8. Integrální počet v $\mathbb{R}$

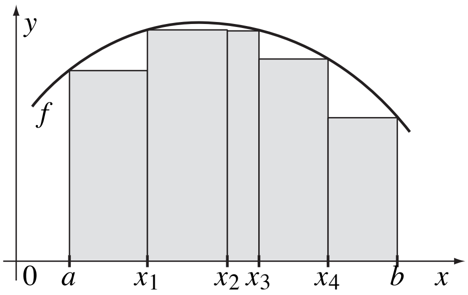
V této kapitole se dostáváme k dalšímu stěžejnímu pojmu matematické analýzy k pojmu *integrál*. Definujeme zde nejprve Riemannův integrál z ohraničené funkce na uzavřeném (ohraničeném) intervalu. Uvádíme základní tvrzení pro Riemannův integrál. Definujeme pojem *primitivní funkce* a uvádíme jej v souvislost s integrálem. Odvozujeme pravidla pro výpočet neurčitých integrálů metodou *per-partes* a *substitucí*.

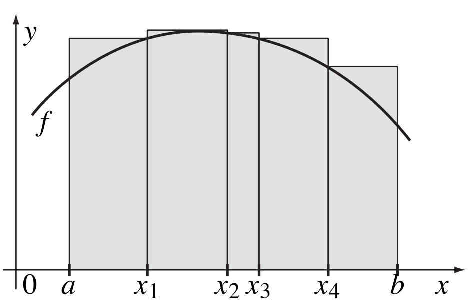
Na závěr kapitoly je integrál rozšířen i pro neomezené funkce a otevřené intervaly (včetně nevlastních) definicí *nevlastního integrálu*. Je zde též uvedeno integrální kritérium konvergence řad.

8.1 Riemannův integrál. V celé této kapitole budeme uvažovat interval $[a, b]$ a funkci $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takovou, že $[a, b] \subset X$ a f je na $[a, b]$ omezená.

Motivací k pojmu integrál je problém zjištění plochy rovinného obrazce vymezeného osou x, přímkami $x = a$, $x = b$ a grafem funkce f. Přičemž tu část plochy obrazce, která leží pod osou x bereme se záporným znaménkem. Tomuto obrazci někdy říkáme *podgraf.*

Vycházíme ze znalosti plochy obdélníku, která je definována jako součin délek jeho stran. Je proto celkem přirozené k definici plochy podgrafu postupovat následujícím způsobem. Rozdělíme interval $[a, b]$ na konečný počet podintervalů. Na každém z těchto podintervalů sestrojíme obdélníky o výšce maximální hodnoty funkce na tomto intervalu a o výšce minimální hodnoty. Součet ploch obdélníků maximálních výšek nad podintervaly nám dá horní ohraničení plochy podgrafu, obdobně dostaneme dolní ohraničení ze součtu ploch obdélníků s minimálními výškami. Budou-li se podintervaly zužovat, horní a dolní ohraničení by mohly konvergovat ke stejné hodnotě — ploše podgrafu.
Následuje formální popis uvedeného postupu.





Dělením intervalu $[a, b]$ rozumíme libovolnou uspořádanou $(n+1)$-tici $\Delta = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$ reálných čísel takovou, že $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Číslo

$$|\Delta| = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \cdots, x_n - x_{n-1}\} \quad (8.1.1)$$

nazýváme *norma dělení* Δ. Dělení $\Delta' = (y_0, y_1, \ldots, y_m)$ je *zjemnění* dělení $\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, jestliže pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ existuje $j \in \{1, \ldots, m\}$ takové, že $x_i = y_j$.[1)] Pod pojmem *společné zjemnění* dělení Δ' a Δ'' myslíme dělení obsahující právě ty body, které patří do dělení Δ' nebo do dělení Δ''.

Množinu všech dělení intervalu $[a, b]$ budeme označovat $D[a, b]$. Nechť $\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ je dělení intervalu $[a, b]$. Pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ klademe

$$m_i(f, \Delta) = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x),$$
$$M_i(f, \Delta) = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x),$$

(supremum i infimum vždy existují a leží v $\mathbb{R}$, neboť f je na $[a, b]$ omezená). Dále klademe[2)]

[1)]Dělení Δ' obsahuje všechny body dělení Δ. Evidentně musí být $m \geq n$.
[2)]Co máme na mysli, napíšeme-li $\sum_{i=1}^{n} x_i$, jsme zatím nevysvětlili, spoléháme na tebe, čtenáři.

$$s(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f, \Delta) \cdot (x_i - x_{i-1}),$$
$$S(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f, \Delta) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Číslo $s(f, \Delta)$ nazýváme *dolní integrální součet funkce f vzhledem k dělení Δ*. Podobně číslo $S(f, \Delta)$ nazýváme *horní integrální součet funkce f vzhledem k dělení Δ*.

Než přistoupíme k definování pojmu integrál, odvodíme si několik tvrzení tykajících se integrálních součtů, které budeme později potřebovat.

Lemma 8.1. *Je-li Δ' zjemněním dělení Δ, potom $s(f, \Delta) \le s(f, \Delta')$ a $S(f, \Delta) \ge S(f, \Delta')$.*
D ů k a z. Nechť $\Delta' = (y_0, y_1, \dots, y_m)$ je zjemněním $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_n)$. Zvolme $i \in \{1, \dots, n\}$. Jelikož Δ' je zjemněním Δ, existují $k, l \in \{1, \dots m\}$, $k < l$ takové, že $[x_{i-1}, x_i] = [y_k, y_l]$. Je-li $l = k + 1$, potom $m_i(f, \Delta) = \inf_{x \in [y_k, y_l]} f(x)$ a $M_i(f, \Delta) = \sup_{x \in [y_k, y_l]} f(x)$. Ovšem je-li $l > k + 1$, pak

$$m_i(f, \Delta) \le m_{k+1}(f, \Delta'), \quad m_i(f, \Delta) \le m_{k+2}(f, \Delta'), \quad \dots, \quad m_i(f, \Delta) \le m_l(f, \Delta')$$

a

$$M_i(f, \Delta) \ge M_{k+1}(f, \Delta'), \quad M_i(f, \Delta) \ge M_{k+2}(f, \Delta'), \quad \dots, \quad M_i(f, \Delta) \ge M_l(f, \Delta').$$

Odtud dostáváme

$$m_i(f, \Delta)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{j=k+1}^{l} m_j(f, \Delta)(x_j - x_{j-1}) \le \sum_{j=k+1}^{l} m_j(f, \Delta')(y_j - y_{j-1})$$

a

$$M_i(f, \Delta)(x_i - x_{i-1}) \sum_{j=k+1}^{l} M_j(f, \Delta)(x_j - x_{j-1}) \ge \sum_{j=k+1}^{l} M_j(f, \Delta')(y_j - y_{j-1}).$$

Z posledních rovnic dostáváme

$$s(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f, \Delta)(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{m} m_i(f, \Delta')(y_i - y_{i-1}) = s(f, \Delta')$$

a

$$S(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f, \Delta)(x_i - x_{i-1}) \ge \sum_{i=1}^{m} M_i(f, \Delta')(y_i - y_{i-1}) = S(f, \Delta').$$

Lemma 8.2. *Buďte Δ' a Δ'' dvě dělení, potom $s(\Delta', f) \le S(\Delta'', f)$.*
D ů k a z. Plyne z existence společného zjemnění Δ dělení Δ' a Δ'' a předchozího lemmatu.

Uvažujeme množiny $H = \{S(f, \Delta) \mid \Delta \in D[a, b]\}$ a $D = \{S(f, \Delta) \mid \Delta \in D[a, b]\}$. Podle předchozího tvrzení je $H \le D$. Klademe

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup_{\Delta \in D[a,b]} S(f, \Delta) \tag{8.1.2}$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf_{\Delta \in D[a,b]} s(f, \Delta) \tag{8.1.3}$$

(supremum i infimum vždy existuje (jedná se o neprázdné množiny) a leží v $\mathbb{R}$, neboť je f na $[a, b]$ omezená leží v $\mathbb{R}$). Číslo $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$ nazýváme *dolní integrál funkce f na intervalu* $[a, b]$, číslo $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$ nazýváme *horní integrál funkce f na intervalu* $[a, b]$.

Funkce f se nazývá *integrovatelná na intervalu* $[a, b]$, je-li splněna podmínka

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{8.1.4}$$

Číslo $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$ se označuje symbolem $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a nazývá *(Riemannův) integrál funkce f na intervalu* $[a, b]$. Dále klademe $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Uvažujme konstantní funkci $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, tedy $f(x) = c$ pro všechna $x \in [a, b]$; ukážeme, že funkce f je integrovatelná na $[a, b]$ a $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = c(b - a)$. Je-li $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ libovolné dělení intervalu $[a, b]$, pak protože je f konstantní, máme $M_i(f, \Delta) = m_i(f, \Delta) = c$ pro každé $i = 1, \dots, n$. Následně

$$S(f, \Delta) = s(f, \Delta) = c \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = c(b - a).$$

Jelikož toto platí pro každé dělení $\Delta \in D[a, b]$, dostáváme, že $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = c(b-a)$. To znamená, že je f integrovatelná na $[a, b]$ a platí

$$\int_a^b c\,\mathrm{d}x = c(b - a). \tag{8.1.5}$$

Uvažujme Dirichletovu funkci ϱ.[3)] Je-li $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ dělení intervalu $[a, b]$, pak pro každé $i = 1, \dots, n$ je $M_i(\varrho, \Delta) = 1$ (interval $[x_i, x_{i-1}]$ obsahuje racionální číslo) a $m_i(\varrho, \Delta) = 0$ (proč?). To znamená, že

$$S(\varrho, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} 1(x_i - x_{i-1}) = b - a \quad \text{a} \quad s(\varrho, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} 0(x_i = x_{i-1}) = 0. \tag{8.1.6}$$

Rovnice (8.1.6) platí pro každé dělení $\Delta \in D[a, b]$, platí tedy

$$\overline{\int_a^b} \varrho(x)\,\mathrm{d}x = b - a \quad \text{a} \quad \underline{\int_a^b} \varrho(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Proto funkce ϱ není na $[a, b]$ integrovatelná.

Lemma 8.3. *Nechť f je omezená na intervalu $[a, b]$. Pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že je-li Δ dělení $[a, b]$ s $|\Delta| < \delta$, potom*

$$S(f, \Delta) - \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon, \tag{8.1.7}$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - s(f, \Delta) < \varepsilon. \tag{8.1.8}$$

D ů k a z. Provedeme pouze důkaz vztahu (8.1.7), důkaz vztahu (8.1.8) je obdobný.

Zvolme $\varepsilon > 0$. K tomuto číslu existuje dělení $\Delta' = (y_0, y_1, \dots, y_p)$ intervalu $[a, b]$ takové, že

$$S(f, \Delta') - \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8.1.9}$$

Protože f je omezená, existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že $|f(x)| \le K$ pro každé $x \in [a, b]$. Položme $\delta = \varepsilon/(4Kp)$.

Nyní ukážeme, že je-li $\Delta(x_0, x_1, \dots, x_n)$ dělení $[a, b]$ s $|\Delta| < \delta$, potom $S(f, \Delta) - S(f, \Delta') < \varepsilon/2$. Toto spolu s rovnicí (8.1.9) dokáže (8.1.7).

