DRUHÁ ČÁST

Dvojrozměrné a trojrozměrné integrály

2.0. Úvodní poznámka

Podobně jako jsme rozšířili pojmy a metody diferenciálního počtu funkcí jedné proměnné na funkce dvou a více proměnných, učiníme tak i při zavádění pojmů integrálního počtu funkcí dvou a více proměnných. Tím dojdeme k pojmu dvojrozměrného, trojrozměrného a obecně n-rozměrného integrálu.

Dvojrozměrný integrál zavedl (v r. 1769) vynikající švýcarský matematik *Leonhard Euler* (1707–1783), zatímco u trojrozměrného integrálu to byl francouzský matematik *Joseph Louis Lagrange* (1736–1813). Přesná teorie několikarozměrných integrálů byla však vybudována až v 19. století. Na této práci se podíleli *Augustin Louis Cauchy* (1789–1857), *Carl Friedrich Gauss* (1777–1855), *Carl Gustav Jacob Jacobi* (1804–1851), *George Green* (1793–1841), *Michail Vasiljevič Ostrogradskij* (1801–1861), *Peter Gustav Lejeune-Dirichlet* (1805–1859), *George Gabriel Stokes* (1819–1903) a zvláště *Georg Friedrich Bernhard Riemann* (1826–1866), po němž je příslušná teorie nazvána.

Hned zpočátku upozorňujeme, že je třeba rozlišovat integrály n-rozměrné a n-násobné. Například s dvojnásobnými integrály jsme se již setkali v článku 1.23.3. Místo dvojrozměrný, popř. trojrozměrný integrál se také používá názvu *dvojný*, popř. *trojný integrál*.

Při zavedení pojmů dvojrozměrného (i trojrozměrného) integrálu se omezíme obdobně jako u integrálů jednoduchých na funkce spojité a po částech spojité na uvažované oblasti.

2.1. Dvojrozměrný integrál na pravoúhelníku

2.1.1. Definice. Funkce $f(x, y)$ se nazývá *integrabilní na uzavřeném pravoúhelníku* $\mathscr{R}$ (tj. na dvojrozměrném intervalu) tvaru

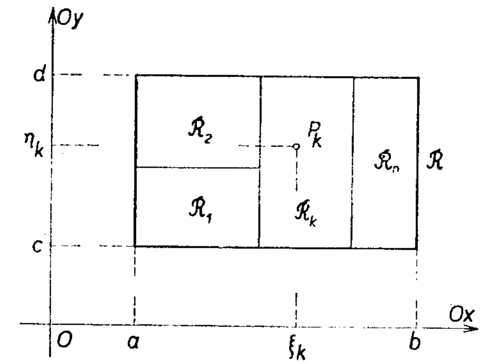
$$\mathscr{R} = \{[x, y] \in \mathrm{R}^2 |\ x \in \langle a, b\rangle,\ y \in \langle c, d\rangle\} = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$$

neboli stručně

$$\mathscr{R} = \{x \in \langle a, b\rangle,\ y \in \langle c, d\rangle\},$$

je-li na něm všude ohraničená a je-li spojitá ve všech jeho bodech s výjimkou jejich konečného počtu, popř. i nekonečného počtu, pokud takové body tvoří konečný počet křivek, které lze vyjádřit rovnicemi tvaru $y = \varphi(x)$, popř. $x = \psi(y)$.

2.1.2. Zavedení pojmu Riemannova dvojrozměrného integrálu. Mějme funkci $f(x, y)$, integrabilní na uvažovaném pravoúhelníku $\mathscr{R}$. Rozdělme (při dělení D_n) daný pravoúhelník $\mathscr{R}$ na n libovolných pravoúhelníků o stranách rovnoběžných se souřadnicovými osami (obr 2.1) a označme je $\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2, \ldots, \mathscr{R}_n$; jejich obsahy po řadě označme $|\mathscr{R}_1|, |\mathscr{R}_2|, \ldots, |\mathscr{R}_n|$, popř. jen $R_1, R_2, \ldots, R_n$, takže $|\mathscr{R}_\nu| = R_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$).



Obr. 2.1

Je-li R obsah pravoúhelníku $\mathscr{R}$, pak zřejmě platí rovnost

$$R = R_1 + R_2 + \ldots + R_n. \tag{1}$$

Nechť m, resp. M značí infimum, resp. supremum funkce $f(x, y)$ na celém pravoúhelníku $\mathscr{R}$, kdežto m_k, resp. M_k její infimum, resp. supremum na pravoúhelníku $\mathscr{R}_k$. Nechť $P_k = [\xi_k, \eta_k]$ značí libovolný bod v pravoúhelníku $\mathscr{R}_k$.

Utvořme nyní tyto součty pro funkci $f(x, y)$ při daném dělení D_n:

$$\left.\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} m_k R_k \quad [\text{tzv. } \textit{dolní (Darbouxův) součet}],\\ \sigma_n &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) R_k \quad (\text{tzv. } \textit{integrální součet}),\\ S_n &= \sum_{k=1}^{n} M_k R_k \quad [\text{tzv. } \textit{horní (Darbouxův) součet}]. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

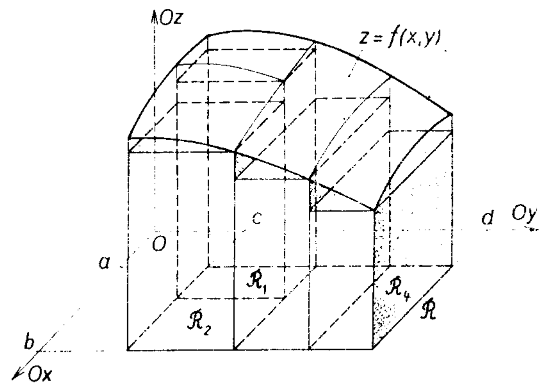
Takových součtů s_n, σ_n, S_n dostaneme nekonečně mnoho, měníme-li počet n pravoúhelníků $\mathscr{R}_k$ a jejich polohu v pravoúhelníku $\mathscr{R}$. Protože zřejmě je

$$m \leqq m_k \leqq f(\xi_k, \eta_k) \leqq M_k \leqq M, \tag{3}$$

dostaneme odtud násobením kladným číslem R_k a pak sčítáním pro $k = 1, 2, \ldots, n$ vztahy

$$mR \leqq s_n \leqq \sigma_n \leqq S_n \leqq MR. \tag{4}$$

Je-li funkce $f(x, y) \geqq 0$ na pravoúhelníku $\mathscr{R}$, pak dolní a horní součty mají názorný geometrický význam. Tak dolní součet s_n představuje součet objemů nejvyšších kvádrů, jejichž dolní podstavy jsou jednotlivé pravoúhelníky $\mathscr{R}_k$, kdežto horní podstavy nepřesahují nad plochu $z = f(x, y)$. Analogicky je tomu s horním součtem S_n, který značí součet objemů nejnižších kvádrů, jejichž horní podstavy nepřecházejí pod plochu $z = f(x, y)$. Na obrázku 2.2 je znázorněn dolní součet dané funkce $f(x, y)$ při rozdělení pravoúhelníku $\mathscr{R}$ na čtyři pravoúhelníky $\mathscr{R}_k$.



Obr. 2.2

Protože každá shora ohraničená množina má supremum, kdežto každá zdola ohraničená množina má infimum, má také množina všech dolních součtů s_n supremum, neboť pro každý dolní součet platí $s_n \leqq MR$. Podobně množina všech horních součtů má infimum, neboť $mR \leqq S_n$. Tím docházíme k této definici:

2.1.3. Definice. 1. Supremum množiny všech dolních součtů s_n pro integrabilní funkci $f(x, y)$ na pravoúhelníku $\mathscr{R}$ nazýváme *dolním Darbouxovým integrálem funkce* $f(x, y)$ *na pravoúhelníku* $\mathscr{R}$ a značíme je

$$\underline{\iint_{\mathscr{R}}} f(x, y)\,dx\,dy\,.$$

Podobně *horním Darbouxovým integrálem funkce* $f(x, y)$ *na pravoúhelníku* $\mathscr{R}$ nazýváme infimum množiny všech horních součtů S_n pro integrabilní funkci $f(x, y)$ na pravoúhelníku $\mathscr{R}$ a značíme je

$$\overline{\iint_{\mathscr{R}}} f(x, y)\,dx\,dy\,.$$

2. Jsou-li oba tyto Darbouxovy integrály stejné, nazýváme jejich společnou hodnotu *dvojrozměrným* (nebo *dvojným*) *Riemannovým integrálem funkce* $f(x, y)$ *na pravoúhelníku* $\mathscr{R}$ a značíme ji

$$\iint_{\mathscr{R}} f(x, y)\,dx\,dy\,.$$

2.1.4. Poznámka. Lze dokázat, že u integrabilních funkcí ve smyslu definice 2.1.1 dvojrozměrný Riemannův integrál vždy existuje. Je třeba však upozornit, že třída integrabilních funkcí ve smyslu definice 2.1.3 je mnohem širší. Pro naše účely však zatím s pojmem integrabilní funkce ve smyslu definice 2.1.1 zcela vystačíme.

2.1.5. Normální posloupnost dělení pravoúhelníku $\mathscr{R}$. Rozdělme pravoúhelník $\mathscr{R}$ na pravoúhelníky $\mathscr{R}_k$ způsobem uvedeným v článku 2.1.2 a největší z délek úhlopříček těchto pravoúhelníků označme $\nu(D_1)$ a nazvěme *normou dělení* D_1. Pak každý pravoúhelník $\mathscr{R}_k$ rozdělme podobným způsobem na dílčí pravoúhelníky $\mathscr{R}_{kj}$ a příslušnou normu tohoto druhého dělení D_2 označme $\nu(D_2)$. Postupujeme-li takto dále bez omezení, dostaneme posloupnost dělení pravoúhelníku $\mathscr{R}$ a zároveň posloupnost $\{\nu(D_k)\}$ norem. Jestliže přitom počet n dílčích pravoúhelníků roste nade všechny meze (tj. pro $n \to \infty$) a zároveň posloupnost norem $\nu(D_k)$ klesá k nule, pak takovou posloupnost dělení pravoúhelníku $\mathscr{R}$ nazýváme *normální.*

Například normální posloupnost dělení pravoúhelníku $\mathscr{R}$ dostaneme, jestliže daný pravoúhelník rozčtvrtíme, tj. rozdělíme na čtyři stejné pravoúhelníky rovnoběžkami se souřadnicovými osami. Pak každý z těchto pravoúhelníků opět rozčtvrtíme, a tak pokračujeme bez omezení.

Pro dvojrozměrné integrály platí toto tvrzení, které je obdobou věty 1.16.7:

2.1.6. Věta. *Nechť funkce* $f(x, y)$ *je integrabilní na pravoúhelníku* $\mathscr{R}$. *Zvolme libovolnou normální posloupnost dělení pravoúhelníku* $\mathscr{R}$ *a nechť* $\{s_n\}$, $\{\sigma_n\}$, $\{S_n\}$ *po řadě značí příslušné posloupnosti dolních, integrálních a horních součtů funkce* $f(x, y)$, *přičemž infimum a supremum této funkce na pravoúhelníku* $\mathscr{R}$ *označme po řadě* m *a* M.

Je-li R *obsah pravoúhelníku* $\mathscr{R}$, *platí tyto vztahy:*

1. $mR \leqq s_n \leqq \iint_{\mathscr{R}} f(x, y)\,dx\,dy \leqq S_n \leqq MR$,
2. $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ \nu\to 0}} s_n = \lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ \nu\to 0}} \sigma_n = \iint_{\mathscr{R}} f(x, y)\,dx\,dy = \lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ \nu\to 0}} S_n$.

2.1.7. Důsledek věty 2.1.6. Je-li $f(x, y)$ integrabilní funkce na pravoúhelníku $\mathscr{R}$, pak pomocí integrálních součtů σ_n lze určit dvojrozměrný integrál funkce f s libovolnou přesností, zvolíme-li počet n dělicích pravoúhelníků dosti velký a tyto pravoúhelníky dosti malé.

To znamená, že zvolíme-li si libovolné číslo $\varepsilon > 0$, pak pro dosti velké indexy n a pro všechny dosti malé (co do délky i výšky) pravoúhelníky $\mathscr{R}_k$ platí

$$\boxed{\left|\iint_{\mathscr{R}} f(x, y)\,dx\,dy - \sigma_n\right| < \varepsilon\,.} \tag{5}$$

2.1.8. Geometrický význam dvojrozměrného integrálu. Je-li $f(x, y) \geqq 0$ na pravoúhelníku $\mathscr{R}$, pak z toho, co jsme řekli v článku 2.1.2 o geometrickém významu dolního součtu s_n funkce $f(x, y)$, plyne, že dvojrozměrný integrál funkce f na pravoúhelníku $\mathscr{R}$ vyjadřuje objem části kvádru s podstavou $\mathscr{R}$, seříznutého plochou $z = f(x, y)$.

2.1.9. Věta. *Mějme dvě integrabilní funkce $f(x, y)$, $h(x, y)$ na pravoúhelníku $\mathscr{R}$, rozděleném rovnoběžkou s některou ze souřadnicových os na dva pravoúhelníky $\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2$. Je-li c libovolná konstanta, platí tyto vztahy:*

1. $\iint_{\mathscr{R}} c f(x, y) \, dx \, dy = c \iint_{\mathscr{R}} f(x, y) \, dx \, dy$,
2. $\iint_{\mathscr{R}} [f(x, y) + h(x, y)] \, dx \, dy = \iint_{\mathscr{R}} f(x, y) \, dx \, dy + \iint_{\mathscr{R}} h(x, y) \, dx \, dy$,
3. $\iint_{\mathscr{R}_1} f(x, y) \, dx \, dy + \iint_{\mathscr{R}_2} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\mathscr{R}} f(x, y) \, dx \, dy$.

Důkaz věty neuvádíme. Jednotlivé vztahy lze dokázat snadno pomocí integrálních součtů na základě tvrzení 2.1.6/2.

