.6 Každá konvergentní posloupnost reálných čísel je cauchyovská. Každá cauchyovská posloupnost reálných čísel je konvergentní.

Důkaz. Předp. (x_n) je konvergentní $\lim x_n = x_0 \in \mathbb{R}$

tzn.: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n > n_0 \ n_0 \in \mathbb{N} \ |x_n - x_0| < \varepsilon$

Volím $\varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n > n_0 \ n \in \mathbb{N} \ |x_n - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}$

$n_1, n_2 \in \mathbb{N} \quad n_1, n_2 > n_0$

$$|x_{n_1} - x_{n_2}| = |x_{n_1} - x_0 + x_0 - x_{n_2}| \leq \underbrace{|x_{n_1} - x_0|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|x_{n_2} - x_0|}_{<\frac{\varepsilon}{2}}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Předp. (x_n) - cauchyovská

$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n_1 n_2 \geq n_0, \ n_1, n_2 \in \mathbb{N} \ |x_{n_1} - x_{n_2}| < 1$

$M = \max\{x_1, x_2, \dots, x_{n_0}\} + 1 \ \dots\dots \ x_n < M$

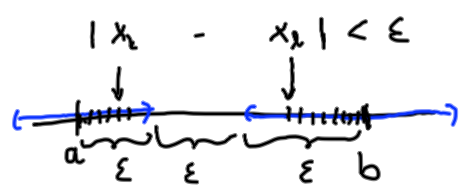
$m = \min\{x_1, x_2, \dots, x_{n_0}\} - 1 \ \dots\dots\dots \ x_n > m$

$x_n \in [m, M] \quad a = \liminf x_n \in \mathbb{R} \quad a \leq b$

$b = \limsup x_n \in \mathbb{R}$

$a < b$

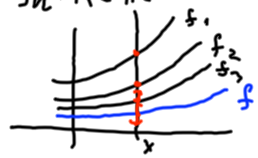
$\varepsilon = \frac{1}{3}(b-a) \quad n_0 \ \forall n_1 n_2 > n_0 \ |x_{n_1} - x_{n_2}| < \varepsilon = \frac{1}{3}(b-a)$



5.3 Posloupnosti funkcí

(f_n) - posloupnost funkcí $f_n: X\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$f: Y\subset X\to\mathbb{R}$.

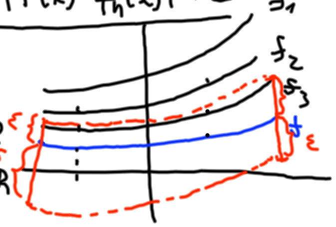


(f_n) bodově konverguje k f

$\forall x\in Y\ \forall\varepsilon>0\ \exists n_0: \forall n>n_0\ |f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$

(f_n) stejnoměrně konverguje k f

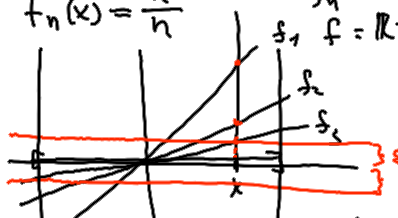
$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0: \forall n>n_0\ \forall x\in Y\ |f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$



Př.: $f_n(x)=\frac{x}{n}$

$f_n: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$



$\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n} = x\lim\frac{1}{n} = 0$

$f_n\to 0$

$f \not\rightrightarrows 0$

$f_n: [-1,1]\to\mathbb{R}$

$f_n\to 0$

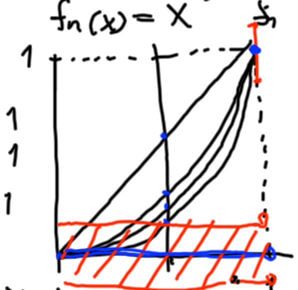
Př.: $f_n: [0,1]\to\mathbb{R}$

$f_n(x)=x^n$

$y_1=1$

$y_2=1$

$y_3=1$

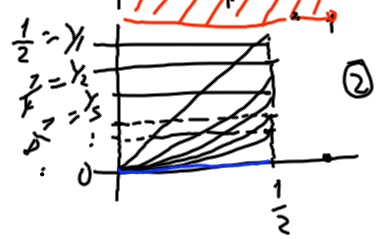


$f_n\to f$ $f: [0,1]\to\mathbb{R}$

$f(x)=\begin{cases}0 & x\neq 1\\ 1 & x=1\end{cases}$

$f \not\rightrightarrows f$

$[0,1)$



① $f_n\to f$

② $y_n=\sup_{x\in Y}|f_n(x)-f(x)|$

③ $y_n\to 0$

Věta 5.7 Jestliže $f_n : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ posloupnost funkcí $f : Y \subset X \to \mathbb{R}$ existuje posloupnost (y_n) taková že $\forall x \in Y$ $|f_n(x) - f(x)| < y$ a $\lim y_n = 0$ potom $(f_n) \rightrightarrows f$.

Důkaz

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 ; \forall n > n_0 \; \forall x \in Y \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

vím, že $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 : \forall n > n_0 \; |y_n - 0| < \varepsilon$

$\forall x \in Y \; |f_n(x) - f(x)| < |y_n|$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 : \forall n > n_0 \; \forall x \in Y \; |f_n(x) - f(x)| < |y_n| = |y_n - 0| < \varepsilon$$