Nechť $\Delta'' = (z_0, z_1, \dots, z_m)$ je společné zjemnění dělení Δ' a Δ. Podle Lemmatu 8.1 platí

[3)]Zopakujme si, že $\varrho(x) = 1$, je-li x racionální a $\varrho(x) = 0$, je-li x iracionální.

$$S(f, \Delta'') \le S(f, \Delta'). \tag{8.1.10}$$

Počítejme rozdíl $S(f, \Delta) - S(f, \Delta'')$. Je-li $(x_i, x_{i-1}) = (z_k, z_{k-1})$ interval neobsahující žádný bod y_j, potom $M_i(f, \Delta)(x_i - x_{i-1}) = M_k(f, \Delta'')(z_k - z_{k-1})$. Rozdíl $S(f, \Delta) - S(f, \Delta'')$ tedy stačí počítat pouze na intervalech $[x_i, x_{i-1}] = [z_s, z_r]$, kde $s - r > 1$. V tomto případě platí

$$\Big| \sum_{k=r+1}^{s} M_k(f, \Delta'')(z_k - z_{k-1}) \Big| \le K \sum_{k=r+1}^{s} (z_k - z_{k-1}) = K(z_r - z_s) = K(x_i - x_{i-1}) < K\delta.$$

Protože každý takový interval obsahuje některý bod y_j, jejich počet je nanejvýš p. Dostáváme

$$|S(f, \Delta) - S(f, \Delta'')| < p2K\delta = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Jelikož Δ'' je zjemněním Δ, je absolutní hodnota v předchozí rovnici zbytečná. Spolu s (8.1.10) dostáváme

$$S(f, \Delta) - S(f, \Delta') < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8.1.11}$$

Nakonec (8.1.11) a (8.1.9) dává

$$S(f, \Delta) - \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = S(f, \Delta) - S(f, \Delta') + S(f, \Delta') - \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Věta 8.4. *Nechť f je omezená na $[a, b]$.*
1. Je-li f integrovatelná na $[a, b]$, pak pro každou posloupnost (Δ_n) dělení intervalu $[a, b]$ s $\lim |\Delta_n| = 0$ platí

$$\lim_{n\to\infty} s(f, \Delta_n) = \lim_{n\to\infty} S(f, \Delta_n) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{8.1.12}$$

2. Existuje-li posloupnost (Δ_n), $\Delta_n \in D[a, b]$ s $\lim |\Delta_n| = 0$ a $\lim_{n\to\infty} s(f, \Delta_n) = \lim_{n\to\infty} S(f, \Delta_n)$, pak je f integrovatelná na $[a, b]$ a platí (8.1.12).

D ů k a z. 1. Nechť integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje. Dokážeme rovnost (8.1.12) pro limitu horních součtů. Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle Lemmatu 8.3 existuje $\delta > 0$ takové, že

$$S(f, \Delta) - \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = S(f, \Delta) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon \tag{8.1.13}$$

pro Δ s $|\Delta| < \delta$. Jelikož $\lim_{n\to\infty} |\Delta_n| = 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n > n_0$ je $|\Delta_n| < \delta$; to znamená, že pro ně platí (8.1.13).

2. plyne z toho, že $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$ a z toho, že podle Lemmatu 8.3 musí být

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon$$

pro každé $\varepsilon > 0$.

Důsledek 8.5 (Kritérium integrovatelnosti). *Buď f omezená funkce na $[a, b]$. Funkce f je na $[a, b]$ integrovatelná, právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje dělení Δ takové, že $S(f, \Delta) - s(f, \Delta) < \varepsilon$*

Příklad 8.6. Nechť $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ je funkce taková, že $f(x) = 0$ pro všechna $x \in [a, b]$ až na $x \in \{c_1, c_2, \dots c_k\}$. Ukážeme, že $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Uvažujme posloupnost dělení (Δ_n) intervalu $[a, b]$ takovou, že $|\Delta_n| < 1/(2kMn)$, kde $M = \max\{|f(c_1)|, |f(c_2)|, \dots, |f(c_k)|\}$. Obsahuje-li interval $[x_{i-1}, x_i]$ některý z bodů c_j, platí $0 < M_i(f, \Delta_n) \leq M$ a $-M \leq m_i(f, \Delta_n) < 0$; jinak $M_i(f, \Delta) = 0$ a $m_i(f, \Delta_n) = 0$. Protože každé z čísel c_j může náležet nanejvýše dvěma intervalům ze systému $\{[x_{i-1}, x_i] \mid i = 1, \dots, n\}$, máme

$$S(f, \Delta_n) \leq 2kM|\Delta_n| < 1/n \quad \text{a} \quad s(f, \Delta_n) \geq -2kM|\Delta_n| > -1/n.$$

Limity $\lim S(f, \Delta_n)$ a $\lim s(f, \Delta_n)$ existují, rovnají se nule a podle věty 8.4 je f integrovatelná a platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\left(\pm\frac{1}{n}\right) = 0.$$

Uvažujme funkci $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ na intervalu $[0, 1]$, dále mějme posloupnost dělení (Δ_n), $\Delta_n = (0, 1/n, 2/n, \dots, n/n)$. Jelikož $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ je na intervalu $[i/n, (i+1)/n]$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, rostoucí, platí $M_i(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}, \Delta_n) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}((i+1)/n) = (i+1)/n$ a $m_i(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}, \Delta_n) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}(i/n) = i/n$. Proto

$$S(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}, \Delta_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{n}\frac{1}{n} = \frac{1+n}{2n}, \qquad \text{(ověřte!)}$$

$$s(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}, \Delta_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n}\frac{1}{n} = \frac{n-1}{2n}. \qquad \text{(ověřte!)}$$

Pro funkci $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ a posloupnost dělení (Δ_n) jsou splněny předpoklady věty 8.4 (speciálně, $\lim S(f, \Delta_n) = \lim s(f, \Delta_n) = \frac{1}{2}$), a proto

$$\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

Věta 8.7. *Je-li f spojitá na $[a, b]$, pak je f na $[a, b]$ integrovatelná.*

D ů k a z. Využijeme toho, že spojitá funkce je na uzavřeném intervalu stejnoměrně spojitá.[4)]

Uvažujme posloupnost dělení (Δ_n) intervalu $[a, b]$ takovou, že $\lim_{n\to\infty} |\Delta_n| = 0$. Ukážeme, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > n_0$ je $|S(f, \Delta_n) - s(f, \Delta_n)| < \varepsilon$. To je postačující pro existenci integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (proč?).

Nechť $\varepsilon > 0$. Ze stejnoměrné spojitosti f plyne existence $\delta > 0$ takového, že pro libovolné $x, y \in [a, b]$, pro které je $|x - y| < \delta$, platí $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/(b-a)$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n > n_0$ je $|\Delta_n| < \delta$ (to lze udělat, protože $\lim_{n\to\infty} |\Delta_n| = 0$). Nyní je-li $[x_{i-1}, x_i]$ interval dělení Δ_n, pro každé $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$ platí $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/(b-a)$. Proto

$$M_i(f, \Delta_n) - m_i(f, \Delta_n) \leq \frac{\varepsilon}{b-a}. \qquad \text{(ověřte!)} \qquad (8.1.14)$$

Odtud dostáváme

$$\begin{aligned} S(f, \Delta_n) - s(f, \Delta_n) &= \sum_{i=1}^{m} M_i(f, \Delta_n)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{m} m_i(f, \Delta_n)(x_i - x_{i-1}) = \\ &= \sum_{i=1}^{m} \big(M_i(f, \Delta_n) - m_i(f, \Delta_n)\big)(x_i - x_{i-1}) \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{m} (x_i - x_{i-1}) = \qquad \text{(podle (8.1.14))} \end{aligned}$$

[4)]Funkce $f\colon X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *stejnoměrně spojitá na $Y \subset X$*, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x, y \in Y$ takové, že $|x - y| < \delta$, je $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

$$= \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Nyní použijeme větu 8.4 a důkaz je ukončen.

Věta 8.8. *Buďte $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ omezené a budiž $c \in \mathbb{R}$. Existují-li integrály $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, pak existují integrály $\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_a^b (cf)(x)\,\mathrm{d}x$ a platí*
1. $\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$;
2. $\int_a^b (cf)(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
D ů k a z. 1. Na každém intervalu $[x_i, x_{i-1}]$, kde x_i jsou body dělení Δ intervalu $[a,b]$, platí

$$\sup_{x\in[x_i,x_{i-1}]} (f+g)(x) \le \sup_{x\in[x_i,x_{i-1}]} f(x) + \sup_{x\in[x_i,x_{i-1}]} g(x) \tag{8.1.15}$$

a

$$\inf_{x\in[x_i,x_{i-1}]} (f+g)(x) \ge \inf_{x\in[x_i,x_{i-1}]} f(x) + \inf_{x\in[x_i,x_{i-1}]} g(x). \tag{8.1.16}$$

Mějme posloupnost dělení Δ_n takovou, že $\lim_{n\to\infty} |\Delta_n| = 0$. Označme $k(n)$ počet intervalů dělení Δ_n. Z nerovnic (8.1.15) a (8.1.16) dostáváme

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{k(n)} m(f,\Delta_n)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{k(n)} m(g,\Delta_n)(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{k(n)} m(f+g,\Delta_n)(x_i - x_{i-1}) \le \\ &\le \sum_{i=1}^{k(n)} M(f+g,\Delta_n)(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{k(n)} M(f,\Delta_n)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{k(n)} M(g,\Delta_n)(x_i - x_{i-1})\end{aligned}$$

a

$$s(f,\Delta_n) + s(g,\Delta_n) \le s(f+g,\Delta_n) \le S(f+g,\Delta_n) \le S(f,\Delta_n) + S(g,\Delta_n). \tag{8.1.17}$$

Jelikož jsou f a g integrovatelné, podle bodu 1. věty 8.4 je limita z obou koncových v (8.1.17) rovna $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. Podle věty o třech limitách je tedy $\lim_{n\to\infty} S(f+g,\Delta_n) = \lim_{n\to\infty} S(f+g,\Delta_n) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ a podle bodu 2. věty 8.4 dostáváme tvrzení věty.

Důkaz bodu 2. je ještě o poznání jednodušší, a proto jej přenecháváme čtenáři.

Věta 8.9. *Nechť f je omezená funkce na $[a,b]$ a $c \in (a,b)$. Integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje, právě když existují integrály $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a platí*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad \textit{(aditivita)} \tag{8.1.18}$$

D ů k a z. Nechť $\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_l)$ je dělení intervalu $[a,b]$ takové, že $x_k = c$. Označíme-li $\Delta^L = (x_0, x_1, \ldots, x_k)$ a $\Delta^P = (x_k, x_{k+1}, \ldots, x_l)$, vidíme, že Δ^L je dělením $[a,c]$ a Δ^P je dělením $[c,b]$; navíc platí

$$s(f,\Delta) = s(f,\Delta^L) + s(f,\Delta^P) \quad \text{a} \quad S(f,\Delta) = S(f,\Delta^L) + S(f,\Delta^P). \tag{8.1.19}$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. Pokud je f integrovatelná na $[a,b]$, podle důsledku 8.5 existuje dělení Δ intervalu $[a,b]$ takové, že

$$S(f,\Delta) - s(f,\Delta) < \varepsilon. \tag{8.1.20}$$

Můžeme předpokládat, že Δ obsahuje i bod c (pokud ne, přidáním bodu c do Δ se odhad (8.1.20) neporuší). Kombinací (8.1.19) a (8.1.20) dostáváme $S(f,\Delta^L) - s(f,\Delta^L) + S(f,\Delta^P) - s(f,\Delta^P) < \varepsilon$. Jelikož horní součet je větší nebo roven než dolní součet, dostáváme $S(f,\Delta^L) - s(f,\Delta^L) < \varepsilon$ a

$S(f, \Delta^P) - s(f, \Delta^P) < \varepsilon$. Opět podle důsledku 8.5 je f integrovatelná na $[a, c]$ a na $[c, b]$.

Nyní pokud f je integrovatelná na $[a, c]$ a $[c, b]$, existují dělení Δ^L Δ^P příslušných intervalů tak, že

$$S(f, \Delta^L) - s(f, \Delta^L) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad S(f, \Delta^P) - s(f, \Delta^P) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Označme Δ dělení intervalu $[a, b]$ obsahující body dělení Δ^L a Δ^P. Využijeme (8.1.19) a předchozích nerovností, z předchozích nerovnic dostáváme $S(f, \Delta) - s(f, \Delta) = S(f, \Delta^L) + S(f, \Delta^P) - s(f, \Delta^L) - s(f, \Delta^P) = \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Což podle důsledku 8.5 dokazuje integrovatelnost f na $[a, b]$.