Důležitá pro výpočet je věta, nazvaná podle německého matematika jménem *Peter Gustav Lejeune-Dirichlet* (1805–1859):

2.1.10. Dirichletova věta. *Je-li $f(x, y)$ spojitá funkce na uzavřeném pravoúhelníku*

$$\mathscr{R} = \{x \in \langle a, b \rangle, \ y \in \langle c, d \rangle\},$$

platí

$$\iint_{\mathscr{R}} f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) \, dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) \, dx \right] dy . \qquad (6)$$

Důkaz. Rozdělme pravoúhelník $\mathscr{R}$ na celkem mn pravoúhelníků $\mathscr{R}_k$ tak, že intervaly $\langle a, b \rangle$, $\langle c, d \rangle$ rozdělíme dělicími body, pro něž platí

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_m = b ,$$

$$c = y_0 < y_1 < \ldots < y_k < \ldots < y_n = d .$$

Nechť $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$ značí délky jednotlivých dílčích intervalů, kde $i = 1, 2, \ldots, m$, kdežto $k = 1, 2, \ldots, n$.

Nechť m_{ik} je infimum, kdežto M_{ik} supremum funkce $f(x, y)$ na pravoúhelníku s rozměry Δx_i a Δy_k. Nechť dále ξ_i je libovolný bod z intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ a označme

$$g(x) = \int_c^d f(x, y) \, dy$$

(obr. 2.3). Uvedený integrál existuje, neboť funkce f je při pevném čísle $x \in \langle a, b \rangle$ spojitou funkcí proměnné y s oborem $\langle c, d \rangle$. Utvořme nyní součet

$$K_m = g(\xi_1) \Delta x_1 + g(\xi_2) \Delta x_2 + \ldots + g(\xi_m) \Delta x_m ,$$

kde je

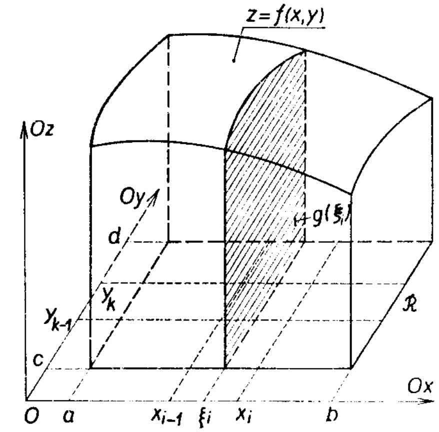
$$g(\xi_i) = \int_c^d f(\xi_i, y) \, dy = \int_c^{y_1} + \int_{y_1}^{y_2} + \ldots + \int_{y_{n-1}}^d .$$

Protože pro $\forall y \in \langle y_{k-1}, y_k \rangle$ je

$$m_{ik} \leqq f(\xi_i, y) \leqq M_{ik} ,$$

dostáváme odtud vztahy

$$m_{ik} \Delta y_k \leqq \int_{y_{k-1}}^{y_k} f(\xi_i, y) \, dy \leqq M_{ik} \Delta y_k .$$



Obr. 2.3

Sečtením těchto nerovností pro $k = 1, 2, \ldots, n$ máme

$$\sum_{k=1}^{n} m_{ik} \Delta y_k \leqq \int_c^d f(\xi_i, y) \, dy \leqq \sum_{k=1}^{n} M_{ik} \Delta y_k ,$$

takže

$$\left(\sum_{k=1}^{n} m_{ik} \Delta y_k \right) \Delta x_i \leqq g(\xi_i) \Delta x_i \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} M_{ik} \Delta y_k \right) \Delta x_i .$$

Odtud sečtením nerovností pro $i = 1, 2, \ldots, m$ dostaneme

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} m_{ik} \Delta y_k \right) \Delta x_i \leqq K_m \leqq \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} M_{ik} \Delta y_k \right) \Delta x_i .$$

Protože $\Delta x_i \Delta y_k = R_{ik}$ značí obsah jednoho z dílčích pravoúhelníků, představuje dvojný součet na levé straně posledních nerovností dolní součet s_{mn}, kdežto dvojný součet na pravé straně horní součet S_{mn} pro funkci $f(x, y)$ při uvažovaném dělení pravoúhelníku $\mathscr{R}$.

Je tedy

$$s_{mn} \leqq K_m \leqq S_{mn}.$$

Vezmeme-li v úvahu libovolnou normální posloupnost dělení pravoúhelníku $\mathscr{R}$, pak pro $m \to \infty$, $n \to \infty$, když zároveň všechny délky $\Delta x_i \to 0$, $\Delta y_k \to 0$, dostáváme

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} s_{mn} = \lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} S_{mn} = \iint_{\mathscr{R}} f(x, y)\,dx\,dy.$$

Proto také

$$\lim_{m\to\infty} K_m = \iint_{\mathscr{R}} f(x, y)\,dx\,dy.$$

Přitom je

$$\lim_{m\to\infty} K_m = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} g(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right] dx.$$

Tím je dokázána první část rovnosti (6). Druhá část se dokáže analogicky. ■

2.1.11. Poznámka. Dirichletovy věty používáme k výpočtu dvojrozměrných integrálů na základě dvojnásobných integrálů.

Poznamenejme ještě, že symbol

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right] dx\,, \quad \text{popř.} \quad \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\,dx\right] dy$$

píšeme často v jednodušším tvaru

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy\,, \quad \text{popř.} \quad \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\,dx\,.$$

2.1.12. Speciální Dirichletova věta. *Jsou-li funkce $u(x)$, $v(y)$ spojité pro $\forall x \in \langle a, b\rangle$ a $\forall y \in \langle c, d\rangle$, je-li $f(x, y) = u(x)\,v(y)$ a $\mathscr{R} = \{x \in \langle a, b\rangle,\ y \in \langle c, d\rangle\}$, platí*

$$\iint_{\mathscr{R}} u(x)\,v(y)\,dx\,dy = \int_a^b u(x)\,dx\,.\int_c^d v(y)\,dy\,. \tag{7}$$

Důkaz. Podle Dirichletovy věty 2.1.10 platí

$$\iint_{\mathscr{R}} u(x)\,v(y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_c^d u(x)\,v(y)\,dy\right] dx =$$

$$= \int_a^b \left[u(x)\int_c^d v(y)\,dy\right] dx = \int_c^d v(y)\,dy\,.\int_a^b u(x)\,dx\,,$$

neboť

$$\int_c^d u(x)\,v(y)\,dy = u(x)\int_c^d v(y)\,dy\,. \quad ■$$

Příklad 2.1. Vypočtěme

$$A = \iint_{\mathscr{R}} (x^2y + xy^2)\,dx\,dy\,,$$

kde $\mathscr{R}$ je pravoúhelník $\{x \in \langle 2, 5\rangle,\ y \in \langle 1, 3\rangle\}$.

Řešení. 1. Podle Dirichletovy věty 2.1.10 dostáváme

$$A = \int_2^5 \left[\int_1^3 (x^2y + xy^2)\,dy\right] dx = \int_2^5 \left[\frac{x^2y^2}{2} + \frac{xy^3}{3}\right]_{y=1}^{y=3} dx =$$

$$= \int_2^5 \left(\frac{9}{2}x^2 + 9x - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{3}\right) dx = \int_2^5 \left(4x^2 + \frac{26x}{3}\right) dx =$$

$$= \left[\frac{4}{3}x^3 + \frac{13}{3}x^2\right]_2^5 = \frac{4}{3}(5^3 - 2^3) + \frac{13}{3}(5^2 - 2^2) =$$

$$= 4\,.\,39 + 13\,.\,7 = 13\,.\,19 = 247\,.$$

2. Vypočtěme daný integrál pomocí vzorce (7). Platí totiž

$$A = \iint_{\mathscr{R}} x^2y\,dx\,dy + \iint_{\mathscr{R}} xy^2\,dx\,dy = \int_2^5 x^2\,dx\,.\int_1^3 y\,dy +$$

$$+ \int_2^5 x\,dx\,.\int_1^3 y^2\,dy = \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^5.\left[\frac{y^2}{2}\right]_1^3 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_2^5.\left[\frac{y^3}{3}\right]_1^3 =$$

$$= \frac{1}{3}(125 - 8)\,\frac{1}{2}(9 - 1) + \frac{1}{2}(25 - 4)\,\frac{1}{3}(27 - 1) =$$

$$= 39\,.\,4 + \frac{21}{2}\,\frac{26}{3} = 156 + 91 = 247\,.$$

Příklad 2.2. Vypočtěme

$$B = \iint_{\mathscr{R}} \frac{dx\,dy}{x^2 + y^2}\,,$$

kde $\mathscr{R}$ je čtverec se středem v počátku a se stranou (délky $a = 2$) rovnoběžnou s osou Ox.

Řešení. Funkce $f(x, y) = 1/(x^2 + y^2)$ je na okolí počátku neohraničená, a proto uvedený integrál na daném čtverci není definován.

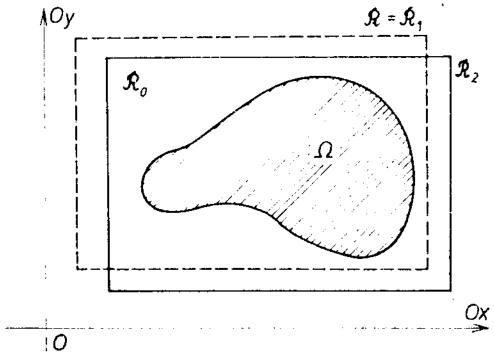
2.2. Dvojrozměrný integrál na obecné uzavřené oblasti

2.2.0. Úmluva. Pokud nebude výslovně uvedeno jinak, budeme v dalších úvahách jednat o uzavřených oblastech, které budeme značit nejčastěji znakem Ω. Přitom budeme často pro stručnost adjektivum „uzavřená" vynechávat.

2.2.1. Pojem dvojrozměrného integrálu na obecné uzavřené oblasti Ω odvodíme z pojmu dvojrozměrného integrálu na pravoúhelníku tím, že danou (uzavřenou) oblast Ω vnoříme do libovolného uzavřeného pravoúhelníku $\mathscr{R}$ (se stranami rovnoběžnými se souřadnicovými osami), takže $\Omega \subseteq \mathscr{R}$ (obr. 2.4), a definujeme novou funkci $F(x, y)$ vztahy:

a) $F(x, y) = f(x, y)$ pro $\forall[x, y] \in \Omega$,

b) $F(x, y) = 0$ pro $\forall[x, y] \in \mathscr{R} \setminus \Omega$.



Obr. 2.4

Pak je-li funkce $F(x, y)$ integrabilní na pravoúhelníku $\mathscr{R}$, považujeme též funkci $f(x, y)$ za integrabilní na oblasti Ω a klademe

$$\boxed{\iint_\Omega f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\mathscr{R}} F(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.}$$

Snadno se zjistí, že hodnota takto definovaného dvojrozměrného integrálu funkce $f(x, y)$ na oblasti Ω nezávisí na volbě pravoúhelníku $\mathscr{R}$.

Jsou-li totiž $\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2$ dva různé pravoúhelníky (viz obr. 2.4), v nichž oblast Ω (i se svou hraniční křivkou) leží, a je-li $\mathscr{R}_0$ jejich průnik, pak je

$$\iint_{\mathscr{R}_1} F(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\mathscr{R}_0} F(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\mathscr{R}_2} F(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

neboť $F(x, y) = 0$ v těch bodech pravoúhelníků $\mathscr{R}_1$ a $\mathscr{R}_2$, které neleží v průniku $\mathscr{R}_0$.

O existenci integrálu $\iint_\Omega f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ rozhoduje též tvar hraniční křivky oblasti Ω.

2.2.2. Definice. 1. Uzavřená oblast Ω se nazývá *normální vzhledem k ose Ox*, obsahuje-li všechny body $[x, y]$, které vyhovují nerovnostem

$$x_1 \leqq x \leqq x_2\,, \quad d(x) \leqq y \leqq h(x)\,,$$

přičemž funkce $d(x)$, $h(x)$ jsou na intervalu $\langle x_1, x_2\rangle$ spojité.

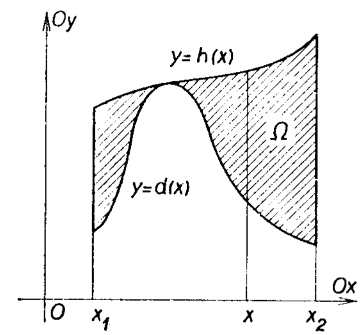
2. Uzavřená oblast Ω se nazývá *normální vzhledem k ose Oy*, obsahuje-li všechny body $[x, y]$, které vyhovují nerovnostem

$$y_1 \leqq y \leqq y_2\,, \quad d(y) \leqq x \leqq h(y)\,,$$

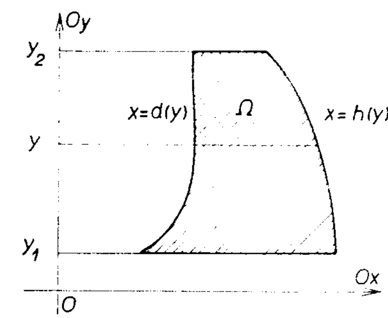
přičemž funkce $d(y)$, $h(y)$ jsou na intervalu $\langle y_1, y_2\rangle$ spojité.

3. Uzavřená oblast Ω se nazývá *regulární*, je-li možno rozdělit ji na konečný počet oblastí normálních vzhledem k některé z os Ox, Oy.

