## 12 I DVOJNÝ INTEGRÁL

V této části kapitoly budeme studovat Riemannův integrál funkcí dvou proměnných. Budeme jej stručně nazývat dvojným integrálem nebo též dvojrozměrným integrálem. Zavedeme jej nejprve (čl. 12B) na dvojrozměrném uzavřeném intervalu v $\mathbf{R}^2$, a to formálně stejně, jako jsme v kap. 6 zavedli Riemannův integrál funkce jedné proměnné na intervalu $\langle a, b\rangle$ (čili tzv. jednorozměrný integrál). Ten byl definován tak, aby pro spojitou kladnou funkci počítal obsah příslušného křivočarého lichoběžníka (byl roven jisté limitě součtů obsahů obdélníků, jimiž jsme zmíněný křivočarý lichoběžník nahrazovali). Zde to bude podobné, dvojný integrál bude definován tak, aby pro spojitou kladnou funkci počítal objem jistého tělesa (které opět budeme nahrazovat systémem jednodušších těles, jejich objemy sčítat a provádět pak limitní přechod). Dvojný integrál má i další aplikace (viz např. čl. 12G). Při výkladu teorie dvojného integrálu vynecháme důkazy mnohých vět, které by byly analogií důkazů odpovídajících vět z kap. 6.

Integračním oborem jednorozměrného integrálu byl vždy interval. U dvojrozměrného integrálu je však potřeba jako integrační obory uvažovat i složitější množiny, např. kruh, kruhovou výseč apod. Integrační obory hrají v dvojrozměrném případě daleko podstatnější roli než u jednorozměrného integrálu. Proto budeme studovat množiny, které je možné (a vhodné) brát za integrační obory dvojného integrálu a pro některé speciální případy integračních oborů ukážeme, jak lze při výpočtu dvojného integrálu postupovat (čl. 12C až 12F).

V závěrečném čl. 12G této části kapitoly se budeme zabývat některými aplikacemi dvojného integrálu v geometrii a ve fyzice.

Postup, jímž budeme budovat dvojrozměrný integrál, lze celkem snadno převést na případ trojrozměrného integrálu (což velmi stručně provedeme v části 12 II této kapitoly) a dále na případ $n$-rozměrného integrálu pro libovolné $n \in \mathbf{N}$, $n > 3$ (čímž se nebudeme zabývat).

### 12B. DVOJNÝ INTEGRÁL NA INTERVALU

**12.1.** Definice. Nechť je dán dvojrozměrný uzavřený interval

$$J = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle \subset \mathbf{R}^2.$$

Nechť

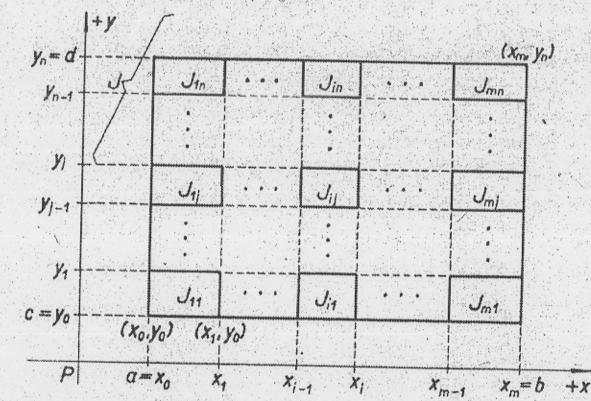
$$D_x = (x_0, \ldots, x_m), \quad \text{resp.} \quad D_y = (y_0, \ldots, y_n) \qquad (12.1.1)$$



je dělení intervalu $\langle a, b\rangle$, resp. $\langle c, d\rangle$ (viz def. 6.60). Potom uspořádanou dvojici $D = (D_x, D_y)$ nazýváme *dělením intervalu J*. Každý dvojrozměrný interval

$$J_{ij} = \langle x_{i-1}, x_i\rangle \times \langle y_{j-1}, y_j\rangle, \qquad (12.1.2)$$

kde $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, nazýváme *částečným intervalem dělení D*, viz obr. 57. Maximum z čísel $\nu(D_x)$, $\nu(D_y)$ (norem dělení $D_x$, $D_y$, viz def. 6.60) označujeme $\nu(D)$ a nazýváme *normou dělení D*.