Vztah (8.1.18) dostaneme, aplikujeme-li (8.1.19) na posloupnost dělení Δ_n intervalu $[a, b]$ takovou, že $\lim_{n\to\infty} |\Delta_n| = 0$.

Věta 8.10. *Buďte $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ takové, že $f(x) = g(x)$ pro $x \in [a, b] \setminus \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$. Potom je-li g integrovatelná na $[a, b]$, je integrovatelná na $[a, b]$ i f a platí $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.*
D ů k a z. Položme $h = f - g$. Platí tedy, že $f = h + g$. Funkce h je rovna nule na celém $[a, b]$ vyjma bodů $c_1, c_2, \dots, c_k$. Podle příkladu 8.6 to znamená, že je integrovatelná a $\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Podle věty 8.8 integrál z f na $[a, b]$ existuje a platí $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

8.2 Integrál jako funkce horní meze, primitivní funkce, neurčitý integrál. Uvažujme funkci $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Funkci $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ nazveme *primitivní funkce k funkce f*, jestliže platí $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in (a, b)$. Primitivní funkce není k funkci f určena jednoznačně, jejich vztah ukazuje následující věta.

Věta 8.11. *Nechť $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ spojitá a F, G dvě primitivní funkce k f, potom $F - G$ je konstantní.*
D ů k a z. Plyne z důsledku 7.15.

Na tomto místě bychom rádi definovali neurčitý integrál z funkce jako k ní primitivní funkci. Jenomže, má-li funkce primitivní funkci, existuje takových funkcí nekonečně mnoho, a takový pojem by nebyl definován jednoznačně. Naštěstí podle věty 8.11, je-li f definována na intervalu, liší se jedna primitivní funkce od druhé jen o konstantní funkci. To nám umožní následující definici.

Pod pojmem *neurčitý integrál funkce f na intervalu J* rozumíme množinu všech primitivních funkcí k f na J.[5)] Vzhledem k řečenému ji lze charakterizovat jen jedinou z nich. Neurčitý integrál z f značíme $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. Je-li F nějaká primitivní funkce k f na J, píšeme

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c.$$

Symbol c zastupuje všechny možné konstantní funkce a říkáme mu *integrační konstanta*. Nebude-li to nezbytně nutné, nebudeme ji pro přehlednost většinou psát. Čtenář by si její přítomnost měl i přesto uvědomovat.

Uvažujme funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ pro $x \neq 0$ a $f(x) = 1$ pro $x = 0$. Kdyby k této funkci existovala primitivní funkce F, musela by být konstantní na intervalech $(-\infty, 0)$ i $(0, \infty)$ (o tom se lze přesvědčit pomocí věty o střední hodnotě). Označme tyto konstanty a, b. Kdyby $a \neq b$, pak by $F'(0)$ byla nevlastní nebo by neexistovala, ale $F'(0)$ má být rovna 1; v případě $a = b$ dostaneme $F'(0) = 0$, což je také špatně. K funkci f tedy primitivní funkce neexistuje.

Věta 8.12. *Nechť $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ je integrovatelná na $[a, b]$, spojitá v $x_0 \in (a, b)$ a $c \in (a, b)$. Potom pro funkci $F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}x$ platí $F'(x_0) = f(x_0)$.*
D ů k a z. Dokážeme, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že je-li $|h| < \delta$, potom

$$f(x_0) - \varepsilon \leq \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \leq f(x_0) + \varepsilon. \tag{8.2.1}$$

[5)]Jde vlastně o třídu ekvivalence na množině funkcí vzhledem k ekvivalenci „rozdíl je konstantní funkce."

Zvolme $\varepsilon > 0$. Protože f je spojitá v x_0 existuje $\delta > 0$ takové, že $f(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0 + \varepsilon))$. Neboli $f(x_0) - \varepsilon < f|_{[x_0 - h, x_0 + h]} < f(x_0) + \varepsilon$.

Nyní je-li $0 < h < \delta$, platí jednak

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_c^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_c^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t. \qquad (8.2.2)$$

a jednak

$$\begin{aligned}
&\int_{x_0}^{x_0+h} (f(x_0) - \varepsilon)\,\mathrm{d}t \le \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t \le \int_{x_0}^{x_0+h} (f(x_0) + \varepsilon)\,\mathrm{d}t,\\
&(f(x_0) - \varepsilon)h \le \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t \le (f(x_0) + \varepsilon)h,\\
&f(x_0) - \varepsilon \le \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t \le f(x_0) + \varepsilon. \qquad (8.2.3)
\end{aligned}$$

Z rovnice (8.2.2) a nerovnice (8.2.3) už (8.2.1) plyne. Případ kdy $-\delta < h < 0$ se dokáže obdobně.

Důsledek 8.13. *Nechť $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá na (a, b) a $c \in (a, b)$, potom $F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}x$ je primitivní k f.*

Věta 8.14. *Předpokládejme, že existují neurčité integrály z f a g na intervalu (a, b), a nechť $c \in \mathbb{R}$. Potom existují neurčité integrály $\int (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x$ a $\int (cf)(x)\,\mathrm{d}x$ a platí:*
1. $\int f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$.
2. $\int (cf)(x)\,\mathrm{d}x = c \int f(x)\,\mathrm{d}x$.[6)]

D ů k a z. Označme si F primitivní funkci k f a G primitivní funkci k g obě na intervalu (a, b). Podle věty 7.5 platí $(F + G)' = F' + G' = f + g$. To znamená, že $F + G$ je primitivní k $f + g$.

Opět podle věty 7.5 platí $(cF)' = cF' = cf$, tedy cF je primitivní funkce k cf.

Věta 8.15 (Per partes). *Nechť $u, v\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ jsou funkce, které mají v $[a, b]$ spojité derivace. Potom platí*

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (8.2.4)$$

D ů k a z. Předně všechny integrály v (8.2.4) existují podle důsledku 8.13; jedná se o spojité funkce.

Platí $(uv)' = u'v + uv'$, primitivní funkce k funkci $(uv)'$ je uv, proto $uv(x) = \int u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$ (podle věty 8.14). Odtud již (8.2.4) přímo plyne.

Vypočtěme integrál $\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$. Položíme $u(x) = x$ a $v'(x) = \mathrm{e}^x$.[7)] Nejprve si vypočteme $u'(x) = 1$ a dále $v(x) = \mathrm{e}^x$ (není to jediná možnost, další je $v(x) = \mathrm{e}^x + 1$, nám ale bude stačit jedna). Využijeme předchozí větu a dostaneme

$$\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x.$$

Vypočtěme integrál $\int \ln(x)\,\mathrm{d}x$. Nyní nechť $u(x) = \ln(x)$ ($\ln(x)$ přeci nemůže být $v'(x)$, nevěděli bychom, co je $v(x)$) a zbývá $v'(x) = 1$. Opět pomocí vzorce (8.2.4) máme

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - \int 1\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - x.$$

[6)]Zde jsme se v zápisu rovnice dopustili drobné nepřesnosti. Na pravé straně by měla být množina funkcí obsahující c-násobek primitivní funkce k f. Pokud by c bylo rovno nule, zůstala by na pravé straně jen nulová funkce a ne všechny konstantní.

[7)]Další možností je zvolit tyto funkce obráceně, to by nám ale integrál, o čemž se můžeš čtenáři přesvědčit, jen zkomplikovalo.

O správnosti obou předchozích výsledků je možno se přesvědčit jejich derivací.

Věta 8.16 (Substituční metoda I. druhu). *Buď f spojitá v (a, b), nechť $\varphi\colon (\alpha, \beta) \to (a, b)$ má derivaci v (α, β). Potom je-li F primitivní funkce k f, na intervalu (a, b) platí*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(\varphi(t)) + c. \tag{8.2.5}$$

D ů k a z. Máme ukázat, že na intervalu (α, β) je $F \circ \varphi$ primitivní k $(f \circ \varphi)\varphi'$. To ale plyne z toho, že pro $t \in (\alpha, \beta)$ platí $(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

Vypočtěme integrál $\int \sin^2(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x$. Je vidět, že v označení použitém v předchozí větě je $f(x) = x^2$, $\varphi(x) = \sin(x)$ a $\varphi'(x) = \cos(x)$. Proto, víme-li, že primitivní funkce k $f(x) = x^2$ je $F(x) = x^3/3$, můžeme psát:

$$\int \sin^2(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = F(\sin(x)) = \frac{\sin^3(x)}{3}.$$

V praxi, abychom nemuseli vypisovat rovnice vysvětlující co jsme si zvolili za f a za φ, používáme zápis umožňují napsat vše do jedné rovnice:

$$\int \sin^2(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} z = \sin(x) \\ \mathrm{d}z = \cos(x)\,\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int z^2\,\mathrm{d}z = \frac{\sin^3(x)}{3}.$$

Předchozí věta slouží k výpočtu integrálu z funkce ve tvaru $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, známe-li integrál z $f(x)$. Někdy může být ale výhodné vypočítat integrál z $f(x)$ pomocí integrálu z $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ pro nějakou vhodně zvolenou funkci φ. Za jakých podmínek je to možné, nám říká následující věta.

Věta 8.17 (Substituční metoda II. druhu). *Nechť $\varphi\colon (\alpha, \beta) \to (a, b)$ je surjekce a φ' existuje na (α, β), nechť $\psi\colon (a, b) \to (\alpha, \beta)$ je zobrazení, pro které $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{(a,b)}$.*[8] *Potom, je-li f spojitá, platí*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = G(\psi(x)), \quad \textit{kde } G(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{8.2.6}$$

D ů k a z. Označme F primitivní funkci k f na (a, b). Máme dokázat, že $F(x) = G(\psi(x)) + c$. Platí $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$ pro $t \in (\alpha, \beta)$, což podle věty 8.11 znamená, že na intervalu (α, β) platí $G(t) = F(\varphi(t)) + c$. Ke každému $x \in (a, b)$ existuje $t \in (\alpha, \beta)$ tak, že $\psi(x) = t$, proto na (a, b) platí $G(\psi(x)) = F(\varphi(\psi(x))) + c = F(x) + c$.

Vypočteme integrál

$$\int \frac{1}{x^2 + 4}\,\mathrm{d}x.$$

Použijeme substituční metodu. Položme $\varphi(t) = 2t$, tato funkce je bijektivní na celém $\mathbb{R}$, její inverze je $\psi(x) = x/2$. V tomto příkladě je $f(x) = 1/(x^2 + 4)$. Označíme-li si tedy $t = \psi(x)$, máme

$$\int \frac{1}{x^2 + 4}\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{(2t)^2 + 4} 2\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2} \int \frac{1}{t^2 + 1}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \tfrac{1}{2}\arctan(t) = \tfrac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right).$$

Vypočtěme integrál

[8]Funkci ψ říkáme *pravá inverze*. Snadno se přesvědčíte, že každá surjekce má pravou inverzi a tato funkce musí být injektivní. Tedy ψ musí být injektivní.