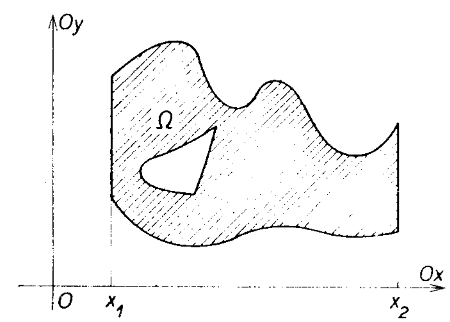
2.2.3. Poznámky. 1. Snadno se nahlédne, že každá rovnoběžka s osou Oy, jdoucí libovolným vnitřním bodem $x \in (x_1, x_2)$, protíná hranici oblasti Ω, normální vzhledem k ose Ox, nejvýše ve dvou bodech. V krajních bodech intervalu $\langle x_1, x_2\rangle$ mohou tyto rovnoběžky, tj. přímky $x = x_1$, $x = x_2$, splývat s hranicí oblasti Ω podél úsečky (obr. 2.5).



Obr. 2.5



Obr. 2.6



Obr. 2.7

Analogicky je tomu u oblasti normální vzhledem k ose Oy. Její hranici každá rovnoběžka s osou Ox, vedená bodem $y \in (y_1, y_2)$, protíná nejvýše ve dvou bodech, přičemž v krajních bodech intervalu $\langle y_1, y_2\rangle$ mohou tyto rovnoběžky splývat s hranicí oblasti Ω podél úsečky (obr. 2.6).

2. Stručně budeme křivku $y = d(x)$, popř. $x = d(y)$ z definice 2.2.2 nazývat *dolní (hraniční) křivkou normální oblasti Ω*, kdežto křivku $y = h(x)$, popř. $x = h(y)$ *horní (hraniční) křivkou normální oblasti Ω.*

3. Všimněme si, že hraniční křivku regulární oblasti Ω lze rozdělit na konečný počet křivek, které lze vyjádřit některou z rovnic tvaru $y = \varphi(x)$, $x = \psi(y)$.

Regulární oblast je znázorněna na obr. 2.7.

2.2.4. Věta. *Funkce $f(x, y)$, která je ohraničená a spojitá na uzavřené regulární oblasti Ω, je na této oblasti integrabilní.*

Důkaz. Zvolme libovolný pravoúhelník $\mathscr{R}$, v němž oblast Ω leží i se svou hranicí. Definujme funkci $F(x, y)$ podle článku 2.2.1. Pak všechny body nespojitosti funkce $F(x, y)$ leží na hraniční křivce oblasti Ω, a tedy na konečném počtu křivek, které lze vyjádřit některou z rovnic tvaru $y = \varphi(x)$, $x = \psi(y)$. Proto ve shodě s definicí 2.1.1 je funkce $F(x, y)$ integrabilní na pravoúhelníku $\mathscr{R}$, a tedy funkce $f(x, y)$ je integrabilní na oblasti Ω. ■

2.2.5. Poznámka. Protože dvojrozměrný integrál funkce $f(x, y)$ na uzavřené regulární oblasti Ω lze vyjádřit pomocí dvojrozměrného integrálu funkce $F(x, y)$ na pravoúhelníku $\mathscr{R}$, lze očekávat, že tento integrál bude mít na regulární oblasti analogické vlastnosti k vlastnostem uvedeným ve větě 2.1.9. Obdobou Dirichletovy věty je Fubiniova věta, nazvaná podle italského matematika *Quida Fubiniho* (1879 – 1943).

2.2.6. Fubiniova věta. *Je-li $f(x, y)$ spojitá funkce na uzavřené oblasti Ω, která je normální vzhledem k ose Ox, a má-li pro $\forall x \in \langle x_1, x_2 \rangle$ dolní křivka rovnici $y = d(x)$, kdežto horní křivka rovnici $y = h(x)$, pak platí*

$$\iint_\Omega f(x, y)\,dx\,dy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{d(x)}^{h(x)} f(x, y)\,dy\,. \tag{8}$$

Důkaz. Nechť $\mathscr{R} = \{x \in \langle a, b \rangle, y \in \langle c, d \rangle\}$ je libovolný pravoúhelník, ve kterém oblast Ω leží (obr. 2.8). Funkce $f(x, y)$ je na uzavřené oblasti Ω ohraničená, neboť je tam spojitá. Definujeme-li funkci $F(x, y)$ způsobem uvedeným v článku 2.2.1, je

$$\iint_\Omega f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{\mathscr{R}} F(x, y)\,dx\,dy\,.$$

Přitom je

$$\iint_{\mathscr{R}} F(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d F(x, y)\,dy =$$

$$= \int_a^{x_1} dx \int_c^d F(x, y)\,dy + \int_{x_1}^{x_2} dx \int_c^d F(x, y)\,dy + \int_{x_2}^{b} dx \int_c^d F(x, y)\,dy =$$

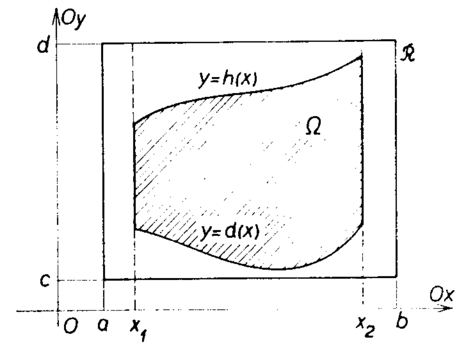
$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \int_c^d F(x, y)\,dy\,,$$

neboť pro $x \in \langle a, x_1)$ a pro $x \in (x_2, b\rangle$ je $F(x, y) = 0$, a tedy i příslušný integrál funkce $F(x, y)$ se rovná nule. Dále je

$$\int_c^d F(x, y)\,dy = \int_c^{y=d(x)} + \int_{y=d(x)}^{y=h(x)} + \int_{y=h(x)}^{d} = \int_{y=d(x)}^{y=h(x)} f(x, y)\,dy\,,$$

neboť $F(x, y) = 0$ pro $y \in \langle c, d(x))$ a pro $y \in (h(x), d\rangle$, kdežto $F(x, y) = f(x, y)$ pro $y \in \langle d(x), h(x) \rangle$ a $x \in \langle x_1, x_2 \rangle$. Tím dostáváme

$$\iint_\Omega f(x, y)\,dx\,dy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y=d(x)}^{y=h(x)} f(x, y)\,dy\,. \quad ■$$



Obr. 2.8

2.2.7. Poznámka. Jestliže uzavřená oblast Ω je normální vzhledem k ose Oy a jestliže pro $y \in \langle y_1, y_2 \rangle$ je $x = d(y)$ dolní (hraniční) křivkou, kdežto $x = h(y)$ je horní (hraniční) křivkou oblasti Ω (vzhledem k ose Oy), na níž je funkce $f(x, y)$ spojitá, pak je

$$\boxed{\iint_\Omega f(x, y)\,dx\,dy = \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x=d(y)}^{x=h(y)} f(x, y)\,dx\,.} \tag{9}$$

2.2.8. Upozornění. Je-li Ω regulární uzavřená oblast, na níž je funkce $f(x, y)$ spojitá, rozdělíme oblast Ω na normální oblasti $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ vzhledem k některé z os Ox, Oy a klademe

$$\iint_\Omega f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{\Omega_1} f(x, y)\,dx\,dy + \ldots + \iint_{\Omega_n} f(x, y)\,dx\,dy\,.$$

K výpočtu jednotlivých integrálů na normálních oblastech Ω_k můžeme pak použít Fubiniovy věty.

Příklad 2.3. Vypočtěme $\iint_\Omega (5x^2 - 2xy)\,dx\,dy$, značí-li Ω trojúhelník s vrcholy $O = [0, 0]$, $A = [2, 0]$, $B = [0, 1]$.

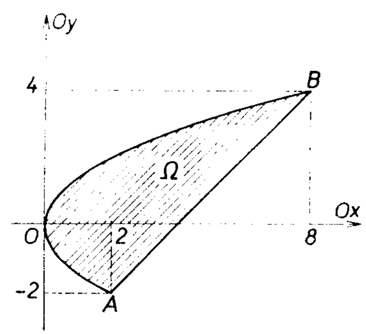
Řešení. Oblast Ω je normální vzhledem k ose Ox (též Oy). Dolní křivka je $y = 0$, horní křivka $y = 1 - x/2$ pro $x \in \langle 0, 2\rangle$. Proto je

$$\iint_\Omega (5x^2 - 2xy)\,dx\,dy = \int_0^2 dx \int_{y=0}^{1-x/2} (5x^2 - 2xy)\,dy =$$
$$= \int_0^2 [5x^2y - xy^2]_{y=0}^{1-x/2}\,dx = \int_0^2 \left[5x^2\left(1 - \frac{x}{2}\right) - x\left(1 - \frac{x}{2}\right)^2\right]dx = \int_0^2 \left(6x^2 - x - \frac{11}{4}x^3\right)dx =$$
$$= \left[2x^3 - \frac{11}{16}x^4 - \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 16 - 11 - 2 = 3\,.$$

Proto hledaný integrál

$$\iint_\Omega (5x^2 - 2xy)\,dx\,dy = 3\,.$$

Příklad 2.4. Vypočtěme $K = \iint_\Omega (2x + 3y + 1)\,dx\,dy$, kde Ω je uzavřená oblast ohraničená parabolou $y^2 = 2x$ a její tětivou AB, kde $A = [2, -2]$, $B = [8, 4]$.



Obr. 2.9

Řešení. Oblast Ω je normální vzhledem k oběma osám (obr. 2.9). Výhodnější je vyjít od osy Oy, protože dolní křivka vzhledem k ose Oy je vyjádřena jedinou rovnicí $x = y^2/2$, zatímco dolní křivka vzhledem k ose Ox se rozpadá na dvě křivky, a to na oblouk paraboly a na úsečku AB. Horní křivka (vzhledem k ose Oy) má pro $\forall y \in \langle -2, 4\rangle$ rovnici

$$y + 2 = x - 2 \quad \text{neboli} \quad x = y + 4\,.$$

Protože daná funkce je všude spojitá, a tedy také na oblasti Ω, platí

$$K = \int_{-2}^4 dy \int_{x=y^2/2}^{y+4} (2x + 3y + 1)\,dx = \int_{-2}^4 [x^2 + 3xy + x]_{x=y^2/2}^{y+4}\,dy =$$
$$= \int_{-2}^4 \left(y^2 + 8y + 16 + 3y^2 + 12y + y + 4 - \frac{y^4}{4} - \frac{3y^3}{2} - \frac{y^2}{2}\right)dy =$$
$$= \left[-\frac{y^5}{20} - \frac{3y^4}{8} + \frac{7y^3}{6} + \frac{21y^2}{2} + 20y\right]_{-2}^4 = -\frac{4^5 + 2^5}{20} - \frac{3}{8}(4^4 - 2^4) + \frac{7}{6}(4^3 + 2^3) + \frac{21}{2}(4^2 - 2^2) + 20\,.\,6 = 187\frac{1}{5}\,.$$

2.2.9. Zobrazení oblastí. Máme-li do dvojrozměrného integrálu zavést nové proměnné u, v rovnicemi

$$x = \varphi(u, v)\,, \quad y = \psi(u, v)\,, \tag{10}$$

je třeba dbát určitých předpokladů, o nichž nyní pojednáme.

Při takové transformaci přejde původní uzavřená oblast Ω^* v určitý obor Ω, který nemusí být vždy oblastí. Přitom obor Ω nazýváme *obrazem oblasti* Ω^*, kdežto oblast Ω^* *vzorem oboru* Ω.

1. Jestliže každým dvěma různým bodům $A^* = [u_1, v_1]$, $B^* = [u_2, v_2]$ z oblasti Ω^* jsou rovnicemi (10) přiřazeny opět dva různé body $A = [x_1, y_1]$, $B = [x_2, y_2]$ oboru Ω, mluvíme o *prostém* neboli *injektivním zobrazení oblasti* Ω^* *na obor* Ω, resp. *do oboru* Ω podle toho, zda všechny body z oboru Ω mají, resp. nemají vzor v oblasti Ω^*. Prosté zobrazení oblasti Ω^* na obor Ω se nazývá *vzájemně jednoznačné* nebo *bijektivní*.

2. Jsou-li přitom funkce $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ spojité na oblasti Ω^*, mluvíme o *spojitém zobrazení obou oborů*.

3. Mají-li tyto funkce na oblasti Ω^* spojité parciální derivace prvního řádu, mluvíme o *diferenciabilním zobrazení*. Přitom se determinant tvaru

$$J(\varphi, \psi) = \begin{vmatrix} \varphi'_u, & \varphi'_v \\ \psi'_u, & \psi'_v \end{vmatrix} \tag{11}$$

nazývá *jakobián* (tj. *Jacobiův determinant*) *tohoto zobrazení*.

Lze dokázat, že je-li v některém bodě $P_0 = [u_0, v_0]$ jakobián $J \neq 0$, pak zobrazení určitého okolí bodu P_0 do oblasti Ω je prosté.

2.2.10. Věta. 1. *Nechť vnitřek regulární oblasti* Ω^* *se zobrazí pomocí rovnic*

$$x = \varphi(u, v)\,, \quad y = \psi(u, v)$$

vzájemně jednoznačně na oblast Ω, *zatímco zobrazení hraniční křivky oblasti* Ω^* *nemusí být prosté.*

2. *Nechť funkce $f(x, y)$ je spojitá a ohraničená na uzavřené oblasti Ω, kdežto funkce $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ mají spojité parciální derivace prvního řádu na oblasti D, v níž leží oblast Ω^* i se svou hraniční křivkou.*

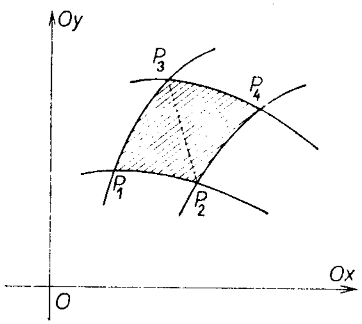
3. *Nechť všude uvnitř oblasti Ω^* je jakobián zobrazení nenulový, takže*

$$J = J(\varphi, \psi) \neq 0 .$$

Pak platí

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\Omega^*} f(\varphi(u, v), \psi(u, v))\,|J(\varphi, \psi)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v . \tag{12}$$

Důkaz provedeme zčásti. Půjde zde jen o vysvětlení, proč součin $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ přejde danou substitucí ve výraz $|J(\varphi, \psi)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$.



