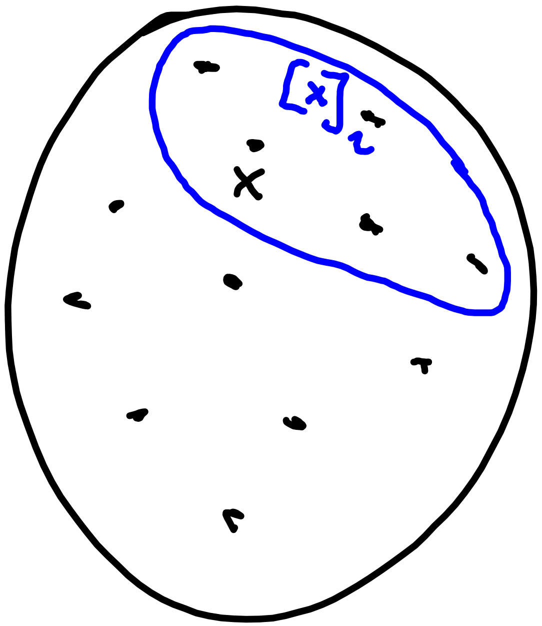
X, $\sim$ - ekvivalence, $x \in X$

$$[x]_\sim = \{ y \in X \mid x \sim y \} \qquad (1.5.2)$$

$$S = \{ [x]_\sim \mid x \in X \} \qquad (1.5.3)$$



$[x]_\sim$

Věta 1.7. Systém (1.5.3) je rozklad X.

Důkaz:

① prvky S – disjunktní ② $\bigcup S = X$ ③ $\emptyset \notin S$

1. $[x]_\sim, [y]_\sim \in S$ předpokládejme, že

$[x]_\sim \cap [y]_\sim \ni z$ – nejsou disjunktní.

$z \in [x]_\sim$ nebo-li $x \sim z$

$z \in [y]_\sim$ znamená $y \sim z$ ze symetrie $z \sim y$

využijme tranzitivitu $\sim$

$x \sim z$ $z \sim y$ ... $\underline{x \sim y}$ proto $x, y \in [x]_\sim, [y]_\sim$

$[x]_\sim = [y]_\sim$

2. $\bigcup S = X$

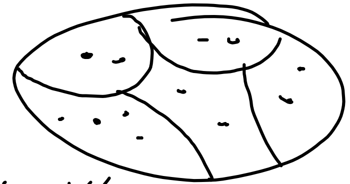
$\bigcup S \subset X$ – protože prvky S jsou podmnož X

$\bigcup S \supset X$

$\forall x \in X$ $x \in [x]_\sim$ – to by platilo kdyby $x \sim x$

to ale platí díky reflexivitě $\sim$.

3. $\emptyset \notin S$ $\forall [x]_\sim \neq \emptyset$ protože $x \in [x]_\sim$



$[x]_\sim$ $X \longrightarrow X/\sim$

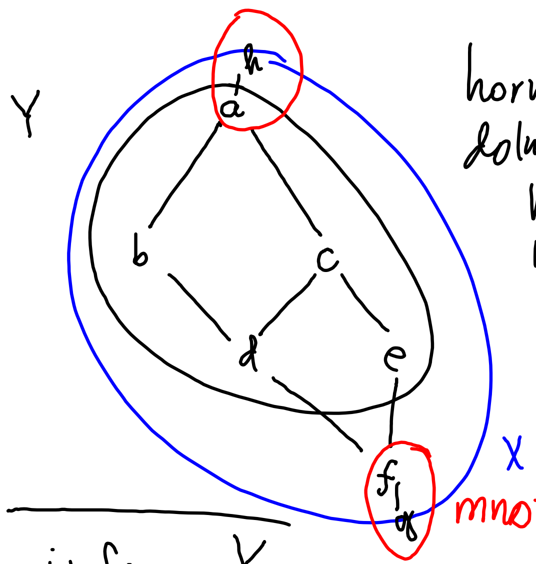
$\pi : x \longrightarrow [x]_\sim$ – faktorová projekce

$X/\sim$: obsahující třídy ekvivalence – faktorová množina

1.6 Uspořádané množiny

$X, \leq, \; Y \subset X$

$x \in X$ – horní závora Y jestliže $Y \leq x$
– dolní závora Y jestliže $x \leq Y$
– největší prvek Y, maximum jestliže x – horní závora a $x \in Y$.
– nejmenší prvek Y minimum jestliže x – dolní závora Y a $x \in Y$.



množina dolních závor

horní závora Y: a, h
dolní závora Y: f, g

$\max Y = a$
$\min Y$ – není
$\inf Y = f$
$\sup Y = a$

<u>infimum</u> Y – prvek $x \in X$ největší dolní závora

$$\inf Y = \max \{x \in X \mid x \leq Y\}$$

supremum Y – nejmenší horní závora

$$\sup Y = \min \{x \in X \mid Y \leq x\}$$

Title: X 10 - 13:36 (3 of 9)

Věta 1.8 Jestliže existuje maximum Y pak existuje i supremum Y a navíc
$$\max Y = \sup Y.$$
Jestliže existuje minimum Y pak existuje i infimum Y a navíc
$$\min Y = \inf Y.$$
Důkaz:
předpokládejme, že $x = \min Y$ tzn. $x \leq Y$, $x \in Y$

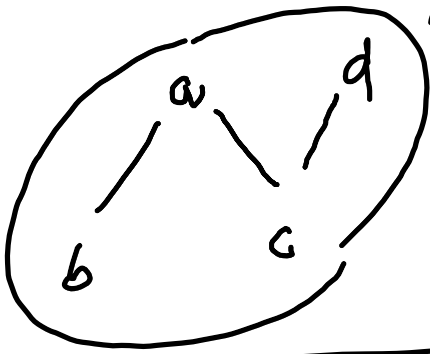
Je-li D – množ. dolních závor, pak $x \in D$