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x. \tag{8.2.7}$$

Použijeme druhou substituční metodu. V označení věty 8.17 položíme $\varphi = \sin$, ta je surjektivní na definiční obor integrované funkce — interval $[-1, 1]$. Její pravá inverze je $\psi = \arcsin$. Pro odlišení používáme jiné značení pro proměnnou v integrované funkci a a jako pomůcku pro sestavení nového integrálu, uvádíme: $x = \sin(t)$, proto $1\,\mathrm{d}x = \cos(t)\,\mathrm{d}t$. Místo integrálu v (8.2.7) počítáme následující integrál.

$$\int \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\,\mathrm{d}t = \int \cos^2(t) = \\ = \tfrac{1}{2}(\sin(t)\cos(t)+t). \qquad \text{(ověřte!)}$$

Nyní, jak nám říká věta o druhé substituční metodě, do výsledné primitivní funkce dosadíme inverzi (substituce zpět). Dostáváme

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin(x)\right).$$

Věta 8.18 (Newtonova-Leibnizova formule). *Buď $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ omezená, F primitivní funkce k f. Předpokládejme, že existuje $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Potom*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a). \qquad \textit{(Newtonova-Leibnizova formule)} \tag{8.2.8}$$

D ů k a z. Je-li $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_m)$ libovolné dělení intervalu $[a,b]$, pak podle věty o střední hodnotě pro každé $i \in \{1,\dots,m\}$ existuje $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ takové, že

$$F'(\xi_i) = \frac{F(x_i)-F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}.$$

Jelikož F je primitivní funkce k f, dostaneme

$$F(x_i)-F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

To znamená, že pro každé dělení Δ platí

$$s(f,\Delta) = \sum_{i=1}^m m_i(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^m f'(\xi)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^m \left(F(x_i)-F(x_{i-1})\right) = \\ = F(b)-F(a) \le \sum_{i=1}^m M_i(x_i - x_{i-1}) = S(f,\Delta). \tag{8.2.9}$$

Nechť (Δ_n) je posloupnost dělení intervalu $[a,b]$ taková, že $\lim|\Delta_n| = 0$. Pro každé dělení Δ_n platí (8.2.9). Nyní využijeme větu o třech limitách a dostaneme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} s(f,\Delta_n) \le F(b)-F(a) \le \lim_{n\to\infty} S(f,\Delta_n) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důsledek 8.19 (Newtonova-Leibnizova formule pro per partes). *Nechť $u, v\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ jsou funkce, které mají v $[a,b]$ spojité derivace. Potom existuje integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a platí*[9)]

[9)] Často se setkáte se setkáte se zápisem $\displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x.$

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{8.2.10}$$

D ů k a z. Integrály $\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$ existují podle věty 8.7, zbývá tedy pouze dokázat vztah (8.2.10). Označme si $f(x) = u'(x)v(x)$, podle věty 8.15 je $F(x) = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$ primitivní funkce k f. Nyní využijeme Newton-Leibnizovy formule a dostaneme (8.2.10).

Důsledek 8.20 (Newtonova-Leibnizova formule pro substituci). *Nechť $\varphi\colon [\alpha, \beta] \to [A, B]$ má v $[\alpha, \beta]$ spojitou derivaci a f nechť je spojitá v $[A, B]$. Potom integrály v (8.2.11) existují a*

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{8.2.11}$$

D ů k a z. Funkce f a $(f \circ \varphi)\varphi'$ jsou spojité a integrály v (8.2.11) tedy existují podle věty 8.7. Jde tedy jen o dokázání rovnosti (8.2.11). Podle věty 8.17 (její předpoklady jsou splněny (ověřte!)) je $F \circ \varphi$ primitivní k $(f \circ \varphi)\varphi'$ na $[\alpha, \beta]$, F jsme si dovolili označit primitivní funkci k f na $[A, B]$ (ta dozajista existuje podle důsledku 8.13). Podle věty 8.18 je $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = (F \circ \varphi)(\beta) - (F \circ \varphi)(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$. Podle téže věty pravá strana rovnice má tvar $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$.

Pomocí předchozích vět, vypočtěme integrál

$$\int_{-1}^1 (3-4)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Využijeme Newton-Leibnizovy formule pro per-partes, v níž $u(x) = 3 - 4x$ a $v' = \mathrm{e}^{-x}$. Máme

$$\int_{-1}^1 (3-4)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = 3-4x & u' = 4 \\ v' = \mathrm{e}^{-x} & v = -\mathrm{e}^{-x} \end{vmatrix} = \Big[(4x-3)\mathrm{e}^{-x}\Big]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 4\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \mathrm{e}^{-1} + 7\mathrm{e} + \Big[4\mathrm{e}^{-1}\Big]_{-1}^1 = \mathrm{e}^{-1} + 7\mathrm{e} + 4\mathrm{e}^{-1} - 4\mathrm{e}^1 = 5\mathrm{e}^{-1} + 3\mathrm{e}.$$

Vypočtěte

$$\int_3^4 x\sqrt{25 - x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Použijeme Newton Leibnizovy formule pro substituci, položme $\varphi(x) = 25 - x^2$. Máme $\varphi'(x) = -2x$, proto $\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}z$, dále $\varphi(3) = 16$ a $\varphi(4) = 9$. Tak dostáváme

$$\int_3^4 x\sqrt{25 - x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{16}^9 \sqrt{z}\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\int_9^{16} \sqrt{z}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\frac{2}{3}\Big[z^{3/2}\Big]_9^{16} = \frac{1}{3}(64 - 27) = \frac{37}{3}.$$

Kontrolní otázky

1. Lze vypočítat každý Riemannův integrál pomocí Newton-Leibnizovy formule.
2. Proč definujeme Riemannův integrál pouze pro omezené funkce? Kde by definice selhala?
3. Existuje primitivní funkce ke každé funkci?
4. Jak souvisí funkce $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ a primitivní funkce k funkci f?
5. Změní se integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, změníme-li funkci $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ v konečně (spočetně) mnoha bodech intervalu $[a, b]$?

6. Má množina Riemannovsky integrovatelných funkcí algebraickou strukturu? Jakou roli v ní hraje integrál?

8.3 Nevlastní Riemannův integrál. V tomto odstavci se pokusíme rozšířit pojem určitého integrálu i na funkce, které nejsou na intervalu $[a, b]$ (případně (a, b)) omezené, a také o integrál na nevlastním intervalu.

Nejprve rozšíříme pojem určitého integrálu z funkce f na intervalu $[a, b)$ (případně $(a, b]$). Nechť $f\colon [a, b) \to \mathbb{R}$ (případně $f\colon (a, b] \to \mathbb{R}$), ne nutně omezená, připouštíme také případ $b = \infty$ (případně $a = -\infty$), je funkce taková, že $\int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x$ (případně $\int_y^b f(x)\,\mathrm{d}x$) existuje pro každé $y \in (a, b)$.[10] Existuje-li vlastní limita

$$\lim_{y\to b+} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \left(\text{případně} \lim_{y\to a-} \int_y^b f(x)\,\mathrm{d}x\right), \tag{8.3.1}$$

nazveme tuto limitu *nevlastní integrál z f na* $[a, b)$ (případně $(a, b]$) a značíme jej $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Je-li limita v (8.3.1) nevlastní, říkáme, že integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ diverguje.

Zkusme pomocí předchozí definice vypočítat

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}.$$

Pro každé $y \in [0, \infty)$ platí

$$\int_0^y \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \Big[\arctan(x)\Big]_0^y = \arctan(y) - \arctan(0) = \arctan(y).$$

Tedy podle předchozí definice je

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \lim_{y\to\infty} \arctan(y) = \frac{\pi}{2}.$$

Nyní nechť $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ je funkce (ne nutně omezená), která má Riemannův integrál $\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$ pro každý interval $[c, d] \subset (a, b)$ (i zde připouštíme možnost, že (a, b) je nevlastní). Definujeme *nevlastní integrál z f na* (a, b) tak, že zvolme $c \in (a, b)$. Pokud existují nevlastní integrály[11] $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$, klademe $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Definovaný integrál z funkce f na intervalu (a, b), pokud existuje, nesmí záviset na volbě dělícího bodu $c \in (a, b)$, což ukazuje následující lemma.

Lemma 8.21. *Buď $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ splňující podmínky definice nevlastního integrálu na intervalu (a, b) a $c, d \in (a, b)$, $c < d$. Potom*

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^d f(x)\,\mathrm{d}x + \int_d^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{8.3.2}$$

D ů k a z. Provedeme ověření vztahu (8.3.2). V následujícím výpočtu využijeme aditivity integrálu (věta 8.9) a několikrát vět 4.31, 4.32, zejména pro případ, kdy limity vycházejí nevlastní. Pozná čtenář kde?

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to a+} \int_y^c f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{z\to b-} \int_c^z f(x)\,\mathrm{d}x =$$

[10] To mimochodem znamená, že funkce f je omezená na $[a, y]$ (případně $[y, b]$).

[11] Aby nešlo k omylu hned z počátku, existuje-li nevlastní integrál, znamená to, že limita v (8.3.1) je vlastní.

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{y\to a+}\int_y^c f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{z\to b-}\left(\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x \int_c^z f(x)\,\mathrm{d}x\right) = \\
&= \lim_{y\to a+}\int_y^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{z\to b-}\int_d^z f(x)\,\mathrm{d}x = \\
&= \lim_{y\to a+}\int_y^d f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{z\to b-}\int_d^z f(x)\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_a^d f(x)\,\mathrm{d}x + \int_d^b f(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Chceme-li pomocí právě uvedené definice vypočítat integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1},$$

musíme si zvolit nějaký bod $c \in (-\infty,\infty)$ a vypočítat dílčí integrály $\int_{-\infty}^{c} 1/(x^2+1)\,\mathrm{d}x$ a $\int_{c}^{\infty} 1/(x^2+1)\,\mathrm{d}x$ podle definice uvedené na začátku tohoto odstavce.

Zvolme za $c = 0$ a počítejme nejprve $\int_{-\infty}^{c} 1/(x^2+1)\,\mathrm{d}x$. Máme

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} &= \lim_{y\to-\infty}\int_y^0\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \qquad \text{(definice nevlastního integrálu)}\\
&= \lim_{y\to-\infty}\Big[\arctan(x)\Big]_y^0 = \lim_{y\to-\infty}(\arctan(0)-\arctan(y)) = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

Obdobným způsobem dostaneme, že také $\int_0^\infty 1/(x^2+1)\,\mathrm{d}x = \pi/2$. Jelikož existují oba dílčí nevlastní integrály, platí

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \int_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} + \int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \pi.$$

Následující věta nám dává silný nástroj pro zjišťování konvergence řad.

Věta 8.22 (Integrální kritérium). *Nechť $f\colon[1,\infty)\to\mathbb{R}$ je spojitá nezáporná nerostoucí funkce. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konverguje, právě když existuje integrál $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$.*

D ů k a z. Nechť (s_n) je posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$. Jelikož f je nerostoucí pro každé $n > 1$, platí $f|_{(n-1,n)} \geq f(n) \geq f|_{(n,n+1)}$, a protože f je integrovatelná na každém $(n, n+1)$, platí $\int_{n-1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x \geq (n-n+1)f(n) \geq \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$. To znamená, že řada $\sum_{n=2}^{\infty}\int_{n-1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x$ je majorantou řady $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, a minorantou téže řady je řada $\sum_{n=2}^{\infty}\int_{n}^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Uvažujme řadu $\sum 1/n^\alpha$, kde $\alpha\in\mathbb{R}$. Definujeme funkci $f\colon[1,\infty)\to\mathbb{R}$ předpisem $f(x) = 1/x^\alpha$. Řady $\sum 1/n^\alpha$ a $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ jsou totožné (zamyslete se nad tím!). Prozkoumejme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ užitím kritéria 8.22. Jelikož

$$\int_1^\infty\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \lim_{y\to\infty}\int_1^y\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha},$$

pro $\alpha \neq 1$ máme

$$\int_1^\infty\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \lim_{y\to\infty}\left[\frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}\right]_1^y = \lim_{y\to\infty}\frac{1}{(1-\alpha)y^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha}, \tag{8.3.3}$$

pro $\alpha = 1$

$$\int_1^\infty\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \lim_{y\to\infty}\Big[\ln(x)\Big]_1^y = \lim_{y\to\infty}\ln(y) = \infty.$$

Limita v (8.3.3) je vlastní pro $\alpha > 1$. Celkově tedy $\sum 1/n^\alpha$ konverguje pro $\alpha > 1$ a diverguje pro $\alpha \leq 1$.