Obr. 2.10

Transformací

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v)$$

se oblast Ω^* zobrazí na oblast Ω. Přitom element $\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ oblasti Ω^* přejde v element oblasti Ω, znázorněný na obr. 2.10. Je to čtyřúhelník s vrcholy $P_1 = [x_1, y_1]$, $P_2 = [x_2, y_2]$, $P_3 = [x_3, y_3]$, $P_4 = [x_4, y_4]$, přičemž podle věty o střední hodnotě je

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi(u, v), \\ x_2 &= \varphi(u + \mathrm{d}u, v) = \varphi(u, v) + \varphi'_u\,\mathrm{d}u, \\ x_3 &= \varphi(u, v + \mathrm{d}v) = \varphi(u, v) + \varphi'_v\,\mathrm{d}v, \\ y_1 &= \psi(u, v), \\ y_2 &= \psi(u + \mathrm{d}u, v) = \psi(u, v) + \psi'_u\,\mathrm{d}u, \\ y_3 &= \psi(u, v + \mathrm{d}v) = \psi(u, v) + \psi'_v\,\mathrm{d}v. \end{aligned}$$

Obsah M uvedeného čtyřúhelníku se pro velmi malé přírůstky (diferenciály) $|\mathrm{d}u|$, $|\mathrm{d}v|$ přibližně rovná dvojnásobku obsahu trojúhelníku $P_1P_2P_3$. Proto položíme

$$M = |\Delta| ,$$

kde

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1, & x_1, & y_1 \\ 1, & x_2, & y_2 \\ 1, & x_3, & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & \varphi, & \psi \\ 1, & \varphi + \varphi'_u\,\mathrm{d}u, & \psi + \psi'_u\,\mathrm{d}u \\ 1, & \varphi + \varphi'_v\,\mathrm{d}v, & \psi + \psi'_v\,\mathrm{d}v \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \varphi'_u, & \varphi'_v \\ \psi'_u, & \psi'_v \end{vmatrix} \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = J(\varphi, \psi)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v .$$

Je tedy

$$M = |J(\varphi, \psi)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v . \quad \blacksquare$$

2.2.11. Transformace pomocí polárních souřadnic. Při transformaci do polárních souřadnic r, t rovnicemi

$$x = r\cos t , \quad y = r\sin t$$

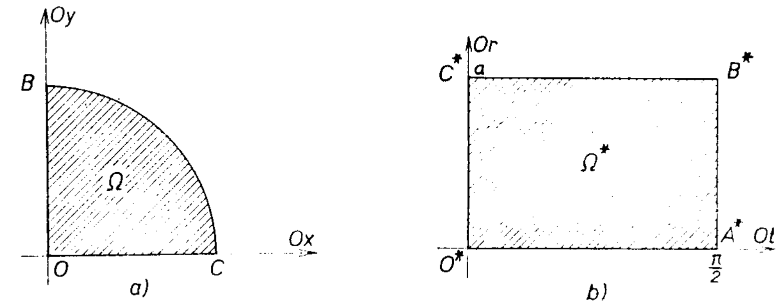
je třeba uvážit, že zobrazení takto definované není všude prosté, neboť např. v rovině s osami Or, Ot se celá přímka $r = 0$ zobrazí do počátku $O = [0, 0]$ souřadnicové soustavy s osami Ox a Oy. Omezíme-li se však na úhly $t \in \langle 0, 2\pi)$, pak uvažované zobrazení sektoru omezeného rameny daného úhlu není prosté jen na hranici sektoru Ω^*. Proto můžeme použít předchozí věty. Přitom jakobián tohoto zobrazení je

$$J(r, t) = \begin{vmatrix} x'_r, & x'_t \\ y'_r, & y'_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos t, & -r\sin t \\ \sin t, & r\cos t \end{vmatrix} =$$

$$= r(\cos^2 t + \sin^2 t) = r . \tag{13}$$

Proto pro transformaci do polárních souřadnic r, t platí vztah

$$\boxed{\iint_{\Omega} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\Omega^*} f(r\cos t,\ r\sin t)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t .} \tag{14}$$



Obr. 2.11

Příklad 2.5. Vypočtěme

$$A = \iint_{\Omega} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y ,$$

kde Ω je čtvrtkruh s poloměrem $r = a$ v prvním kvadrantu (obr. 2.11a).

Řešení. Použijeme transformace do polárních souřadnic r, t pomocí rovnic

$$x = r\cos t\,,\quad y = r\sin t\,.$$

Touto transformací přejde daný čtvrtkruh v obdélník s vrcholy

$$O^* = [0, 0]\,,\quad A^* = [\pi/2, 0]\,,\quad B^* = [\pi/2, r]\,,\quad C^* = [0, r]\,,$$

jak je znázorněn na obr. 2.11b.

Všimněme si, že počátek O se zobrazí na celou úsečku O^*A^*, úsečka OC přejde v úsečku O^*C^*, oblouk CB přejde v úsečku C^*B^*, kdežto úsečka OB se zobrazí na úsečku A^*B^*. Vzhledem k tomu podle věty 2.2.10 a vzorce (14) dostaneme

$$A = \iint_{\Omega} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \iint_{\Omega^*} e^{-r^2} r\,dr\,dt = \int_0^{\pi/2} dt \int_0^a e^{-r^2} r\,dr\,.$$

Protože $F(r) = -\frac{1}{2}e^{-r^2}$ je primitivní funkcí k funkci $r\,e^{-r^2}$, dostáváme z předchozího výsledku vztah

$$A = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^a = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}(1 - e^{-a^2})\,.$$

Je tedy hledaný integrál

$$A = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-a^2})\,.$$

Příklad 2.6. Vypočtěme

$$K = \iint_{\Omega} \sqrt{\left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right]}\,dx\,dy\,,$$

kde Ω je část roviny ohraničená elipsou $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ a úsečkami na kladných poloosách os Ox a Oy.

Řešení. K výpočtu použijeme transformace do tzv. *zobecněných polárních souřadnic* pomocí rovnic

$$\frac{x}{a} = r\cos t\,,\quad \frac{y}{b} = r\sin t\,.$$

Jakobián zobrazení je

$$J = \begin{vmatrix} x'_r, & x'_t \\ y'_r, & y'_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos t, & -ar\sin t \\ b\sin t, & br\cos t \end{vmatrix} = abr\,.$$

Kvadrant elipsy přejde uvedeným zobrazením v obdélník určený intervaly $\langle 0, 1\rangle \ni r$, $\langle 0, \frac{1}{2}\pi\rangle \ni t$. Proto podle věty 2.2.10 platí

$$K = \iint_{\Omega^*} abr\sqrt{(1 - r^2)}\,dr\,dt = \int_0^{\pi/2} dt \int_0^1 abr\sqrt{(1 - r^2)}\,dr =$$

$$= \frac{ab\pi}{2}\frac{1}{3}[(1 - r^2)^{3/2}]_1^0 = \frac{ab\pi}{6}\,.$$

2.2.12. Poznámka o nevlastních dvojrozměrných integrálech. Dvojrozměrný integrál na uzavřené regulární oblasti Ω jsme definovali za dvou předpokladů:

1. Integrační oblast Ω je ohraničená.
2. Integrand $f(x, y)$ je na oblasti Ω ohraničenou funkcí.

Nejsou-li tyto podmínky splněny, lze za určitých předpokladů rozšířit pojem dvojrozměrného integrálu podobným způsobem jako u nevlastních integrálů funkcí jedné proměnné:

Nechť $\{\mathscr{B}_n\}$ značí posloupnost uzavřených oblastí, které leží i se svými hraničními křivkami v oboru Ω, přičemž platí

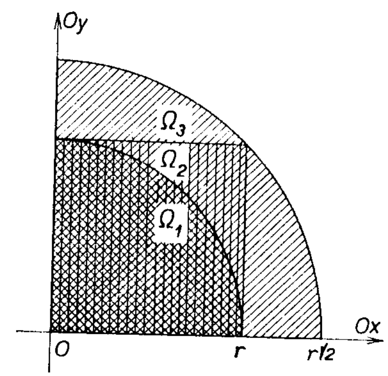
a) $\mathscr{B}_1 \subset \mathscr{B}_2 \subset \ldots \subset \mathscr{B}_n \subset \ldots \subset \Omega$;

b) $\lim_{n\to\infty} \mathscr{B}_n = \Omega$, čímž rozumíme to, že libovolná konečná a uzavřená oblast Δ, která leží v oboru Ω, leží také téměř ve všech oblastech $\mathscr{B}_n$.

Má-li pak posloupnost $\{\iint_{\mathscr{B}_n} f(x, y)\,dx\,dy\}$ konečnou limitu L, která nezávisí na volbě posloupnosti $\{\mathscr{B}_n\}$ oblastí $\mathscr{B}_n$, řekneme, že *nevlastní integrál* $\iint_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy$ *konverguje*, a klademe

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy = L\,. \tag{15}$$

Příklad 2.7. Vypočtěme nevlastní integrál $K = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ pomocí dvojrozměrných integrálů funkce $e^{-x^2-y^2}$.



Obr. 2.12

Řešení. Vezměme v úvahu tři uzavřené obory: čtvrtkruh Ω_1 s poloměrem r, čtverec Ω_2 se stranou délky r a čtvrtkruh Ω_3 s poloměrem $R = r\sqrt{2}$, jak jsou znázorněny na obr. 2.12.

Na základě výsledku příkladu 2.6 zřejmě je

$$A_1 = \iint_{\Omega_1} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-r^2}\right),$$

$$A_3 = \iint_{\Omega_3} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-2r^2}\right).$$

Dále podle věty 2.1.12 je

$$\iint_{\Omega_2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_0^r e^{-x^2}\,dx \,.\int_0^r e^{-y^2}\,dy = \left(\int_0^r e^{-x^2}\,dx\right)^2 .$$

Protože je $e^{-x^2-y^2} > 0$ a platí $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega_3$, je zřejmě

$$A_1 \leqq \left(\int_0^r e^{-x^2}\,dx\right)^2 \leqq A_3$$

neboli

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{(1 - e^{-r^2})} \leqq \int_0^r e^{-x^2}\,dx \leqq \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{(1 - e^{-2r^2})}.$$

Odtud pro $r \to +\infty$ dostáváme

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

2.3. Trojrozměrný integrál na kvádru

Pojem trojrozměrného integrálu zavádíme zcela obdobně jako pojem dvojrozměrného integrálu. Proto se zde omezíme na nejdůležitější definice a věty.

2.3.1. Definice integrabilní funkce. Funkce $f(x, y, z)$ se nazývá *integrabilní na souřadnicovém kvádru* (neboli *na trojrozměrném uzavřeném intervalu*)

$$\mathcal{Q} = \{[x, y, z] \in \mathrm{R}^3 \mid x \in \langle a_1, a_2\rangle,\ y \in \langle b_1, b_2\rangle,\ z \in \langle c_1, c_2\rangle\}$$

neboli stručně

$$\mathcal{Q} = \{x \in \langle a_1, a_2\rangle,\ y \in \langle b_1, b_2\rangle,\ z \in \langle c_1, c_2\rangle\},$$

je-li na něm ohraničená a je-li spojitá ve všech bodech s případnou výjimkou bodů nespojitosti ležících na konečném počtu ploch, které lze vyjádřit některou z rovnic tvaru

$$x = \varphi(y, z), \quad y = \psi(x, z), \quad z = \chi(x, y),$$

kde φ, ψ, χ jsou spojité funkce příslušných argumentů.

2.3.2. Zavedení pojmu trojrozměrného integrálu na kvádru. Vezměme v úvahu funkci $f(x, y, z)$, integrabilní na souřadnicovém kvádru $\mathcal{Q}$. Rozdělme tento kvádr na n částečných kvádrů se stěnami rovnoběžnými se souřadnicovými rovinami a označme je $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \ldots, \mathcal{Q}_n$, kdežto jejich objemy po řadě označme $|\mathcal{Q}_1|, |\mathcal{Q}_2|, \ldots, |\mathcal{Q}_n|$, popř. jen $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, takže je $|\mathcal{Q}_\nu| = Q_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$).

Značí-li m_k, resp. M_k infimum, resp. supremum funkce $f(x, y, z)$ na částečném kvádru $\mathcal{Q}_k$, kdežto m, resp. M infimum, resp. supremum funkce $f(x, y, z)$ na celém kvádru $\mathcal{Q}$, pak zřejmě platí

$$m \leqq m_k \leqq M_k \leqq M .$$

Zvolme v každém kvádru $\mathcal{Q}_k$ libovolný, ale přitom určitý bod $P_k = [\xi_k, \eta_k, \zeta_k]$ a utvořme tyto dolní, integrální a horní součty:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} m_k Q_k \quad (\textit{dolní součet}),$$

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(P_k)\, Q_k \quad (\textit{integrální součet}), \tag{16}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} M_k Q_k \quad (\textit{horní součet}).$$

Takových součtů s_n, σ_n, S_n existuje nekonečně mnoho, měníme-li počet n dílčích kvádrů $\mathcal{Q}_k$ a jejich polohu v kvádru $\mathcal{Q}$.