Předp. $y \in D$ větší, čili $x \leq y$

$y \leq Y$ $\qquad$ $y \leq x$ $\Big\}$ $x = y$

$y \leq x$

$X = Y$



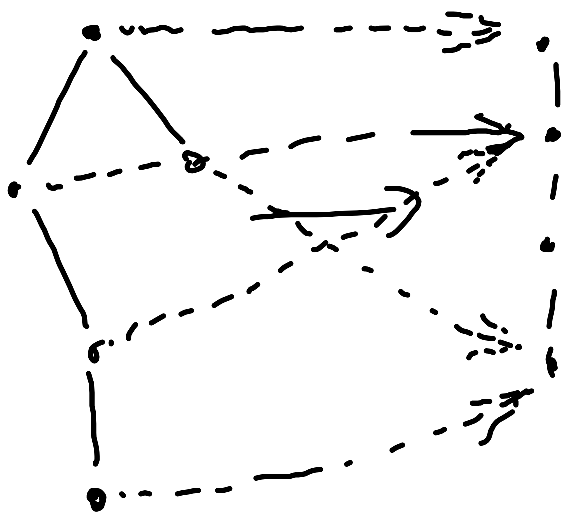
dolní závory $Y = \emptyset$

horní závory $Y = \emptyset$

Izotonní zobrazení

$f : \underset{\leq}{X} \longrightarrow \underset{\preccurlyeq}{Y}$ $\forall x, y \in X$ platí, že

je-li $x \leq y$ potom $f(x) \preccurlyeq f(y)$



REÁLNÁ ČÍSLA FUNKCE REÁLNÉ PROMĚNNÉ

X - množina $*: X \times X \longrightarrow X$
je binární operace na X

zápis $*(x,y)$ nahrazujeme $x * y$

$*$ je <u>komutativní</u> jestliže $\forall x,y \in X$
platí $x*y = y*x$

<u>asociativní</u> jestliže $\forall x,y,z \in X$

$$(x*y)*z = x*(y*z)$$

Prvek $e \in X$ nazveme <u>neutrálním prvkem</u> vzhledem k $*$ $\forall x \in X$

$$x*e = x \quad \ldots\ldots \quad x*e_1 = x$$
$$e*x = x \quad \ldots\ldots \quad e_2*x = x$$

Věta 2.1 Každá binární operace má nejvýše jeden neutrální prvek.

Důkaz: Předp. e_1, e_2 jsou dva různé neutrál. prv.

$$\left.\begin{array}{l} e_2*e_1 = e_2 \\ e_2*e_1 = e_1 \end{array}\right\} e_2 = e_1$$

Y^X – množina zobrazení z X do Y

$\cup : \exp X \times \exp X \longrightarrow \exp X$

komutativní, asociativní, neutrální prvek $\emptyset$

$\forall Y \subset X \qquad Y \cup \emptyset = Y$

$\emptyset \cup Y = Y$

$\cap : \exp X \times \exp X \longrightarrow \exp X$

komutativní, asociativní, neutrální prvek X

$Y \subset X \qquad Y \cap X = Y$

$X \cap Y = Y$

$\setminus : \exp X \times \exp X \longrightarrow \exp X$

není komutativní, není asociat., neutr. prvek není

$Y \setminus \emptyset = Y$

$\emptyset \setminus Y \neq Y$

Title: X 10 - 14:49 (7 of 9)

Řekneme, že $y \in X$ je inverzní k $x \in X$ jestliže

$$x * y = e$$
$$y * x = e$$

Věta.: Každý prvek X s asociativní operací $*$ má vzhledem k této operaci nejvýše jednu inverzi.

Důkaz $x \in X$, $y_1, y_2 \in X$ - dvě jeho různé inverze

$$y_1 = y_1 * e = y_1 * (x * y_2) = (y_1 * x) * y_2 =$$
$$= e * y_2 = y_2.$$

Označení: $x \in X$ $\quad x^{-1}$ – inverzi k x

$\circ : X^X \times X^X \longrightarrow X^X$ - kompozice zobrazení $X \longrightarrow X$

neutrální prvek $\quad f : X \to X$

$$f \circ id_X = f$$
$$id_X \circ f = f$$

2.2 POLE

Množina X – pole když

1. binární operace: komutativní, asociativní, neutrální prvek, každé $x \in X$ má inverzi
   sčítání $+$, 0, $-x$
2. binární operace komutativní, asociativní, neutrální prvek $\neq 0$ a $\forall x \neq 0$ má inverzi
   násobení $\cdot$, 1, x^{-1}
3. $\forall x, y, z \in X$ platí
   $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$ – distributivní zákon

Věta: 2.3

1. $0 \cdot x = 0$
2. 0 nemá inverzi vzhledem k násobení
3. $(-1) \cdot x = -x$.

Důkaz:

1. označme si $y := 0 \cdot x$ $\quad 0+0=0$

$0x = (0+0) \cdot x = 0x + 0x$

$y = y+0 = y+(y-y) =$ $\quad y = y+y$

$= (y+y) - y = y - y = 0$

2. $0 \cdot 0^{-1} = 1$ podle 1. $0 \cdot 0^{-1} = 0$ $\quad 0 = 1$

3. $\boxed{(-1)x} = -x$

$x + (-1)x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = x \cdot (1 + (-1)) =$

$= x \cdot 0 = 0$