8.4 Integrace racionálních lomených funkcí. Velice často doporučované substituce převedou počítaný integrál na integrál z podílu dvou polynomů. Takovýmto podílům říkáme *racionální lomené funkce* a v tomto odstavci se zaměříme na jejich integraci. Předpokládáme, že čtenář je obeznámen se základními pojmy týkající se polynomů (jako je například stupeň, koeficient, kořen a podobně).

Integrály velice jednoduchých racionálních lomených funkcí již čtenář zná nebo si je je schopen snadno odvodit. Připomeňme, že $\int 1/(x-a)\,\mathrm{d}x = \ln|x-a|$ a pro $n > 1$ je $\int 1/(x-a)^n\,\mathrm{d}x = 1/((n-1)(x-a)^n)$.

Pomocí následujících vět, které zde uvádíme bez důkazů, lze každou racionální lomenou funkci převést na „jednoduchý tvar," ten lze již velice jednoduše integrovat.

Věta 8.23. *Nechť P a Q jsou polynomy, Q je nenulový. Pak existují polynomy T a R takové, že stupeň R je menší než stupeň P a*

$$P = T \cdot Q + R. \tag{8.4.1}$$

Rovnici (8.4.1) lze přepsat do tvaru, že pro každé $x \in \mathbb{R}$, pro které je $Q(x) \neq 0$, platí

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}. \tag{8.4.2}$$

Polynom T z předchozí věty nazýváme *(částečný) podíl polynomů P a Q* a polynom R *zbytek dělení polynomů P a Q*. Je-li polynom R nulový, řekneme, že *Q dělí P (beze zbytku)*.

Věta 8.24 (Rozklad na parciální zlomky). *Nechť Q je polynom takový, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $Q(x) = c(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdots(x-a_k)^{n_k}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}(x^2+p_2x+q_2)^{m_2}\cdots(x^2p_lx+q_l)^{m_l}$, kde $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, $a_1,\dots,a_k$ jsou po dvou různá reálná čísla a $x^2+p_1x+q_1,\dots,x^2+p_lx+q_l$ jsou po dvou různé polynomy, které nemají reálné kořeny. Dále nechť P je polynom stupně menšího než Q.*

Potom existují čísla $A_{1,1}, A_{1,2}, \dots A_{k,n_k}, B_{1,1}, B_{1,2}, \dots, B_{l,m_l}, C_{1,1}, C_{1,2}, \dots, C_{l,m_l} \in \mathbb{R}$ taková, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která $Q(x) \neq 0$, platí

$$\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A_{1,n_1}}{(x-a_1)^{n_1}} + \frac{A_{1,n_1-1}}{(x-a_1)^{n_1-1}} + \dots + \frac{A_{1,1}}{(x-a_1)} + \\
& + \frac{A_{2,n_2}}{(x-a_2)^{n_2}} + \frac{A_{2,n_2-1}}{(x-a_2)^{n_2-1}} + \dots + \frac{A_{2,1}}{(x-a_2)} + \\
& \dots \\
& + \frac{A_{k,n_k}}{(x-a_k)^{n_k}} + \frac{A_{k,n_k-1}}{(x-a_k)^{n_k-1}} + \dots + \frac{A_{k,1}}{(x-a_k)} + \\
& + \frac{B_{1,m_1}x + C_{1,m_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}} + \frac{B_{1,m_1-1}x + C_{1,m_1-1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}} + \dots + \frac{B_{1,1}x + C_{1,1}}{(x^2+p_1x+q_1)} + \\
& + \frac{B_{2,m_2}x + C_{2,m_2}}{(x^2+p_2x+q_2)^{m_2}} + \frac{B_{2,m_2-1}x + C_{2,m_2-1}}{(x^2+p_2x+q_2)^{m_2}} + \dots + \frac{B_{2,1}x + C_{2,1}}{(x^2+p_2x+q_2)} + \\
& \dots \\
& + \frac{B_{l,m_l}x + C_{l,m_l}}{(x^2+p_lx+q_l)^{m_l}} + \frac{B_{l,m_l-1}x + C_{l,m_l-1}}{(x^2+p_lx+q_l)^{m_l}} + \dots + \frac{B_{l,1}x + C_{l,1}}{(x^2+p_lx+q_l)}.
\end{aligned}$$

Zlomky na pravé straně předchozí rovnice nazýváme *parciální zlomky*.

Užití rozkladu na parciální zlomky si vyzkoušíme na následujícím příkladu. Vypočítejte integrál

$$I = \int \frac{x^{10} + 2x^9 + 3x^7 + 4x^6 + x^4 + 2x^3 7x - 1}{x^9 + 2x^6 + x^3}\,\mathrm{d}x.$$

Stupeň polynomu v čitateli není nižší než stupeň polynomu ve jmenovateli, proto nejprve použijeme větu 8.23 a polynomy se zbytkem podělíme. Dostaneme

$$I = \int \left(x + 2 + \frac{x^7 + 7x - 1}{x^9 + 2x^6 + x^3} \right) \mathrm{d}x.$$

Nyní již můžeme racionální lomenou funkci v předchozím integrálu rozložit na parciální zlomky. Snadno se zjistí, že polynom $x^9 + 2x^6 + x^3$ má trojnásobný kořen $x = 0$ dvojnásobný kořen $x = -1$ a lze jej napsat ve tvaru $x^9 + 2x^6 + x^3 = x^3(x+1)^2(x^2 - x + 1)^2$. Podle věty 8.24 tedy existují čísla $A, B, C, D, E, M, N, P, R \in \mathbb{R}$ a platí

$$\frac{x^7 + 7x - 1}{x^9 + 2x^6 + x^3} = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{D}{(x+1)^2} + \frac{E}{x+1} + \frac{Mx + N}{(x^2 - x + 1)^2} + \frac{Px + R}{x^2 - x + 1}.$$

Nyní musíme nalézt číla $A, B, C, D, E, M, N, P, R$. Sečtením zlomků na pravé straně a porovnáním čitatelů (jmenovatelé se rovnají), dostáváme

$$\begin{aligned}
x^7 + 7x - 1 &= A(x+1)^2(x^2 - x + 1)^2 + Bx(x+1)^2(x^2 - x + 1)^2 + \\
&\quad + Cx^2(x+1)^2(x^2 - x + 1)^2 + Dx^3(x^2 - x + 1)^2 + \\
&\quad + Ex^3(x+1)(x^2 - x + 1)^2 + Mx^3(x+1)^2(x^2 - x + 1)^2 + \\
&\quad + Nx^3(x+1)^2(x^2 - x + 1)^2 + Px^3(x+1)^2 + Rx^3(x+1)^2(x^2 - x + 1) \\
&= Bx + Cx^2 + Ex^3 + A + Ax^6 + 2Ax^3 + Bx^7 + 2Bx^4 + Cx^8 + 2Cx^5 + Dx^7 - \\
&\quad - 2Dx^6 + 3Dx^5 - 2Dx^4 + Ex^8 - Ex^7 + Ex^6 + Ex^5 - Ex^4 + Mx^6 + 2Mx^5 + \\
&\quad + Mx^4 + Nx^5 + 2Nx^4 + Nx^3 + Px^5 + Px^4 + Rx^4 + Rx^3 + Px^8 + Px^7 + \\
&\quad + Rx^7 + Rx^6 + Dx^3.
\end{aligned}$$

Nyní porovnáme koeficienty u odpovídajících si mocnin. Tedy

$$\begin{aligned}
-1 &= A \\
7 &= B \\
0 &= C \\
0 &= E + 2A + D + N + R \\
0 &= 2N + 2B + R - 2D - E + M + P \\
0 &= 3D + 2M + N + E + 2C + P \\
0 &= E + M - 2D + A + R \\
1 &= D + B + P + R - E \\
0 &= E + P + C
\end{aligned}$$

Odtud dostáváme, že $A = -1$, $B = 7$, $C = 0$, $D = 1$, $E = \frac{31}{9}$, $M = -\frac{1}{3}$, $N = -\frac{7}{3}$, $P = -\frac{31}{9}$ a $R = -\frac{1}{9}$.

Vrátíme se zpět k původnímu integrálu, s tím, co už víme, máme

$$I = \int \left(x + 2 - \frac{1}{x^3} + \frac{7}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{31}{9(x+1)} - \frac{x+7}{3(x^2 - x + 1)^2} - \frac{31x + 1}{9(x^2 - x + 1)} \right) \mathrm{d}x.$$

Tyto integrály, již snadno spočítáme podle vzorů v odstavci 8.5. Speciálně poslední dva integrály vypadají následovně:

$$\int \frac{x+7}{3(x^2 - x + 1)^2} \,\mathrm{d}x = \frac{5x - 3}{3(x^2 - x + 1)} + \frac{10\sqrt{3}}{9} \operatorname{arctan}\left(\tfrac{1}{3}\sqrt{3}(2x - 1)\right),$$

$$\int \frac{31x + 1}{9(x^2 - x + 1)} \,\mathrm{d}x = \frac{31}{18} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{11\sqrt{3}}{9} \operatorname{arctan}\left(\tfrac{1}{3}\sqrt{3}(2x - 1)\right).$$

Celkově tedy dostáváme

$$I = \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{1}{2x^2} - \frac{7}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{31}{9} \ln|x+1| - \frac{5x-3}{3(x^2-x+1)} - \\ - \frac{31}{18} \ln(x^2 - x + 1) - \frac{7\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctan}\left(\tfrac{1}{3}\sqrt{3}(2x-1)\right)$$

Neurčitý integrál — příklady a cvičení

8.5 Základní vzorce.

$$\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \text{ pro } n \neq -1;$$

$$\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln|x|;$$

$$\int \cos(x) \,\mathrm{d}x = \sin(x);$$

$$\int \sin(x) \,\mathrm{d}x = -\cos(x);$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2(x)} = -\operatorname{cotan}(x);$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(x)} = \tan(x);$$

$$\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln(a)};$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{b^2x^2 - a^2} = \frac{1}{2ab} \ln\left|\frac{bx-a}{bx+a}\right|, \text{ pro } a, b \neq 0;$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{b^2x^2 + a^2} = \frac{1}{ab} \arctan\frac{bx}{a}, \text{ pro } a, b \neq 0;$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}, \text{ pro } a \neq 0;$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+b}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+b}\right|, \text{ pro } b > 0;$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \,\mathrm{d}x = \ln|f(x)|;$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+ax+b)^n} = \frac{x + \frac{a}{2}}{2(n-1)\left(b - \frac{a^2}{4}\right)} \frac{1}{(x^2+ax+b)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)\left(b - \frac{a^2}{4}\right)} \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+ax+b)^{n-1}}$$

8.6 Často používané substituce. V následujících vztazích $R()$ označuje racionální funkci.

$\int f(x)\,\mathrm{d}x$	Substituce
$f(x) = R(x, x^{1/k_1}, \dots, x^{1/k_n})$, kde $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$	$t = x^{1/k}$, k je nejmenší společný násobek $k_1, \dots, k_n$.
$f(x) = R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/k_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/k_n}\right)$,	$t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/k}$,
kde $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$, a $ad - bc \neq 0$,	k je nejmenší společný násobek $k_1, \dots, k_n$.
$f(x) = R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$	Eulerova
(a) $a > 0$,	$t = \sqrt{ax^2+bx+c} \pm x\sqrt{a}$;
(b) $c \geq 0$,	$xt = \sqrt{ax^2+bx+c} \pm \sqrt{c}$;
(c) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ jsou kořeny ax^2+bx+c,	$t = \sqrt{a\frac{x-\beta}{x-\alpha}}$.
$f(x) = x^m(a+bx^n)^p$, $m, n, p \in \mathbb{Q}$ (binomický integrál)	
(a) $p \in \mathbb{N}$,	použijeme binomickou větu;
(b) $p \in \mathbb{Z}$,	$x = t^s$, s společný jmenovatel m a n;
(c) $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$,	$a + bx = t^s$, s je jmenovatel p;
(d) $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$,	$ax^{-n} + b = t^s$, s je jmenovatel p.
$f(x) = R(\sin(x), \cos(x))$	označme $u = \sin(x)$, $v = \cos(x)$;
(a) $R(u,v) = -\mathbb{R}(-u, v)$,	$t = \cos(x)$;
(b) $R(u,v) = -\mathbb{R}(u, -v)$,	$t = \sin(x)$;
(c) $R(u,v) = \mathbb{R}(-u, -v)$,	$t = \tan(x)$;
	univerzální substituce $t = \tan(x/2)$.
$f(x) = \sin^m(x)\cos^n(x)$	

(a) $m, n \in \mathbb{Q}$		$t = \sin(x)$ nebo $t = \cos(x)$;
(b) $m, n \in \mathbb{Z}$	(1) m je liché,	$t = \cos(x)$;
	(2) n je liché,	$t = \sin(x)$;
	(3) m, n jsou sudá,	$t = \tan(x)$;
	(4) m, n jsou sudá nezáporná	$\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}, \cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$.