Označíme-li Q objem kvádru $\mathcal{Q}$, platí pro tyto součty vztahy

$$mQ \leqq s_n \leqq \sigma_n \leqq S_n \leqq MQ . \tag{17}$$

Protože množina všech dolních (popř. horních) součtů je ohraničená shora (popř. zdola), má supremum (popř. infimum). Přitom supremum $\sup\{s_n\}$ nazýváme *dolním Darbouxovým integrálem funkce* $f(x, y, z)$ *na kvádru* $\mathcal{Q}$ a píšeme

$$\sup\{s_n\} = \underline{\iiint_{\mathcal{Q}}} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz .$$

Podobně *horní Darbouxův integrál funkce* $f(x, y, z)$ *na kvádru* $\mathcal{Q}$ definujeme vztahem

$$\inf\{S_n\} = \overline{\iiint_{\mathcal{Q}}} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz .$$

Lze dokázat, že pro funkce $f(x, y, z)$, které jsou integrabilní ve smyslu definice 2.3.1, je dolní Darbouxův integrál roven hornímu Darbouxovu integrálu. Jejich společnou hodnotu pak nazýváme *trojrozměrným integrálem funkce* $f(x, y, z)$ *na kvádru* $\mathcal{Q}$, takže klademe

$$\boxed{\begin{aligned}\iiint_{\mathcal{Q}} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz &= \underline{\iiint_{\mathcal{Q}}} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \\ &= \overline{\iiint_{\mathcal{Q}}} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz .\end{aligned}} \tag{18}$$

Je třeba poznamenat, že třída integrabilních funkcí, tj. funkcí, jejichž horní a dolní Darbouxův integrál jsou si rovny, je širší než třída integrabilních funkcí ve smyslu definice 2.3.1.

Protože definice trojrozměrného integrálu je analogická k pojmu dvojrozměrného integrálu, má také analogické vlastnosti k vlastnostem uvedeným v článcích 2.1.6 a 2.1.9. Uveďme zde proto jen Dirichletovy věty, které vyjadřují trojrozměrný integrál pomocí trojnásobného integrálu:

2.3.3. Dirichletova věta. *Je-li $f(x, y, z)$ spojitá funkce na souřadnicovém kvádru $\mathcal{Q}$, určeném intervaly*

$$x \in \langle a_1, a_2 \rangle, \quad y \in \langle b_1, b_2 \rangle, \quad z \in \langle c_1, c_2 \rangle,$$

platí

$$\iiint_{\mathcal{Q}} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int_{a_1}^{a_2} \left[\int_{b_1}^{b_2} \left(\int_{c_1}^{c_2} f(x, y, z)\,dz \right) dy \right] dx. \tag{19}$$

Příklad 2.8. Vypočtěme

$$\iiint_{\mathcal{Q}} \sin(x - 2y + 3z)\,dx\,dy\,dz,$$

kde $\mathcal{Q}$ je kvádr $\{x \in \langle 0, \pi \rangle, y \in \langle \pi, 2\pi \rangle, z \in \langle 0, 3\pi \rangle\}$.

Řešení. Podle věty 2.3.3 dostáváme

$$\iiint_{\mathcal{Q}} \sin(x - 2y + 3z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\pi} dx \int_{\pi}^{2\pi} dy \int_0^{3\pi} \sin(x - 2y + 3z)\,dz =$$

$$= \int_0^{\pi} dx \int_{\pi}^{2\pi} [-\tfrac{1}{3}\cos(x - 2y + 3z)]_{z=0}^{3\pi}\,dy =$$

$$= \int_0^{\pi} dx \int_{\pi}^{2\pi} [\tfrac{2}{3}\cos(x - 2y)]\,dy = \int_0^{\pi} [-\tfrac{1}{3}\sin(x - 2y)]_{y=\pi}^{2\pi}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\int_0^{\pi} [\sin(x - 4\pi) - \sin(x - 2\pi)]\,dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\int_0^{\pi} (\sin x - \sin x)\,dx = \frac{1}{3}\int_0^{\pi} 0\,dx = 0.$$

2.3.4. Speciální Dirichletova věta. *Je-li $f(x, y, z) \equiv u(x)\,v(y)\,w(z)$, přičemž funkce $u(x)$, $v(y)$, $w(z)$ jsou spojité na příslušných intervalech, které určují kvádr*

$$\mathcal{Q} = \{x \in \langle a_1, a_2 \rangle, \ y \in \langle b_1, b_2 \rangle, \ z \in \langle c_1, c_2 \rangle\},$$

platí

$$\iiint_{\mathcal{Q}} [u(x)\,v(y)\,w(z)]\,dx\,dy\,dz = \int_{a_1}^{a_2} u(x)\,dx \int_{b_1}^{b_2} v(y)\,dy \int_{c_1}^{c_2} w(z)\,dz. \tag{20}$$

Důkaz věty je zcela obdobný k důkazu věty 2.1.12. Proveďte jej sami jako cvičení.

Příklad 2.9. Vypočtěme

$$A = \iiint_{\mathcal{Q}} 3x^2 y\,dx\,dy\,dz,$$

kde $\mathcal{Q}$ je kvádr $\{x \in \langle 0, 1 \rangle, y \in \langle 2, 3 \rangle, z \in \langle 0, 2 \rangle\}$.

Řešení. Zde je

$$A = \int_0^1 3x^2\,dx \int_2^3 y\,dy \int_0^2 dz = [x^3]_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_2^3 [z]_0^2 = 1 \cdot \left(\frac{9}{2} - \frac{4}{2}\right) \cdot 2 = 5$$

2.4. Trojrozměrný integrál na regulární oblasti

Pojem trojrozměrného integrálu funkce $f(x, y, z)$ na uzavřené regulární prostorové oblasti Ω zavádíme (podobně jako dvojrozměrný integrál na regulární rovinné oblasti) převedením na trojrozměrný integrál na kvádru $\mathcal{Q}$.

2.4.1. Převod na trojrozměrný integrál na kvádru. Nejprve vnoříme prostorovou oblast Ω do libovolného souřadnicového kvádru $\mathcal{Q}$, na němž definujeme funkci $F(x, y, z)$ vztahy:

a) $F(x, y, z) = f(x, y, z)$ pro $\forall[x, y, z] \in \Omega$,
b) $F(x, y, z) = 0$ pro $\forall[x, y, z] \in \mathcal{Q} \setminus \Omega$.

Je-li $F(x, y, z)$ integrabilní na kvádru $\mathcal{Q}$, považujeme funkci $f(x, y, z)$ za integrabilní na oblasti Ω a klademe

$$\boxed{\iiint_{\Omega} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\mathcal{Q}} F(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.}$$

2.4.2. Definice. 1. Prostorová oblast Ω se nazývá *regulární*, je-li uzavřená a je-li možno její hraniční plochu rozdělit na konečný počet ploch, které lze vyjádřit některou z rovnic tvaru

$$z = \varphi_1(x, y), \quad x = \varphi_2(y, z), \quad y = \varphi_3(x, z).$$

2. Regulární prostorová oblast se nazývá *normální vzhledem k rovině Oxy*, dá-li se její hraniční plocha vyjádřit rovnicemi

$$z = z_1(x, y), \quad z = z_2(x, y),$$

přičemž stále je

$$z_1(x, y) \leqq z_2(x, y)$$

pro $\forall[x, y] \in \Omega_1$, kde Ω_1 je kolmý průmět oblasti Ω do roviny Oxy. Přitom se plocha s rovnicí $z = z_1(x, y)$, resp. $z = z_2(x, y)$ nazývá *dolní (hraniční)*, resp. *horní (hraniční) plocha normální prostorové oblasti Ω*.

3. Podobně se definují *normální oblasti vzhledem k rovině Oxz*, popř. *vzhledem k rovině Oyz*.

Všimněme si, že libovolná rovnoběžka s osou Oz protíná hraniční plochu oblasti, která je normální vzhledem k rovině Oxy, nejvýše ve dvou bodech, popřípadě s touto plochou splývá podél úsečky.

2.4.3. Fubiniova věta. a) *Nechť $f(x, y, z)$ je spojitá funkce na prostorové oblasti Ω, která je normální vzhledem k rovině Oxy, a nechť*

$$z = z_1(x, y), \quad \textit{resp.} \quad z = z_2(x, y)$$

je rovnice dolní, resp. horní (hraniční) plochy oblasti Ω pro $\forall[x, y] \in \Omega_1$, kde Ω_1 je kolmým průmětem oblasti Ω do roviny Oxy. Přitom předpokládáme, že funkce $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$ jsou na oblasti Ω_1 spojité.

Pak

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{\Omega_1} \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz\right] dx\,dy\,. \tag{21}$$

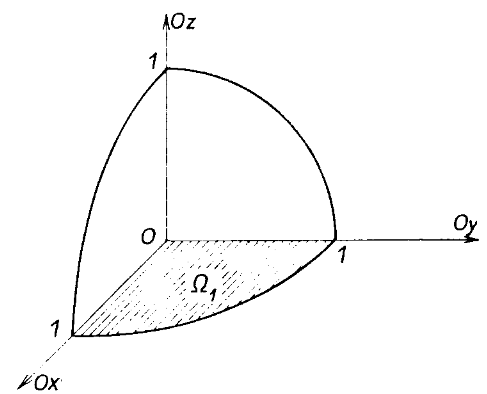
b) *Nechť kromě toho také rovinná oblast Ω_1 je normální, např. vzhledem k ose Ox, takže pro $\forall x \in \langle x_1, x_2 \rangle$ je*

$$y_1(x) \leqq y_2(x)\,,$$

kde $y = y_1(x)$, resp. $y = y_2(x)$ je dolní, resp. horní (hraniční) křivka oblasti Ω_1.

Pak platí

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz\,. \tag{22}$$



Obr. 2.13

Příklad 2.10. Vypočtěme integrál

$$A = \iiint_\Omega (x + y)\,z\,dx\,dy\,dz\,,$$

kde Ω je osmina koule $x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1$ z prvního oktantu (obr. 2.13).

Řešení. Oblast Ω je normální vzhledem k rovině Oxy, neboť její hraniční plochu lze vyjádřit rovnicemi $z = 0$ (u dolní hraniční plochy), $z = \sqrt{(1 - x^2 - y^2)}$ (u horní hraniční plochy) pro $\forall[x, y] \in \Omega_1$, kde Ω_1 značí čtvrtkruh v rovině Oxy. Protože Ω_1 je normální oblast vzhledem k ose Ox, přičemž pro $\forall x \in \langle 0, 1 \rangle$ představují rovnice $y = 0$, $y = \sqrt{(1 - x^2)}$ dolní a horní hraniční křivku oblasti Ω_1, dostáváme vztahy

$$A = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{(1-x^2)}} dy \int_0^{\sqrt{(1-x^2-y^2)}} (x + y)\,z\,dz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{(1-x^2)}} \left[(x + y)\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{\sqrt{(1-x^2-y^2)}} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{(1-x^2)}} (x + y)(1 - x^2 - y^2)\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{(1-x^2)}} [x(1 - x^2) + y(1 - x^2) - xy^2 - y^3]\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[x(1 - x^2)\,y + \frac{y^2}{2}(1 - x^2) - \frac{xy^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_{y=0}^{\sqrt{(1-x^2)}} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x(1 - x^2)^{3/2}\,dx + \frac{1}{4}\int_0^1 (1 - x^2)^2\,dx -$$

$$- \frac{1}{6}\int_0^1 x(1 - x^2)^{3/2}\,dx - \frac{1}{8}\int_0^1 (1 - x^2)^2\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 x(1 - x^2)^{3/2}\,dx + \frac{1}{8}\int_0^1 (1 - 2x^2 + x^4)\,dx =$$

$$= \frac{1}{15}\left[(1 - x^2)^{5/2}\right]_1^0 + \frac{1}{8}\left[x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^5}{5}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{15} + \frac{1}{8}\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{15} + \frac{8}{8\,.\,15} = \frac{2}{15}\,.$$

Hledaný integrál tedy je

$$A = \tfrac{2}{15}\,.$$

2.5. Transformace trojrozměrných integrálů

Pojem zobrazení dvojrozměrných uzavřených oblastí, zavedený v článku 2.2.9, lze bez obtíží rozšířit i na uzavřené oblasti v prostoru, vezmeme-li přitom v úvahu místo dvou funkcí tři funkce tvaru

$$x = \varphi(u, v, t)\,, \quad y = \psi(u, v, t)\,, \quad z = \chi(u, v, t)\,.$$

Přitom jakobián zobrazení je nyní tvaru

$$J = \begin{vmatrix} \varphi'_u, & \psi'_u, & \chi'_u \\ \varphi'_v, & \psi'_v, & \chi'_v \\ \varphi'_t, & \psi'_t, & \chi'_t \end{vmatrix}.$$

Vzhledem k tomu lze dokázat následující větu, která je obdobou věty 2.2.10. Uvádíme ji bez důkazu.