Příklady

1. *Spočítejte integrál*

$$\int \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x.$$

Použijeme metodu per partes. Označme si $u(x) = \arcsin(x)$ a $v'(x) = (x+1)^{-1/2}$. Potom (porovnej s (8.2.4))

$$\int \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = \arcsin(x) & u' = (1-x^2)^{-1/2} \\ v' = (x+1)^{-1/2} & v = 2\sqrt{x+1} \end{matrix} \right| =$$
$$= 2\sqrt{x+1}\arcsin(x) - 2\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x+1}\arcsin(x) - 2\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} =$$
$$= 2\sqrt{x+1}\arcsin(x) + 4\sqrt{1-x}.$$

2. *Spočtěte integrál*

$$\int \frac{\ln(\tan(x))}{\sin(x)\cos(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení: Použijeme první substituční metodu. Zaveďme substituci $t(x) = \tan(x)$.

$$\int \frac{\ln(\tan(x))}{\sin(x)\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} t = \tan(x) \\ \sin(x) = t/\sqrt{1+t^2} \\ \cos(x) = 1/\sqrt{1+t^2} \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t/(1+t^2) \end{matrix} \right| = \int \frac{\ln(t)}{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \tag{8.6.1}$$
$$= \int \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

Poslední integrál vypočteme metodou per partes (lze též použít substituci $u = \ln(t)$ nebo $u = 1/t$). Tedy

$$\int \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \left| \begin{matrix} u = \ln(t) & u' = 1/t \\ v' = 1/t & v = \ln(t) \end{matrix} \right| = \ln^2(x) - \int \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$
$$\int \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\ln^2(t).$$

Vrátíme-li se k (8.6.1), s použitím předchozí rovnice a použité substituce dostaneme

$$\int \frac{\ln(\tan(x))}{\sin(x)\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\ln^2(t) = \tfrac{1}{2}\ln^2(\tan(x)).$$

3. *Spočtěte integrál*

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2}.$$

Řešení: Definiční obor integrované funkce je $(-1, 1]$. Na tomto intervalu můžeme použít první substituční metodu tak, že položíme $t = \sqrt{(1-x)/(1+x)}$. Dostaneme

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2} = \left| \begin{array}{c} t = \sqrt{(1-x)/(1+x)} \\ x = (1-t^2)/(1+t^2) \\ \mathrm{d}x = -4t\,\mathrm{d}t/(1-t^2)^2 \end{array} \right| = \int t\,\frac{(1+t^2)^2}{4}\,\frac{-4t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= -\int t^2\,\mathrm{d}t = -\frac{t^3}{3} = -\frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3}.$$

4. *Spočtěte integrál*

$$\int \sqrt{1+\sin(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení: Tento příklad budeme řešit dvěma způsoby:

První způsob: použijeme první substituční metodu pro $t = \tan(x/2)$, tedy

$$\int \sqrt{1+\sin(x)}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x = 2\arctan(t) \\ \sin(x) = 2t/(1+t^2) \\ \cos(x) = 2/(1+t^2) \\ \mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}t/(1+t^2) \end{array} \right| = \int \sqrt{1+\frac{2t}{1+t^2}}\,\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

$$= 2\int (1+t)(1+t^2)^{-3/2}\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{3/2}} + 2\int \frac{t}{(1+t^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}t.$$

Poslední dva integrály si spočítáme zvlášť, na první z nich použijeme první substituční metodu pro $z = \sqrt{1+t^2}$

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{3/2}} = \left| \begin{array}{c} z = \sqrt{1+t^2} \\ t = -1/\sqrt{z^2-1} \\ \mathrm{d}t = -z/(z^2-1)^{3/2}\mathrm{d}z \end{array} \right| = -\int \frac{1}{z^2}\mathrm{d}z = \frac{1}{z} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Na druhý integrál použijeme substituci $u = \sqrt{1+t^2}$, máme

$$\int \frac{t}{(1+t^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{c} u = \sqrt{1+t^2} \\ u\,\mathrm{d}u = t\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = -\frac{1}{u} = -\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Celkově tedy dostáváme

$$\int \sqrt{1+\sin(x)}\,\mathrm{d}x = 2\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right) = 2(\sin(x/2) - \cos(x/2)).$$

Druhý způsob: Použijeme druhou substituční metodu, položme $1+\sin(x) = t^2$, dostaneme

$$\int \sqrt{1+\sin(x)}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \sin(x) = t^2 - 1 \\ \cos(x) = t\sqrt{2-t^2} \\ \mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}t/\sqrt{2-t^2} \end{array} \right| = 2\int \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\,\mathrm{d}t$$

Opět použijeme druhou substituční metodu, tentokrát položíme $z^2 = 2 - t^2$ a máme

$$\int \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\,\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{c} z^2 = 2 - t^2 \\ 2z\,\mathrm{d}z = 2t\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = -\int \frac{z}{z}\mathrm{d}z = -z = -\sqrt{2-t^2}.$$

Celkově tedy máme

$$\int \sqrt{1+\sin(x)}\,\mathrm{d}x = -2\sqrt{2-t^2} = -2\sqrt{1-\sin(x)}.$$

5. *Nechť $a > 0$, vypočtěte integrál*

$$I = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}.$$

Řešení: Použijeme druhou substituční metodu. Položíme $\varphi(x) = a\tan(t)$. Tato funkce surjektivně zobrazuje interval $\left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$ na $\mathbb{R}$. Její inverze (substituce zpět) je $\psi(t) = \arctan(x/a)$ (místo intervalu $\left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$ jsme si mohli zvolit jiný interval kde výraz $a\tan(t)$ definuje surjektivní funkci na $\mathbb{R}$ například interval $\left(\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$, inverze by v tomto případě byla definována vzorcem $\arctan(x/a) + \pi$).

Touto substitucí dostáváme

$$I = \left| \begin{array}{l} x = a\tan(x) \\ \mathrm{d}x = a\,\mathrm{d}t/\cos^2(t) \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sqrt{(a^2+\tan^2(t))^3}} \frac{a}{\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a^2}\int \cos(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a^2}\sin(t).$$

Nyní dostadíme do této primitivní funkce funkci ψ a po úpravě máme:

$$I = \frac{1}{a^2}\sin\left(\arctan\left(\frac{x}{a}\right)\right) = \frac{1}{a^2}\frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}.$$

6. *Vypočtěme integrál*

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Řešení: Integrovaná funkce je definovaná na sjednocení intervalů $(-\infty, -1)$ a $(-1, \infty)$. Podle návodu v odstavci 8.6 použijeme substituci $\sqrt{x^2+x+1} = x + t$. Formálně tedy užíváme druhou substituční metodu kde $x = \varphi(t) = \frac{t^2-1}{1-2t}$. Funkce φ zobrazuje interval $(-\infty, 0)$ surjektivně na $(-1, \infty)$ a interval $(2, \infty)$ surjektivně na $(-\infty, -1)$. Na obou intervalech můžeme použít tuto substituci.

Pak

$$I = \int \frac{1}{\frac{t^2-1}{1-2t} + \frac{t^2-1}{1-2t} + t} \frac{-2t^2+2t-2}{(1-t)^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{2t^2-2t+2}{(t-2)(2t-1)}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int \left(1 + \frac{2}{t-2} - \frac{1}{2t-1}\right) \mathrm{d}t = t + 2\ln|t-2| - \tfrac{1}{2}\ln\left|t - \tfrac{1}{2}\right| =$$
$$= \sqrt{x^2+x+1} - x + 2\ln\left|\sqrt{x^2+x+1} - x - 2\right| - \tfrac{1}{2}\ln(\sqrt{x^2+x+1} - x - \tfrac{1}{2}).$$

7. *Vypočtěte integrál*

$$I = \int \sqrt{\frac{x}{1 - x\sqrt{x}}}\, \mathrm{d}x.$$

Řešení: Použijeme substituci $1 - x^{3/2} = t^2$. Integrovaná funkce je definovaná na intervalu $[0, 1)$. Na tomto intervalu můžeme použít druhou substituční metodu pro $x = \varphi(t) = (1-t^2)^{2/3}$ protože zobrazuje interval $(-1, 1)$ surjektivně na $(0, 1)$. Dostáváme

$$I = \int \sqrt{\frac{(1-t^2)^{2/3}}{t}} \frac{-4t}{3\sqrt[3]{1-t^2}}\, \mathrm{d}t = -\int \mathrm{d}t = -\frac{4t}{3}. \tag{8.6.2}$$

Pravou inverzí k funkci φ je funkce $\psi\colon (0, 1) \to (0, 1)$, $\psi(t) = \sqrt{1 - x\sqrt{x}}$. Dosazením do 8.6.2, dostaneme

$$\int \sqrt{\frac{x}{1 - x\sqrt{x}}}\, \mathrm{d}x = -\tfrac{4}{3}\sqrt{1 - x\sqrt{x}}.$$

8. *Vypočtěte integrál*

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2(x)\cos^4(x)}.$$

Řešení: Integrovaná funkce je definovaná na $\mathbb{R}$ bez celočíselných násobků $\pi/2$. Na každém intervalu neobsahujícím takové číslo můžeme použít substituci $t = \tan(x)$. (Tuto substituci jsme vybrali, protože integrovaná funkce je sudá jak vzhledem k funkci sin tak i k funkci cos.)

Pak

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2(x)\cos^4(x)} = \int \frac{1}{\sin^2(x)\cos^2(x)} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(x)} = \int \frac{1}{t^2}(1+t^2)^2\, \mathrm{d}t =$$
$$= \int \left(\frac{1}{t^2} + 2 + t^2\right) \mathrm{d}t = \frac{t}{3} + 2t - \frac{1}{t} = \frac{\tan(x)}{3} + 2\tan(x) - \frac{1}{\tan(x)}.$$

Cvičení

1. Metoda per partes

a) $\int x^n \sin(2x)\, \mathrm{d}x$;	b) $\int x\mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x$;	c) $\int x3^x\, \mathrm{d}x$;
d) $\int x^n \ln(x)\, \mathrm{d}x$;	e) $\int x \arctan(x)\, \mathrm{d}x$;	f) $\int \arccos(x)\, \mathrm{d}x$;
g) $\int \arctan(\sqrt{x})\, \mathrm{d}x$;	h) $\int \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{x+1}}\, \mathrm{d}x$;	i) $\int x\tan^2(x)\, \mathrm{d}x$;
j) $\int x\cos^2(x)\, \mathrm{d}x$;	k) $\int \ln(x^2+1)\, \mathrm{d}x$;	l) $\int \frac{x^2}{1+x^2}\, \mathrm{d}x$;

m) $\int \mathrm{e}^x \sin(x)\,\mathrm{d}x$; n) $\int \sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x$; o) $\int \frac{x^2}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x$.