2.5.1. Věta. 1. *Nechť vnitřek regulární (trojrozměrné) oblasti Ω^* se zobrazí pomocí rovnic $x = \varphi(u, v, t)$, $y = \psi(u, v, t)$, $z = \chi(u, v, t)$ vzájemně jednoznačně na (trojrozměrnou) oblast Ω, zatímco zobrazení hraniční plochy oblasti Ω^* nemusí být prosté.*

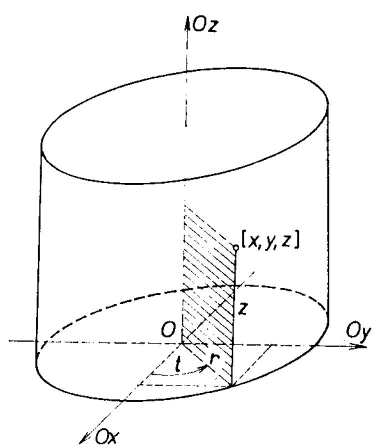
2. *Nechť funkce $f(x, y, z)$ je spojitá a ohraničená na oblasti Ω, kdežto funkce $\varphi(u, v, t)$, $\psi(u, v, t)$, $\chi(u, v, t)$ mají spojité parciální derivace prvního řádu na oblasti $\mathscr{B}$, v níž leží oblast Ω^* i se svou hraniční plochou.*

3. *Nechť všude uvnitř oblasti Ω^* je jakobián zobrazení nenulový, takže*

$$J = J(\varphi, \psi, \chi) \neq 0\,.$$

Pak platí

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega^*} f(\varphi, \psi, \chi)\,|J|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t\,. \tag{23}$$



Obr. 2.14

2.5.2. Transformace do cylindrických souřadnic. U trojrozměrných integrálů se často používá transformace do *cylindrických* (neboli *válcových*) *souřadnic* r, t, z. Jde o souřadnice odpovídající bodům na kolmé válcové ploše s řídicí kružnicí $x^2 + y^2 = r^2$ v rovině $z = 0$, přičemž první dvě souřadnice r, t jsou vlastně polárními souřadnicemi v rovině $z = 0$. K nim přistupuje kartézská souřadnice z (obr. 2.14). Vzhledem k tomu je uvažovaná transformace dána rovnicemi

$$x = r\cos t\,,$$
$$y = r\sin t\,,$$
$$z = z\,.$$

Příslušný jakobián

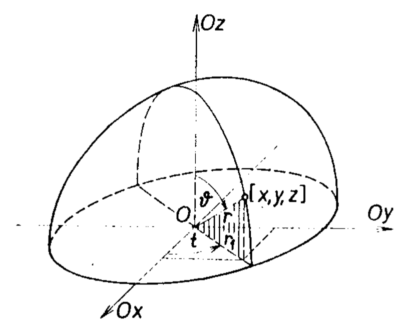
$$J = \begin{vmatrix} x'_r, & x'_t, & x'_z \\ y'_r, & y'_t, & y'_z \\ z'_r, & z'_t, & z'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos t, & -r\sin t, & 0 \\ \sin t, & r\cos t, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} = r\,.$$

Omezíme-li se u souřadnic r, t, z na intervaly tak, že

$$r \in (0, +\infty)\,, \quad t \in \langle 0, 2\pi)\,, \quad z \in (-\infty, +\infty)\,,$$

je uvažované zobrazení uvnitř příslušné oblasti vzájemně jednoznačné a diferenciabilní, přičemž příslušný jakobián $J \neq 0$; jen na ose Oz je $J = 0$. Proto pro integrál funkce $f(x, y, z)$, která je spojitá na uzavřené oblasti Ω, platí tento *transformační vzorec do cylindrických souřadnic*:

$$\boxed{\iiint_\Omega f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega^*} f(r\cos t,\ r\sin t, z)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}z\,.} \tag{24}$$



Obr. 2.15

2.5.3. Transformace do sférických souřadnic. Trojrozměrné integrály převádíme často také do *sférických* (*kulových*) *souřadnic*, kterých se (s menší obměnou u třetí souřadnice) používá v astronomii a v zeměpise. Jde vlastně o polární souřadnice v prostoru bodů ležících na kulové ploše $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Na rozdíl od zeměpisných souřadnic neměříme však třetí souřadnici ϑ od rovníku, ale od kladné poloosy osy Oz. Podle obr. 2.15 dostaneme pro sférické souřadnice r, t, ϑ vztahy

$$x = r_1\cos t = r\cos t\sin\vartheta\,,$$
$$y = r_1\sin t = r\sin t\sin\vartheta\,,$$
$$z = r\cos\vartheta\,.$$

Pro jakobián J této transformace (použitím kondenzační metody) dostáváme

$$J = \begin{vmatrix} \cos t \sin \vartheta, & -r \sin t \sin \vartheta, & r \cos t \cos \vartheta \\ \sin t \sin \vartheta, & r \cos t \sin \vartheta, & r \sin t \cos \vartheta \\ \cos \vartheta, & 0, & -r \sin \vartheta \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\cos t \sin \vartheta} \begin{vmatrix} r \sin^2 \vartheta, & 0 \\ r \sin t \sin \vartheta \cos \vartheta, & -r \cos t \end{vmatrix} = -r^2 \sin \vartheta .$$

Je tedy

$$|J| = r^2 |\sin \vartheta| .$$

Omezíme-li se u souřadnic r, t, ϑ na intervaly tak, že

$$r \in (0, +\infty), \quad t \in \langle 0, 2\pi), \quad \vartheta \in (0, \pi),$$

je uvažovaná transformace vzájemně jednoznačná a diferenciabilní, přičemž

$$\boxed{|J| = r^2 \sin \vartheta \neq 0 .} \tag{25}$$

Proto pro integrál funkce $f(x, y, z)$, která je spojitá na uzavřené oblasti Ω, platí tento *transformační vzorec do sférických souřadnic*:

$$\boxed{\begin{aligned} &\iiint_\Omega f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \\ &= \iiint_{\Omega^*} f(r \cos t \sin \vartheta, \ r \sin t \sin \vartheta, \ r \cos \vartheta) \, r^2 \sin \vartheta \, dr \, dt \, d\vartheta . \end{aligned}} \tag{26}$$

Příklad 2.11. Vypočtěme

$$A = \iiint_\Omega dx \, dy \, dz ,$$

kde Ω je těleso ohraničené trojosým elipsoidem $(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 1$.

Řešení. Použijeme transformace do tzv. *zobecněných sférických souřadnic* pomocí rovnic

$$x = ar \cos t \sin \vartheta ,$$
$$y = br \sin t \sin \vartheta ,$$
$$z = cr \cos \vartheta .$$

Příslušný jakobián, jak se snadno ověří výpočtem, je

$$J = abc \, r^2 \sin \vartheta .$$

Pak je

$$\iiint_\Omega dx \, dy \, dz = abc \iiint_{\Omega^*} r^2 \sin \vartheta \, dr \, dt \, d\vartheta .$$

Přitom Ω^* značí kvádr v kartézské souřadnicové soustavě $(O; r, t, \vartheta)$, přičemž

$$r \in \langle 0, 1 \rangle , \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle , \quad \vartheta \in \langle 0, \pi \rangle .$$

Proto

$$A = abc \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} dt \int_0^\pi r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta =$$

$$= abc \int_0^1 r^2 \, dr \int_0^{2\pi} dt \int_0^\pi \sin \vartheta \, d\vartheta =$$

$$= abc \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^1 [t]_0^{2\pi} [-\cos \vartheta]_0^\pi = \tfrac{4}{3}\pi abc .$$

Příklad 2.12. Vypočtěme

$$B = \iiint_\Omega (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz ,$$

kde Ω je rotační válec $x^2 + y^2 \leqq a^2$ s rovinami $z = 0$, $z = b$ podstav pro $b > 0$.

Řešení. Použijeme transformace do cylindrických souřadnic

$$x = r \cos t , \quad y = r \sin t , \quad z = z .$$

Tím se daný válec transformuje v oblast Ω^*, kterou dostaneme, transformujeme-li nerovnici $x^2 + y^2 \leqq a^2$ pomocí uvedených rovnic. Dostaneme

$$r^2 \leqq a^2 \quad \text{neboli} \quad r \leqq a , \quad \text{kde} \quad a > 0 .$$

Pro oblast Ω^* dostaneme vztahy

$$r \in \langle 0, a \rangle , \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle , \quad z \in \langle 0, b \rangle .$$

Oblastí Ω^* je tedy kvádr určený uvedenými třemi intervaly. Proto je $(J = r)$

$$B = \iiint_{\Omega^*} (r^2 + z^2) \, r \, dr \, dt \, dz = \int_0^a dr \int_0^{2\pi} dt \int_0^b (r^2 + z) \, r \, dz =$$

$$= \int_0^a dr \int_0^{2\pi} \left(r^3 b + r \frac{b^2}{2} \right) dt =$$

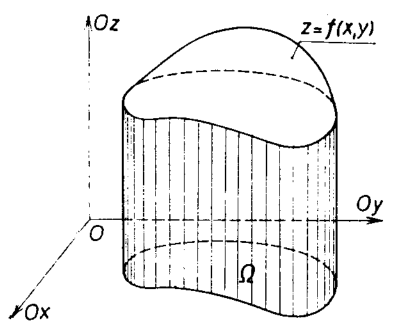
$$= \int_0^a (2\pi b r^3 + \pi b^2 r) \, dr = \pi b \left[\frac{r^4}{2} + \frac{b r^2}{2} \right]_0^a ,$$

takže

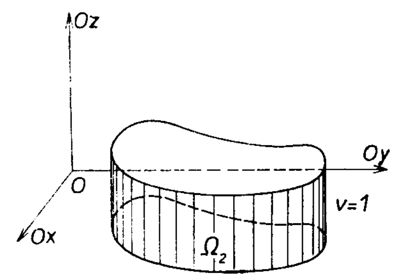
$$B = \frac{\pi a^2 b}{2} (a^2 + b) .$$

2.6. Použití množných integrálů

2.6.1. Objem kolmého válce nad oblastí. V článku 2.1.8 jsme ukázali, že dvojrozměrný integrál (spojité) funkce $f(x, y) \geqq 0$ na pravoúhelníku $\mathscr{R}$ představuje objem části kvádru, jehož podstavou je pravoúhelník $\mathscr{R}$, přičemž tento kvádr je seříznut plochou $z = f(x, y)$. Odtud na základě definice 2.2.1 dvojrozměrného integrálu na regulární oblasti Ω plyne, že dvojrozměrný integrál (spojité) funkce $f(x, y)$ na regulární oblasti Ω představuje objem části kolmého válce, jehož podstavou je oblast Ω a jehož strany jsou rovnoběžné s osou Oz, přičemž tento válec je seříznut plochou $z = f(x, y)$ (obr. 2.16).



Obr. 2.16



Obr. 2.17

Protože objemu těles budeme vždy přiřazovat nezáporné číslo, budeme objem V kolmého válce nad podstavou Ω, seříznutého libovolnou plochou $z = f(x, y)$, kde $f(x, y)$ je integrabilní funkce na regulární oblasti Ω, definovat vzorcem

$$\boxed{V = \iint_{\Omega} |f(x, y)| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.} \tag{27}$$

2.6.2. Obsah $|\Omega_2|$ regulární rovinné oblasti Ω_2 je číselně roven objemu kolmého válce nad oblastí Ω_2, jehož výška $v = 1$ (obr. 2.17). Proto ze vzorce (27) pro $f(x, y) \equiv 1$ dostáváme pro obsah uvažované oblasti vzorec

$$\boxed{|\Omega_2| = \iint_{\Omega_2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.} \tag{28}$$

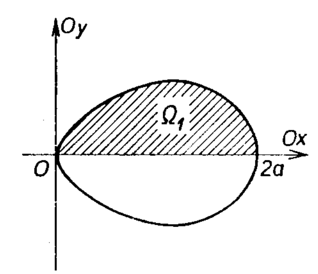
2.6.3. Objem $|\Omega_3|$ regulární prostorové oblasti Ω_3. Podobně jako v článku 2.6.2 definujeme objem $|\Omega_3|$ trojrozměrné regulární oblasti Ω_3 vzorcem

$$\boxed{|\Omega_3| = \iiint_{\Omega_3} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.} \tag{29}$$

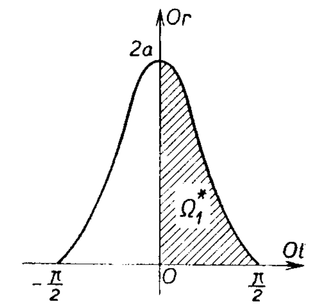
Příklad 2.13. Vypočtěme obsah rovinné oblasti ohraničené křivkou $(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3$, kde $a > 0$ (obr. 2.18).

Řešení. Oblast transformujeme polárními souřadnicemi r, t pomocí rovnic $x = r\cos t$, $y = r\sin t$. Rovnice křivky přejde tím v rovnici tvaru

$$r^4 = 2ar^3\cos^3 t \quad \text{neboli} \quad r = 2a\cos^3 t\,.$$



Obr. 2.18



Obr. 2.19

Transformovaná oblast Ω^* (obr. 2.19) je souměrná podle osy Or. Proto stačí vypočítat obsah pravé poloviny Ω_1^* oblasti Ω^*. Je tedy

$$|\Omega| = 2\iint_{\Omega_1} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\iint_{\Omega_1^*} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t =$$
$$= 2\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t \int_0^{2a\cos^3 t} r\,\mathrm{d}r = \int_0^{\pi/2} \left[r^2\right]_{r=0}^{2a\cos^3 t} \mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^{\pi/2} 4a^2\cos^6 t\,\mathrm{d}t = 4a^2\int_0^{\pi/2} \frac{[1 + \cos(2t)]^3}{8}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2} [1 + 3\cos(2t) + 3\cos^2(2t) + \cos^3(2t)]\,\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{a^2}{2}\left[t + \frac{3}{2}\sin(2t)\right]_0^{\pi/2} + \frac{3a^2}{4}\left[t + \frac{\sin(4t)}{4}\right]_0^{\pi/2} +$$
$$+ \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2} \cos^2(2t)\cos(2t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi a^2}{4} + \frac{3\pi a^2}{8} +$$
$$+ \frac{a^2}{4}\left[\sin(2t) - \frac{\sin^3(2t)}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{5\pi a^2}{8}\,.$$

2.6.4. Obsah úseku křivé plochy. *Obsah S úseku $\mathscr{S}$ hladké plochy dané rovnicí*

$$z = f(x, y)$$

ve všech bodech $[x, y]$, ležících v regulární oblasti Ω_1, ohraničené jedinou uzavřenou křivkou, přičemž $f(x, y)$ je na oblasti Ω_1 spojitě diferenciabilní, je určen vzorcem

$$S = \iint_{\Omega_1} \sqrt{[1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2]}\,dx\,dy\,. \tag{30}$$

K vzorci (30) jsme vedeni těmito úvahami: Předně z předpokladů plyne, že plocha $z = f(x, y)$ má v každém svém bodě tečnou rovinu.

Vnořme oblast Ω_1 do libovolného souřadnicového pravoúhelníku $\mathscr{R}$, který rozdělme na konečný počet dílčích pravoúhelníků. Z nich vezměme v úvahu jen ty, které mají s oblastí Ω_1 neprázdné průniky, a označme je $\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2, \ldots, \mathscr{R}_n$, kdežto jejich obsahy po řadě označme $|\mathscr{R}_1|, |\mathscr{R}_2|, \ldots, |\mathscr{R}_n|$, popř. jen $R_1, R_2, \ldots, R_n$, takže $|\mathscr{R}_\nu| = R_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$. V každém pravoúhelníku $\mathscr{R}_k$ zvolme libovolný bod $P_k = [x_k, y_k]$ tak, aby bod $T_k = [x_k, y_k, z_k]$, kde $z_k = f(x_k, y_k)$, ležel na dané ploše $\mathscr{S}$. Tečná rovina plochy v bodě T_k má podle odstavce I.8.5.14/2 normálový vektor

$$\boldsymbol{r}_k = [-f'_x, -f'_y, 1]\,,$$

jehož směrový kosinus

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{[(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1]}}\,.$$

Proto uvažovaná tečná rovina a rovina Oxy mají odchylku $\alpha_k = \gamma$, takže

$$\cos\alpha_k = \cos\gamma\,.$$

Přitom $\cos\alpha_k \neq 0$, neboť f'_x, f'_y jsou na uvažované oblasti spojité, a tedy i ohraničené, tj. konečné.

Označme σ_k rovnoběžník (s obsahem $|\sigma_k|$) vzniklý průsekem uvažované tečné roviny s kvádrem sestrojeným nad podstavou, jíž je pravoúhelník $\mathscr{R}_k$ (obr. 2.20). Mezi obsahy $|\sigma_k|$, R_k příslušných rovnoběžníků platí vztah

$$|\sigma_k|\cos\alpha_k = R_k\,,$$

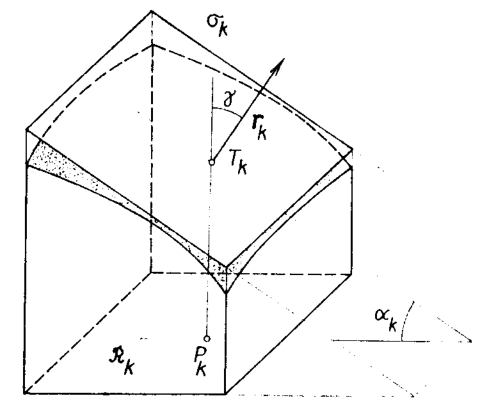
neboť $\mathscr{R}_k$ je průmětem rovnoběžníku σ_k do roviny Oxy. Odtud máme

$$|\sigma_k| = \frac{R_k}{\cos\alpha_k} = \{\sqrt{[1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2]}\}\,R_k\,.$$

Součet všech obsahů rovnoběžníků σ_k je proto

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}|\sigma_k| = \sum_{k=1}^{n}\{\sqrt{[1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2]}\}\,R_k\,.$$

Tento součet představuje součet obsahů všech „destiček" σ_k, vyťatých z tečných rovin sestrojených v bodech T_k na ploše, která je jimi (na oblasti Ω_1) zcela pokryta. Protože v blízkém okolí bodů dotyku T_k se tečná rovina těsně přimyká k hladké ploše, budeme obsahem S uvažovaného úseku $\mathscr{S}$ hladké plochy rozumět limitu předchozího součtu pro $n \to \infty$, jestliže se zároveň všechny pravoúhelníky $\mathscr{R}_k$ (co do délky i šířky) zmenšují k nule.



Obr. 2.20

Protože funkce $\sqrt{[1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2]}$ je spojitá na oblasti Ω_1, je tam integrabilní, a proto

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \iint_{\Omega_1} \sqrt{[1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2]}\,dx\,dy\,.$$

2.6.5. Poznámky. 1. Oblast Ω_1, o níž se mluví ve větě 2.6.4, můžeme považovat za kolmý průmět uvažovaného úseku $\mathscr{S}$ křivé plochy do roviny Oxy. Někdy je výhodnější uvažovat o kolmém průmětu úseku křivé plochy do jiných souřadnicových rovin:

a) Je-li Ω_2 kolmým průmětem úseku $\mathscr{S}$ křivé plochy do souřadnicové roviny Oxz a je-li $y = f(x, z)$ pro $\forall[x, z] \in \Omega_2$ rovnicí uvažovaného úseku plochy, pak za analogických předpokladů dostáváme pro obsah S úseku $\mathscr{S}$ křivé plochy vzorec

$$\boxed{S = \iint_{\Omega_2} \sqrt{[1 + (f'_x)^2 + (f'_z)^2]}\,dx\,dz\,.} \tag{31}$$

b) Podobně, je-li Ω_3 kolmým průmětem úseku $\mathscr{S}$ křivé plochy do roviny Oyz a je-li $x = f(y, z)$ rovnice tohoto úseku, pak za analogických předpokladů pro obsah S úseku $\mathscr{S}$ plochy platí vzorec

$$\boxed{S = \iint_{\Omega_3} \sqrt{[1 + (f'_y)^2 + (f'_z)^2]}\,dy\,dz\,.} \tag{32}$$

2. Dá-li se úsek $\mathscr{S}$ plochy rozdělit na konečný počet úseků hladkých ploch, které lze vyjádřit některou z rovnic tvaru

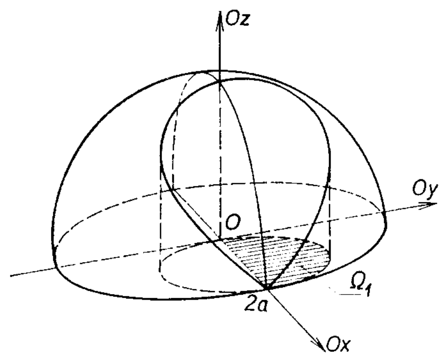
$$z = f_1(x, y), \quad \text{popř.} \quad x = f_2(y, z), \quad \text{popř.} \quad y = f_3(x, z),$$

je za příslušných předpokladů obsah S uvedeného úseku $\mathscr{S}$ plochy roven součtu obsahů jednotlivých úseků této plochy.

3. Vzorec pro obsah úseku $\mathscr{S}$ plochy, která je dána parametrickými rovnicemi

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

pro $\forall[u, v] \in \Omega$, je uveden v článku 4.8.4.



Obr. 2.21

Příklad 2.14. Vypočtěme obsah S úseku $\mathscr{S}$ křivé plochy (zvané *Vivianovo okno*), která je částí kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ nad rovinou $z = 0$, vyťatou válcovou plochou $x^2 + y^2 = 2ax$ pro $a > 0$ (obr. 2.21). Jde o tzv. *florentinský* neboli *Vivianův problém* z r. 1692.

Řešení. Na obr. 2.21 je znázorněn uvažovaný úsek plochy. Protože je souměrný vzhledem k rovině Oxz, stačí vypočítat polovinu „okna" nad oblastí Ω_1, jíž je horní půlkruh znázorněný na obr. 2.22a. Příslušná kulová plocha má rovnici

$$z = \sqrt{[4a^2 - x^2 - y^2]},$$

takže

$$1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2 = 1 + \frac{(-x)^2}{4a^2 - x^2 - y^2} + \frac{(-y)^2}{4a^2 - x^2 - y^2} = \frac{4a^2}{4a^2 - x^2 - y^2}.$$

Proto uvažovaný úsek $\mathscr{S}$ křivé plochy má podle (30) obsah

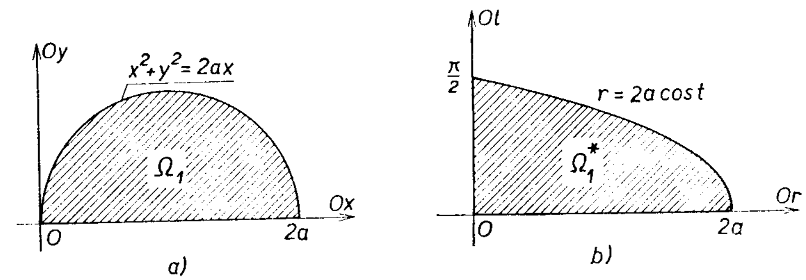
$$S = 2\iint_{\Omega_1} \frac{2a \, dx \, dy}{\sqrt{(4a^2 - x^2 - y^2)}}.$$

Zavedením polárních souřadnic r, t pomocí rovnic $x = r\cos t$, $y = r\sin t$ přejde půlkruh Ω_1 v oblast Ω_1^* na obr. 2.22b. Proto

$$S = 4a \int_0^{\pi/2} dt \int_0^{2a\cos t} \frac{r}{\sqrt{(4a^2 - r^2)}} \, dr =$$

$$= 4a \int_0^{\pi/2} \left[-\sqrt{(4a^2 - r^2)}\right]_{r=0}^{2a\cos t} dt =$$

$$= 4a \int_0^{\pi/2} (2a - 2a\sin t) \, dt = 8a^2[t + \cos t]_0^{\pi/2} = 4a^2(\pi - 2).$$



Obr. 2.22

2.6.6. Hmotnost hmoty spojitě rozložené na oblasti Ω. 1. Jestliže na rovinné uzavřené oblasti Ω_2 je spojitě rozložena hmota tak, že hustota ϱ v bodě $[x, y] \in \Omega_2$ je určena rovnicí

$$\varrho = \varrho(x, y) \quad (\varrho > 0),$$

pak analogickými úvahami jako při zavedení pojmu dvojrozměrného integrálu na pravoúhelníku $\mathscr{R}$ a na oblasti Ω dostaneme, že celková hmotnost m rovinné oblasti Ω_2 je určena vzorcem

$$\boxed{m = \iint_{\Omega_2} \varrho(x, y) \, dx \, dy.} \tag{33}$$

2. Podobně, je-li na prostorové uzavřené oblasti Ω_3 spojitě rozložena hmota tak, že hustota ϱ v bodě $[x, y, z] \in \Omega_3$ je určena rovnicí

$$\varrho = \varrho(x, y, z) \quad (\varrho > 0),$$

pak celková hmotnost m prostorové oblasti Ω_3 je určena vzorcem

$$\boxed{m = \iiint_{\Omega_3} \varrho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.} \tag{34}$$

2.6.7. Statické momenty a momenty setrvačnosti rovinných nebo prostorových útvarů se u dvojrozměrných i trojrozměrných integrálů zavádějí podobně jako u integrálů jedné proměnné. Vzhledem k tomu se v dalších větách omezíme na pouhé uvedení příslušných vzorců, které nebudeme dokazovat.

2.6.8. Věta. *Nechť na regulární rovinné oblasti Ω_2 je spojitě rozložena hmota, jejíž hustota v bodě $[x, y]$ je $\varrho(x, y)$.*

Pak pro statické momenty S_x, S_y a momenty setrvačnosti I_x, I_y, I_z oblasti Ω_2 po řadě vzhledem k souřadnicovým osám Ox, Oy, Oz platí tyto vzorce:

$$S_x = \iint_{\Omega_2} y\,\varrho(x, y)\,dx\,dy\,, \quad I_x = \iint_{\Omega_2} y^2\,\varrho(x, y)\,dx\,dy\,,$$
$$S_y = \iint_{\Omega_2} x\,\varrho(x, y)\,dx\,dy\,, \quad I_y = \iint_{\Omega_2} x^2\,\varrho(x, y)\,dx\,dy\,,$$
$$I_z = \iint_{\Omega_2} (x^2 + y^2)\,\varrho(x, y)\,dx\,dy\,.$$

2.6.9. Věta. *Nechť v tělese $\mathcal{T}$ je spojitě rozložena hmota, jejíž hustota v bodě $[x, y]$, popř. $[x, y, z]$ je $\varrho(x, y)$,* popř. *$\varrho(x, y, z)$.*

Vezměme v úvahu tyto dva případy tvaru tělesa $\mathcal{T}$:

(1) *$\mathcal{T}$ je kolmý válec nad regulární rovinnou oblastí Ω_2, který je seříznut plochou $z = f(x, y)$;*

(2) *$\mathcal{T}$ je regulární trojrozměrná oblast Ω_3.*

Pak pro statické momenty S_{xy}, S_{xz}, S_{yz} tělesa $\mathcal{T}$ po řadě vzhledem k souřadnicovým rovinám Oxy, Oxz, Oyz a pro (polární) momenty setrvačnosti I_x, I_y, I_z tělesa $\mathcal{T}$ po řadě vzhledem k souřadnicovým osám Ox, Oy, Oz platí tyto vzorce:

(1)
$$S_{xy} = \frac{1}{2}\iint_{\Omega_2} f^2(x, y)\,\varrho(x, y)\,dx\,dy\,,$$
$$S_{yz} = \iint_{\Omega_2} x\,f(x, y)\,\varrho(x, y)\,dx\,dy\,,$$
$$S_{xz} = \iint_{\Omega_2} y\,f(x, y)\,\varrho(x, y)\,dx\,dy\,,$$
$$I_z = \iint_{\Omega_2} (x^2 + y^2)\,f(x, y)\,\varrho(x, y)\,dx\,dy\,;$$

(2)
$$S_{xy} = \iiint_{\Omega_3} z\,\varrho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz\,,$$
$$S_{yz} = \iiint_{\Omega_3} x\,\varrho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz\,,$$
$$S_{xz} = \iiint_{\Omega_3} y\,\varrho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz\,,$$
$$I_x = \iiint_{\Omega_3} (y^2 + z^2)\,\varrho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz\,,$$
$$I_y = \iiint_{\Omega_3} (x^2 + z^2)\,\varrho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz\,,$$
$$I_z = \iiint_{\Omega_3} (x^2 + y^2)\,\varrho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz\,.$$

2.6.10. Věta. *Nechť $\mathcal{S}$ je úsek hladké plochy $z = f(x, y)$, definované pro všechny body $[x, y]$ z jednoduché regulární oblasti Ω, a nechť je na tomto úseku $\mathcal{S}$ spojitě rozložena hmota s hustotou $\varrho(x, y)$.*