2. Substituční metoda

a) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$; c) $\displaystyle\int \frac{4x+3}{(x-2)^3}\,\mathrm{d}x$;

d) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$; e) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,\mathrm{d}x$; f) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$;

g) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$; h) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\ln(x)}}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x$; i) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x$;

j) $\displaystyle\int \frac{x^2}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$; k) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$; l) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$;

m) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{4x}-\mathrm{e}^{2x}+1}\,\mathrm{d}x$; n) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}}\,\mathrm{d}x$;

o) $\displaystyle\int \sqrt{1+\cos^2(x)}\,\sin(2x)\cos(2x)\,\mathrm{d}x$.

3. Racionální funkce

a) $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)(2x+1)}\,\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int \frac{2x^2}{2x^2-3x-2}\,\mathrm{d}x$; c) $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}\,\mathrm{d}x$;

d) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4}\,\mathrm{d}x$; e) $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}\,\mathrm{d}x$; f) $\displaystyle\int \frac{x^5}{(x-1)^2(x^2-1)}\,\mathrm{d}x$;

g) $\displaystyle\int \frac{7x^3-9}{x^4-5x^3+6x^2}\,\mathrm{d}x$; h) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$; i) $\displaystyle\int \frac{(x+1)^4}{(x^2+2x+2)^3}\,\mathrm{d}x$;

j) $\displaystyle\int \frac{1}{x(4+x^2)^2(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$; k) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^4}\,\mathrm{d}x$; l) $\displaystyle\int \frac{x^9}{(x^4-1}\Big)^2\,\mathrm{d}x$.

4. Goniometrické funkce

a) $\displaystyle\int \sin^3(x)\cos^2(x)\,\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos(x)\sin^3(x)}\,\mathrm{d}x$; c) $\displaystyle\int \frac{\sin^4(x)}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$;

d) $\displaystyle\int \frac{\sin(x)}{(1-\cos(x))^2}\,\mathrm{d}x$; e) $\displaystyle\int \frac{\cos^4(x)+\sin^4(x)}{\cos^2(x)-\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x$; f) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x)+\cos(x)}$;

g) $\displaystyle\int \frac{1}{\tan(x)\cos(2x)}\,\mathrm{d}x$; h) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\tan(x)}\,\mathrm{d}x$; i) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x$;

j) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{4+\tan(x)+4\,\mathrm{cotan}(x)}$; k) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{5-4\sin(x)+3\cos(x)}$; l) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2(x)+\tan^2(x)}$;

m) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\tan(x)}}{\sin(x)\cos(x)}\,\mathrm{d}x$; n) $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{\sin^3(x)-\cos^3(x)}\,\mathrm{d}x$; o) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^4(x)}}\,\mathrm{d}x$.

5. Funkce typu $R\big(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\big)$

a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$; b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2x+x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$; c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{2+x-x^2}}$;

d) $\displaystyle\int \sqrt{1-4x-x^2}\,\mathrm{d}x$; e) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$; f) $\displaystyle\int \frac{3x^2-5x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,\mathrm{d}x$;

g) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\left(x+\sqrt[3]{1+x^2}\right)}$; h) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}}\,\mathrm{d}x$; i) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x}}{2+x^2}\,\mathrm{d}x$.

6. Binomické integrály

a) $\displaystyle\int \sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^4\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{1+x^2}}$; c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+x^3}}$;

d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1+x^4}}$; e) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}\,\mathrm{d}x$; f) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$;

g) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2}\,\mathrm{d}x$; h) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}\,\mathrm{d}x$; i) $\displaystyle\int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x$.

7. Funkce typu $R\left(x,\ \sqrt[m]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)$

a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2})}$; b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}}$; c) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$;

d) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x$; e) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\,\mathrm{d}x$; f) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x-x^2}$.

8. Různé

a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$; c) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2}\,\mathrm{d}x$;

d) $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{(1-\cos(x))^2}\,\mathrm{d}x$; e) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3(x)}$; f) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+x+1}}$;

g) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1-2x-x^2}$; h) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(\sqrt[3]{x}+1)}$; i) $\displaystyle\int \frac{\tan(x)}{1+\tan(x)+\tan^2(x)}\,\mathrm{d}x$;

j) $\displaystyle\int \frac{\arctan(x)}{x^2(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$; k) $\displaystyle\int \arctan(1+\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$; l) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin^3(x)\cos^2(x)}}\,\mathrm{d}x$;

m) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{3x}(\sin(2x)-\cos(2x))\,\mathrm{d}x$; n) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\sin(x)}\frac{x\cos^3(x)-\sin(x)}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$;

o) $\displaystyle\int \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,\mathrm{d}x$.

9. Dokažte následující tvrzení: Jestliže ke dvěma z funkcí $f, g, f+g\colon J\to\mathbb{R}$ existuje na J primitivní funkce, pak existuje i ke třetí. Uveďte příklad funkcí, f, g takových, že k funkci $f+g$ existuje na J primitivní funkce, ale ani k funkci f ani k funkci g primitivní funkce neexistuje.

10. Existují funkce $f, g\colon J\to\mathbb{R}$, pro které platí $\int f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \int g(x)\,\mathrm{d}x$?

Určitý integrál — příklady a cvičení

8.7 Základní vzorce.

Plocha podgrafu funkce f na intervalu $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Plocha oblasti ohraničené křivkou, která je zadána parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$:

$$\left|\int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right|.$$

Plocha oblasti ohraničené křivkou, která je zadána v polárních souřadnicích rovnicí $\varrho = f(\varphi) \geq 0$, $\varphi \in [\alpha, \beta] \subset [0, 2\pi]$:

$$\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \varrho^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi.$$

Délka rovinné křivky $y = f(x)$, f' spojitá, $x \in [a, b]$:

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f')^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Délka křivky $(x(t), y(t), z(t))$, x', y', z' spojité, $t \in [\alpha, \beta]$:

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{(x')^2(t) + (y')^2(t) + (z')^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Délka křivky $\varrho = f(\varphi)$, ϱ' spojitá, $\varphi \in [\alpha, \beta]$:

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{(\varrho')^2(\varphi) + \varrho^2(\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi.$$

Objem prostorového útvaru, ležícího nad intervalem $[a, b]$ na ose x, jehož řez rovinou, procházející bodem $x \in [a, b]$, rovnoběžnou s rovinou yz, má plochu $A(x)$:

$$\int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x. \quad \text{(Cavalieriho princip)}$$

Objem rotačního tělesa, vzniklého rotací podgrafu funkce f na intervalu $[a, b]$ kolem osy x, f' spojitá:

$$\pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Povrch rotačního tělesa, vzniklého rotací grafu funkce $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ kolem osy x (respektive y), f' spojitá:

$$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f')^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$\left(\text{respektive } 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + (f')^2(x)}\,\mathrm{d}x\right).$$

Povrch rotačního tělesa, vzniklého rotací křivky $x = \psi(t)$, $y = \varphi(t)$, ψ', φ' spojité, $t \in [\alpha, \beta]$ kolem osy x:

$$2\pi \int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{(\varphi')^2(t) + (\psi')^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Povrch rotačního tělesa, vzniklého rotací křivky $\varrho = f(\varphi)$, ϱ' spojitá, $\varphi \in [\alpha, \beta]$ kolem osy x:

$$2\pi \int_\alpha^\beta |\varphi \sin(\varphi)|\sqrt{(\varrho')^2(\varphi) + \varrho^2(\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi.$$

Příklady

5. *Odvoďte vzorec pro obsah kruhu*

a) v kartézských souřadnicích;

b) v parametrických souřadnicích;

c) v polárních souřadnicích.

Řešení: a) Uvažujme tu část kruhu $x^2 + y^2 \leq r^2$, která leží v prvním kvadrantu. Jedná se tedy o podgraf funkce $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ na intervalu $[0, r]$. Obsah kruhu je čtyřnásobkem obsahu tohoto podgrafu. Tedy $S = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$. V následujícím výpočtu, použijeme substituci $x = r\sin(t)$:

$$S = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \left| \begin{array}{c} x = r\sin(t) \\ dx = r\cos(t)\, dt \end{array} \right| = 4r^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\, dt =$$

$$= 4r^2 \Big[\tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{4}\sin(2t)\Big]_0^{\pi/2} = \pi r^2.$$

b) Parametricky kružnici zadáme takto: $x = r\cos(t)$, $y = r\sin(t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Po dosazení do příslušného vzorce tedy dostaneme:

$$S = \left| \int_0^{2\pi} r\sin(t)(-\sin(t))\, dt \right| = \left| -r^2 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2t)}{2}\, dt \right| =$$

$$= \left| -\frac{r^2}{2}\Big[t\Big]_0^{2\pi} + \frac{1}{4}r^2\Big[\sin(2t)\Big]_0^{2\pi} \right| = \left| -\pi r^2 \right| = \pi r^2.$$

c) Kružnici o poloměru r se středem v bodě $(0, 0)$ zadáme v polárních souřadnicích takto: $\varrho = r$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Podle příslušného vzorce tedy dostaneme:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\, d\varphi = \frac{1}{2}r^2\Big[\varphi\Big]_0^{2\pi} = \pi r^2.$$

6. *Spočtěte integrál*

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}\, dx.$$

Řešení: Opět použijeme druhou substituční metodu, tentokráte pro $x = t^2$

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}\, dx = \left| \begin{array}{c} x = t^2 \\ dx = 2t\, dt \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{t}{1 + t} 2t\, dt = 2\int_0^1 \frac{t^2}{1 + t}\, dt =$$

$$= 2\int_0^1 \left(t - 1 + \frac{1}{1 + t}\right) dt = 2\Big[\frac{t^2}{2} - t + \ln|1 + t|\Big]_0^1 = 2\big(\tfrac{1}{2} - 1 + \ln(2)\big) = -1 + \ln(2).$$

7. *Vypočtěte obsah části roviny ohraničené křivkami $xy = 4$, $x + y = 5$.*

Řešení: Najdeme x-ové souřadnice průsečíků daných křivek tak, že vyjádříme y z druhé rovnice a dosadíme do první: $x^2 - 5x = 4$. Z této kvadratické rovnice dostaneme kořeny $x_1 = 1$ a $x_2 = 4$. Neboť na intervalu $[1, 4]$ je funkce $5 - x$ větší nebo rovna funkci $4/x$, obsah je tedy roven

$$S = \int_1^4 \left(5 - x - \frac{4}{x}\right) dx = \Big[5x - \frac{x^2}{2} - 4\ln(x)\Big]_1^4 = 20 - 8 - 4\ln(4) - 5 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{15}{2} - 8\ln(2).$$

Cvičení

11. Uveďte příklad ohraničené funkce f, která není integrovatelná na $[a, b]$ ale $|f|$ je integrovatelná na $[a, b]$.

12. Uveďte příklad ohraničených funkcí $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ takových, že f, g nejsou integrovatelné na $[a, b]$, ale

a) $f + g$ je integrovatelná na $[a, b]$; b) fg je integrovatelná na $[a, b]$.

13. Ukažte, přímo z definice Riemannova integrálu, že funkce $f(x) = x$ je integrovatelná na $[-1, 1]$, a vypočtěte $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ bez použití Newtonovy-Leibnizovy formule.

14. Spočtěte integrály:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}\,\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int_0^1 x^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$; c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$;

d) $\displaystyle\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x$; e) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} x^2 \operatorname{arccotan}(x)\,\mathrm{d}x$; f) $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos(x)\,\mathrm{d}x$;

g) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2(x)}{\cos^6(x)}\,\mathrm{d}x$; h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+x^3}}$; i) $\displaystyle\int_0^1 x \arctan(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$.

j) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1-\sin(x)}{1+\cos(x)}\,\mathrm{d}x$; k) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1-2x}{x^6+1}\,\mathrm{d}x$; l) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x+2}\,\mathrm{d}x$;

m) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2x+2)^2}$; n) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2x-2)^2}$; o) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+3\cos^2(x)}$;

p) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$; q) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(4-x^2)^{3/2}}$; [12] r) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^4(x)\cos^2(x)\,\mathrm{d}x$;

s) $\displaystyle\int_{-1/4}^{5/4} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{1}{2}+x-x^2}}$; t) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$.

15. Nalezněte plochu oblasti ohraničené:

a) křivkami $x = y^2$, $x = y^3$;

b) křivkou $y = x^2 - 7$, osou x a přímkami $x = 2$, $x = 4$;

c) smyčkou křivky $y^2 = x^2(4 - x)$

d) elipsou se středem v počátku a s poloosami a, b;

e) křivkami $y = x^2/2$, $y = 2x^2$, $xy = 1$, $xy = 4$;

f) křivkou $x^2 + y^2 = 2x + 3$ a tečnami v jejích průsečících s osou y;

g) křivkou $\varrho = 2a\cos(\varphi)$, kde $\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$;

h) křivkami $y^2 = x + 4$, $x - 2y + 1 = 0$;

i) přímkami o rovnicích $2x - y = 0$, $4y - x = 0$, $x + y - 2 = 0$, $x + y = 4$.

16. Uvažujme oblast, ležící v prvním kvadrantu, ohraničenou křivkami $x = y^2$, $x = y^4$. Nalezněte objem tělesa, vzniklého rotací této oblasti kolem osy y.

17. Vypočtěte objem anuloidu vzniklého rotací kružnice $x^2 + (y-2)^2 = 1$ kolem osy x.

18. Vypočtěte objem anuloidu vzniklého rotací kružnice $(x-2)^2 + y^2 = 1$ kolem osy y.

19. Vypočtěte následující nevlastní integrály, případně integrály, které po substituci vedou na nevlastní integrály

[12]Použijte substituci $t = (2-x)/(2+x)$.

a) $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$; b) $\int_0^\infty e^{-ax}\cos(bx)\,dx$, $a > 0$; c) $\int_0^\infty e^{-ax}\sin(bx)\,dx$, $a > 0$;

d) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1}$; e) $\int_0^\infty \frac{x}{x^4+1}\,dx$; f) $\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+1}\,dx$;

g) $\int_1^\infty \frac{x^3}{x^4+1}\,dx$; h) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1}$; i) $\int_0^\infty \frac{x}{x^3+1}\,dx$;

j) $\int_0^\infty \frac{x^2}{x^3+1}\,dx$; k) $\int_1^{-1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; l) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1-x^2}$;

m) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+x+1}$; n) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{x^2+x+1}\,dx$; o) $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;

p) $\int_0^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; q) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; r) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$;

s) $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$; t) $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

20. Odvoďte vzorec pro objem koule

a) v kartézských souřadnicích; b) v parametrických souřadnicích.

21. Odvoďte vzorec pro objem

a) kužele; b) válce; c) kulové vrstvy.

22. Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací oblasti ohraničené

a) křivkami $y = x^2$, $x = y$ b) parabolou $x = y^2 + 2$ a přímkou $x = y + 8$

kolem osy y.

23. Vypočtěte objem kulové úseče, je-li poloměr koule r a výška úseče v.

Výsledky

1. a) $\sin(2x)/4 - x\cos(2x)/2$; **b)** $-xe^{-x} - e^{-x}$; **c)** $x3^x/\ln(3) - 3^x/\ln^2(3)$; **d)** $x^{n+1}\ln(x)/(n+1) - x^{n+1}/(n+1)^2$; **e)** $x^2\arctan(x)/2 + \arctan(x)/2 - x/2$; **f)** $x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$; **g)** $(1+x)\arctan(\sqrt{x}) - \sqrt{x}$; **h)** $2\sqrt{x+1}\arcsin(x) - 4\sqrt{1-x}$; **i)** $x\tan(x) - x^2/2 - \ln(1+\tan^2(x))/2$; **j)** $x^2/4 + x\sin(2x)/4 + \cos(2x)/8$; **k)** $x\ln(x^2+1) - 2x + 2\arctan(x)$; **l)** $\arctan(x)/2 - x/(2+2x^2)$; **m)** $e^x(\sin x - \cos x)/2$; **n)** $x(\sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x)))/2$; **o)** $x + 2 - 4/(x+2) - 4\ln(x+2)$.

2. a) $2(1+\sqrt{1+x}) - 2\ln(1+\sqrt{1+x})$; **b)** $2\sqrt{(x-1)^7}/7 + 6\sqrt{(x-1)^5}/5 + 2\sqrt{(x-1)^3} + 2\sqrt{x-1}$; **c)** $-4/(x-2) - 11/(2(x-2)^2)$; **d)** $\ln((\sqrt{x+1}-1)/(\sqrt{x+1}+1))$; **e)** $3(\sqrt[3]{x+1}+1) - 3\ln(|\sqrt[3]{x+1}+1|)$; **f)** $x + 6\sqrt[6]{x^5}/5 + 3\sqrt[3]{x^2}/2 + 2\sqrt{x} + 3\sqrt{x} + 6\sqrt[6]{x} + \ln(|\sqrt[6]{x}-1|)$; **h)** $2\sqrt{1+\ln(x)} - 2\ln((\sqrt{1+\ln(x)}-1)/(\sqrt{1+\ln(x)}+1)$; **j)** $a^2\arcsin(x/a)/2 - a^2\sin(a\arcsin(x/a))/2$; **k)** $\ln((\sqrt{1+x^2}-1)/(\sqrt{1+x^2}+1))/2$; **o)** $2\sqrt{(1+\cos^2(x))^3} - 4\sqrt{(1+\cos^2(x))^5}/5$.

3. a) $\ln((x+1)/\sqrt{2x+1})$; **b)** $x + 16\ln(|x-2|)/5 - \ln(|x+\frac{1}{2}|)/5$; **c)** $x/4 - 9\ln(2x+1)/16 - 7\ln(2x-1)/16 + \ln(x)$; **d)** $\ln(|x+1|) + 4/(x+2)$; **e)** $x + 2\ln(x-1) - \ln(x) + 1/x$; **f)** $x^2/2 + 2x + 31\ln(x-1)/8 - 1/(4(x-1)^2) - 9/(4(x-1))$; **g)** $3/2x + 20\ln(x-3) - 5\ln(x)/4 - 47\ln(x-2)/4$; **h)** $\ln(x+1)/3 - \ln(x^2-x+1)/6 + \sqrt{3}\arctan(\sqrt{3}(2x-1)/3)/3$; **i)** $(x+1)/(4(x^2+2x+2)) - 5(x+1)/(8(x^2+2x+2)) + 3\arctan(x+1)/8$; **j)** $-\ln(1+x^2)/18 + 7\ln(4+x^2)/288 + \ln(x)/16 - 1/(24(4+x^2))$; **k)** $x/(6(1+x^2)^3) + 5x/(24(1+x^2)^2) + 5x/(16(1+x^2)) + 5\arctan(x)/16$; **l)** $x^2/2 + 1/(16(x+1)) + 3\ln(x-1)/8 + 3\ln(x+1)/8 - 1/(16(x-1)) - 1/(8(1+x^2)) - 3\ln(1+x^2)/8$.

4. a) $\cos^5(x)/5 - \cos^3(x)/3$; **b)** $\ln|\tan(x)| - 1/(2\sin^2(x))$; **c)** $\tan(x)\sin^4(x) - 3x/2 + \sin(2x)/4$; **d)** $-1/(3(1-\cos^3(x)))$; **e)** $\tan(x)/(2+2\tan^2(x)) - \ln(\tan(x)-1)/4 + \ln(\tan(x)+1)/4$; **f)** $\ln|(2\arctan(x)-1+\sqrt{2})/(2\arctan(x)-1-\sqrt{2})|$; **g)** $\ln|\sin(x)/\sqrt{1-2\sin^2(x)}|$; **h)** $x/2 + \ln(1+\tan(x))/2 - \ln(1+\tan^2(x))/4$; **i)** $\sqrt{2}(\arctan(\sqrt{2}\tan(x)))/2$; **j)** $3\ln(1+\tan^2(x))/50 - 3\ln(\tan(x)+2)/25 + 2/(5\tan(x)+10) + 4x/25$; **k)** $-1/(\tan(x/2)-2)$; **l)** $-1/(2\tan(x)) - \sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}\tan(x)/2)/4$; **m)** $2\sqrt{\tan(x)}$; **n)** $\ln(\tan(x)-1)/3 - \ln(\tan^2(x)+\tan(x)+1)/6 - \sqrt{3}\arctan(2\sqrt{3}\tan(x)+\sqrt{3})/3$.

5. a) $\sqrt{2}\arctan(\sqrt{x^2+4x-4}/\sqrt{2})/2$; **b)** $\ln|(\sqrt{1+2/x}-1)/(\sqrt{1+2/x}+1)| - \sqrt{1+2/x}$; **c)** $-\sqrt{2}\operatorname{arctanh}(\sqrt{2}(4+x)/(4\sqrt{2+x-x^2}))/2$; **d)** $(1+x/2)\sqrt{1-4x-x^2}+5\arcsin(\sqrt{5}(2+x)/5)/2$; **e)** $x + \ln(x-1) + \sqrt{x^2-x+1} + \operatorname{arcsinh}(2\sqrt{3}(x-1/2))/2 - \operatorname{arctanh}((x+1)/(2\sqrt{x^2-x+1}))$; **f)** $14\arcsin(x/2+1/2) + 19\sqrt{3-2x-x^2}/2 - 3x\sqrt{3-2x-x^2}/2$; **g)** $\operatorname{arcsinh}(x) + x\sqrt{1+x^2} - \ln(x) - \sqrt{(1+x^2)^3}/x$; **h)** $\sqrt{2x^2-2x+1}/x$; **i)** $\operatorname{arcsinh}(x) - \sqrt{2}\operatorname{arctanh}(\sqrt{2}x/(2\sqrt{1+x^2}))/2$.

10. Ano, například je-li jedna z nich nulová.

11. $f(x) = 1$, je-li x racionální, $f(x) = -1$, je-li x iracionální.

12. a) $f = \varrho$, $g = -\varrho$; **b)** $f = \varrho$, $g = 1 - \varrho$.

13. 0.

14. a) $4(1-\ln(2))/3$; **b)** $\mathrm{e}-2$; **c)** $\pi\sqrt{3}/3$; **d)** $2\ln(2)-1$; **e)** ??; **f)** $-(\mathrm{e}^\pi+1)/2$; **g)** $\frac{8}{15}$; **i)** $(\pi-6+6\sqrt{3})/12$; **j)** $1-\ln(2)$; **k)** $\ln(2+\sqrt{3})/\sqrt{3}$; **l)** $\pi(1-1/\sqrt{3})-1$; **m)** $\pi/8+\frac{1}{4}$; **n)** $\frac{1}{12}+\ln(2+\sqrt{3})/12\sqrt{3}$; **o)** $\pi/2$; **p)** $\ln(1+\sqrt{2})/2\sqrt{2}+\pi/4\sqrt{2}$; **q)** $1/4\sqrt{3}$; **r)** $\frac{4}{3}$; **s)** $2\pi/3$; **t)** $1/\sqrt{2}-1/\sqrt{5}$.

15. a) $\frac{1}{12}$; **b)** $\frac{230}{3}$; **d)** πab;

19. a) 1; **b)** $a/(a^2+b^2)$; **c)** $b/(a^2+b^2)$; **d)** $\pi/2\sqrt{2}$; **e)** $\pi/4$; **f)** $\pi/2\sqrt{2}$; **g)** diverguje; **h)** $2\pi\sqrt{3}/3$; **i)** $2\pi\sqrt{3}/3$; **j)** diverguje; **k)** π; **l)** diverguje; **m)** $2\pi/\sqrt{3}$; **n)** diverguje; **o)** $\pi/2$; **p)** diverguje; **q)** neexistuje; **r)** $\frac{3}{4}$; **s)** $\ln(1+\sqrt{2})$; **t)** diverguje.