Pak pro celkovou hmotnost m, statické momenty S_{xy}, S_{xz}, S_{yz} úseku $\mathcal{S}$ po řadě vzhledem k souřadnicovým rovinám Oxy, Oxz, Oyz a momenty setrvačnosti I_x, I_y, I_z po řadě vzhledem k souřadnicovým osám Ox, Oy, Oz platí tyto vzorce:

$$S_{xy} = \iint_{\Omega} z\,\varrho(x, y)\,dS\,, \quad I_x = \iint_{\Omega} (y^2 + z^2)\,\varrho(x, y)\,dS\,,$$
$$S_{xz} = \iint_{\Omega} y\,\varrho(x, y)\,dS\,, \quad I_y = \iint_{\Omega} (x^2 + z^2)\,\varrho(x, y)\,dS\,,$$
$$S_{yz} = \iint_{\Omega} x\,\varrho(x, y)\,dS\,, \quad I_z = \iint_{\Omega} (x^2 + y^2)\,\varrho(x, y)\,dS\,,$$
$$m = \iint_{\Omega} \varrho(x, y)\,dS\,,$$

kde dS značí element uvažované plochy $\mathcal{S}$ s obsahem S, takže je

$$dS = \sqrt{[1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2]}\,dx\,dy\,.$$

2.6.11. Kinetická energie tělesa otáčejícího se kolem přímky. Moment setrvačnosti tělesa Ω, na němž je spojitě rozložena hmota s hustotou $\varrho(x, y, z)$, vzhledem k dané přímce p souvisí úzce s kinetickou energií tělesa Ω, otáčejícího se kolem této přímky. Protože kinetická energie W_k tělesa s hmotností m, pohybujícího se rychlostí o velikosti v, se rovná

$$W_k = \tfrac{1}{2}mv^2,$$

dostáváme za předpokladu, že úhlová rychlost ω otáčejícího se tělesa Ω kolem přímky p je konstantní, pro dílčí kvádr $\mathcal{Q}_k$ s objemem Q_k kinetickou energii

$$W_{kk} = \tfrac{1}{2}m_k v_k^2,$$

kde m_k je hmotnost dílčího kvádru $\mathcal{Q}_k$ a v_k je velikost okamžité rychlosti. Přitom

$$v_k = \omega r_k,$$

kde r_k je vzdálenost bodu $[x_k, y_k, z_k]$ kvádru $\mathcal{Q}_k$ od přímky p. Proto je

$$W_{kk} = \tfrac{1}{2}\omega^2 m_k r_k^2 = \tfrac{1}{2}\omega^2 r_k^2\, \varrho(x_k, y_k, z_k)\, Q_k,$$

neboť

$$m_k = \varrho(x_k, y_k, z_k)\, Q_k.$$

Sečteme-li energie jednotlivých dílčích kvádrů $\mathcal{Q}_k$ a přejdeme-li k limitě pro $k \to \infty$, když zároveň všechny dílčí kvádry $\mathcal{Q}_k$ se vzhledem ke všem třem svým rozměrům zmenšují k nule, dostáváme pro celkovou kinetickou energii otáčejícího se tělesa vzorec

$$\boxed{W_k = \tfrac{1}{2}\omega^2 \iiint_\Omega r^2 \varrho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \tfrac{1}{2}\omega^2 I_p,} \tag{35}$$

kde I_p je moment setrvačnosti tělesa Ω vzhledem k přímce p a $r = r(x, y, z)$ je vzdálenost bodu $[x, y, z]$ tělesa od přímky p.

Například kinetická energie W_k tělesa Ω, otáčejícího se kolem osy Oz konstantní úhlovou rychlostí ω, se rovná

$$\boxed{W_k = \tfrac{1}{2}\omega^2 I_z = \tfrac{1}{2}\omega^2 \iiint_\Omega (x^2 + y^2)\, \varrho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.} \tag{36}$$

Příklad 2.15. Vypočtěme těžiště osminy koule $x^2 + y^2 + z^2 \leqq a^2$, je-li její hustota ϱ konstantní.

Řešení. Objem osminy koule je $V = \frac{1}{6}\pi a^3$, takže její hmotnost

$$m = \tfrac{1}{6}\pi a^3 \varrho.$$

Pro souřadnici ξ těžiště proto platí vztahy

$$\tfrac{1}{6}\pi a^3 \varrho \xi = \varrho \iiint_\Omega x\, dx\, dy\, dz = S_{yz}.$$

Použijeme sférických souřadnic pomocí vztahů

$$x = r\cos t \sin\vartheta, \quad y = r\sin t \sin\vartheta, \quad z = r\cos\vartheta.$$

Tím rovnice příslušné kulové plochy přejde v rovnici

$$a^2 = r^2(\sin^2\vartheta)(\cos^2 t + \sin^2 t) + r^2\cos^2\vartheta = r^2$$

neboli

$$r = a.$$

Proto transformovaná oblast Ω^* značí kvádr ohraničený rovinami

$$r = 0, \quad r = a, \quad t = 0, \quad t = \pi/2, \quad \vartheta = 0, \quad \vartheta = \pi/2.$$

Tím dostaneme

$$\iiint_\Omega x\, dx\, dy\, dz = \iiint_{\Omega^*} r^3 \cos t \sin^2\vartheta\, dt\, dr\, d\vartheta =$$
$$= \int_0^{\pi/2} dt \int_0^a dr \int_0^{\pi/2} r^3 \cos t \sin^2\vartheta\, d\vartheta =$$
$$= \int_0^{\pi/2} \cos t\, dt \int_0^a r^3\, dr \int_0^{\pi/2} \sin^2\vartheta\, d\vartheta =$$
$$= [\sin t]_0^{\pi/2} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a \left[\frac{2\vartheta - \sin(2\vartheta)}{4}\right]_0^{\pi/2} = 1 \cdot \frac{a^4}{4}\frac{\pi}{4} = \frac{\pi a^4}{16}.$$

Proto je

$$\xi = \frac{6}{\pi a^3}\frac{\pi a^4}{16} = \frac{3a}{8}.$$

Snadno se nahlédne, že pro další souřadnice η, ζ těžiště platí

$$\eta = \zeta = \xi = \frac{3a}{8}.$$

Proto hledané těžiště

$$T = \left[\frac{3a}{8}, \frac{3a}{8}, \frac{3a}{8}\right].$$

Příklad 2.16. Vypočtěme kinetickou energii W_k koule $x^2 + y^2 + z^2 \leqq a^2$ ze stejnorodého materiálu s konstantní hustotou ϱ, jestliže se koule otáčí kolem osy Oz konstantní úhlovou rychlostí ω.

Řešení. Hledaná kinetická energie podle vzorce (36) je

$$W_k = \tfrac{1}{2}\omega^2 I_z = \tfrac{1}{2}\omega^2 \iiint_\Omega (x^2 + y^2)\, \varrho\, dx\, dy\, dz.$$

Zavedením sférických souřadnic pomocí rovnic

$$x = r\cos t \sin\vartheta, \quad y = r\sin t \sin\vartheta, \quad z = r\cos\vartheta$$

dostaneme

$$I_z = \varrho \int_0^a \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t \int_0^{\pi} r^2(\cos^2 t + \sin^2 t)\, r^2 \sin^3 \vartheta \, \mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \varrho \int_0^a r^4 \, \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t \int_0^{\pi} \sin^3 \vartheta \, \mathrm{d}\vartheta = \varrho \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^a [t]_0^{2\pi} \left[\frac{\cos^3 \vartheta}{3} - \cos \vartheta\right]_0^{\pi} =$$

$$= \varrho \frac{a^5}{5} \, . \, 2\pi \left(-\frac{2}{3} + 2\right) = \frac{8\pi\varrho a^5}{15} \, .$$

Proto výsledná kinetická energie

$$W_k = \frac{4\pi\varrho\omega^2 a^5}{15} \, .$$

2.7. Cvičení

1. Vypočtěte integrál $\iint 6xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ na oblasti Ω, ohraničené osou Ox a dvěma oblouky kružnic o stejném poloměru $r = 2$ a se středy v bodech O a $A = [2, 0]$.

2. Vypočtěte integrál $\iint y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ na oblasti Ω, ohraničené horní polovinou elipsy $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ a osou Ox.

3. Vypočtěte $\iint x^2 y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ na oblasti Ω, jíž je trojúhelník s vrcholy $A = [0, 0]$, $B = [2a, 0]$, $C = [a, a]$, přičemž $a > 0$.

4. Vypočtěte $\iint \sqrt{(4x^2 - y^2)} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ na oblasti Ω, jíž je trojúhelník ohraničený přímkami $x = 1$, $x = y$, $y = 0$.

5. Vypočtěte $\iint (x^2 + y^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ na oblasti Ω, jíž je trojúhelník ohraničený přímkami $y = 0$, $x + y = 1$, $x - y + 1 = 0$.

6. Vypočtěte $\iiint x^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$ na oblasti Ω, jíž je koule $x^2 + y^2 + z^2 \leqq a^2$.

7. Vypočtěte $\displaystyle\iiint \frac{\mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z}{(x + y + z + 1)^3}$ na oblasti Ω, jíž je čtyřstěn ohraničený souřadnicovými rovinami a rovinou $x + y + z = 1$.

8. Vypočtěte $\iiint (x^2 + y^2 + z^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$ na oblasti Ω, jíž je těleso ohraničené trojosým elipsoidem ve středové poloze.

9. Vypočtěte nevlastní integrál $\iiint \ln (x^2 + y^2 + z^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$ na oblasti Ω, jíž je koule s poloměrem r a středem v počátku.

10. Vypočtěte nevlastní integrál $\iiint xyz(x^2 + y^2 + z^2)^{-3} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$ na oblasti Ω, jíž je koule s poloměrem r a středem v počátku.

11. Vypočtěte obsah rovinné oblasti ohraničené jedinou křivkou s rovnicí:
a) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$;
b) $(x^2 + y^2)^3 = x^4 + y^4$;
c) $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$.

12. Vypočtěte objem části kvádru nad čtvercovou podstavou $\mathscr{R} = \{x \in \langle 0, 4 \rangle, y \in \langle 0, 4 \rangle\}$, ohraničené shora paraboloidem $z = x^2 + y^2 + 1$.

13. Vypočtěte objem tělesa ohraničeného rovinou $z = 0$ a paraboloidem $z = 3 - x^2 - y^2$.

14. Vypočtěte objem tělesa ohraničeného rovinami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x/a + y/b + z/c = 1$.

15. Vypočtěte objem tělesa ohraničeného rovinou $z = 0$, válcovou plochou $x^2 + y^2 = r^2$ a kuželovou plochou $x^2 + y^2 = z^2$.

16. Vypočtěte objem tělesa ohraničeného plochou $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 3xyz$. Použijte sférických souřadnic.

17. Vypočtěte obsah úseku paraboloidu $2z = x^2 + y^2$, vyťatého válcovou plochou $x^2 + y^2 = 1$.

18. Vypočtěte obsah úseku kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, vyťatého válcovou plochou $x^2 + y^2 = r^2$, kde $r \leqq a$.

19. Vypočtěte souřadnice těžiště homogenní rovinné desky ohraničené parabolou $ay = x^2$ a přímkou $y = 2$, kde $a > 0$.

20. Vypočtěte hmotnost tělesa vyplněného hmotou s hustotou $\varrho = x + y + z$ a ohraničeného rovinami $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$.

21. Vypočtěte moment setrvačnosti homogenního jehlanu vzhledem k rovině $z = 0$, je-li jehlan ohraničen rovinami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

22. Vypočtěte moment setrvačnosti homogenní koule s poloměrem $r = 1$ vzhledem k jejímu středu.

23. Vypočtěte souřadnice těžiště homogenního tělesa ohraničeného paraboloidem $z = x^2 + y^2$ a rovinami $x + y = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

24. Vypočtěte hmotnost tělesa ohraničeného plochami $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $z = c$, je-li hustota v bodě $[x, y, z]$ rovna z.

25. Vypočtěte moment setrvačnosti vzhledem k ose Oz homogenního tělesa ohraničeného plochami $z^2 = 2ax$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = ax$, kde $a > 0$.

26. Vypočtěte těžiště homogenního úseku paraboloidu $x^2 + y^2 = 2z$, vyťatého rovinou $z = 1$.

27. Určete moment setrvačnosti rotačního kužele vzhledem k jeho ose.

28. Určete hmotnost tělesa ohraničeného dvěma soustřednými kulovými plochami $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$, jestliže hustota v každém jeho bodě je nepřímo úměrná vzdálenosti tohoto bodu od počátku. Použijte sférických souřadnic. Součinitele úměrnosti označte k.

29. Určete hmotnost a souřadnice těžiště koule $x^2 + y^2 + z^2 \leqq 2az$, jestliže hustota $\varrho = k(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ $(k > 0, a > 0)$.

30. Určete souřadnice těžiště homogenního tělesa ohraničeného plochou $az = a^2 - x^2 - y^2$ a rovinou $z = 0$.

Výsledky k 2.7

1. 10. **2.** $\frac{2}{3}ab^2$. **3.** $11a^5/30$. **4.** $(3\sqrt{3} + 2\pi)/18$. **5.** $1/3$. **6.** $4\pi a^5/15$. **7.** $\frac{1}{2} \ln 2 - 5/16$. **8.** $4\pi abc(a^2 + b^2 + c^2)/15$. **9.** $8\pi r^3(\ln r^3 - 1)/9$. **10.** Diverguje. **11.** a) $2a^2$; b) $3\pi/4$; c) $\pi/2$. **12.** $186\frac{2}{3}$. **13.** $9\pi/2$. **14.** $abc/6$. **15.** $2\pi r^3/3$. **16.** $1/2$. **17.** $(4\sqrt{2} - 2)\,\pi/3$. **18.** $4a\pi[a - \sqrt{(a^2 - r^2)}]$. **19.** $[0; 1{,}2]$. **20.** $m = 3/2$. **21.** $I_{xy} = 1/60$. **22.** $I_0 = 4\pi/5$. **23.** $[2a/5, 2a/5, 7a^2/30]$. **24.** $m = \pi c^4/4$. **25.** $32a^5(\sqrt{2})/135$. **26.** $[0, 0, (55 + 9\sqrt{3})/130]$. **27.** $\pi v r^4/10$. **28.** $6k\pi a^2$. **29.** $m = 4\pi k a^2/3$, $[0, 0, 4a/5]$. **30.** $[0, 0, a/3]$.