Obr. 57. Dělení $D$ dvojrozměrného intervalu $J$ (na $m \cdot n$ částečných intervalů $J_{ij}$)

**12.2.** Definice. Nechť $f$ je funkce definovaná a omezená na intervalı $J = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$ a nechť $D = (D_x, D_y)$ je dělení intervalu $J$ dané vztahy (12.1.1] Označme $m_{ij}$, resp. $M_{ij}$ infimum, resp. suprémum funkce $f$ na částečném intervalı (12.1.2) a $\mu(J_{ij})$ obsah tohoto intervalu. Potom číslo

$$L(f, D) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} m_{ij}\mu(J_{ij})$$

nazýváme *dolním součtem* a číslo

$$U(f, D) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} M_{ij}\mu(J_{ij})$$

*horním součtem funkce f na intervalu J při dělení D.*

**12.3.** Definice. Vyjděme z předpokladů a označení z def. 12.2. Čísl

$$\underline{\iint_J} f(x, y)\, dx\, dy = \sup_D L(f, D),$$

$$\overline{\iint_J} f(x, y)\, dx\, dy = \inf_D U(f, D)$$

($D$ „probíhá“ všechna možná dělení intervalu $J$) nazýváme (v tomto pořadí) *dolní Riemannovým integrálem a horním Riemannovým integrálem funkce f na intervalu .*

Jestliže se obě tato čísla sobě rovnají, říkáme, že funkce $f$ je (*riemannovsky*) *integrovatelná na intervalu* $J$ a píšeme $f \in R(J)$. Pro obě čísla pak užíváme společné označení

$$\iint_J f(x, y)\, dx\, dy$$

a toto číslo nazýváme *dvojným* (nebo *dvojrozměrným*) *Riemannovým integrálem funkce* $f$ *na intervalu* $J$.

**12.4.** Poznámky. Pro dvojný Riemannův integrál platí věty analogické větám, které jsme pro jednorozměrný Riemannův integrál podrobně dokázali v čl. 6L a 6M. Tyto věty uvedeme stručně a bez důkazů v těchto poznámkách. Budeme přitom vycházet z označení z hesel 12.1 až 12.3.

**12.4.1.** *Z předpokladu omezenosti* $f$ *na intervalu* $J$ *vyplývá, že dolní i horní Riemannův integrál funkce* $f$ *na intervalu* $J$ *jsou vlastní čísla.*

**12.4.2.** *Jestliže dělení* $D^* = (D_x^*, D_y^*)$ *intervalu* $J$ *je zjemněním dělení* $D = (D_x, D_y)$ *tohoto intervalu* (což znamená, že dělení $D_x^*$, resp. $D_y^*$ je zjemněním dělení $D_x$, resp. $D_y$), *potom platí*

$$L(f, D) \leqq L(f, D^*) \leqq U(f, D^*) \leqq U(f, D).$$

*Odtud vyplývá, že*

$$\underline{\iint_J} f(x, y)\, dx\, dy \leqq \overline{\iint_J} f(x, y)\, dx\, dy.$$

**12.4.3.** *Funkce* $f$ *je riemannovsky integrovatelná na intervalu* $J$ *právě tehdy, když ke každému* $\varepsilon > 0$ *existuje dělení* $D$ *intervalu* $J$ *takové, že*

$$U(f, D) - L(f, D) < \varepsilon.$$

**12.4.4.** *Jestliže funkce* $f$ *je spojitá na intervalu* $J$, *potom je riemannovsky integrovatelná na* $J$.

**12.4.5.** *Nechť* $f, g \in R(J)$ *a* $k \in \mathbf{R}$. *Potom platí tato tvrzení:*

1. $f + g \in R(J)$ *a platí*

$$\iint_J (f(x, y) + g(x, y))\, dx\, dy = \iint_J f(x, y)\, dx\, dy + \iint_J g(x, y)\, dx\, dy.$$

2. $kf \in R(J)$ *a platí*

$$\iint_J kf(x, y)\, dx\, dy = k \iint_J f(x, y)\, dx\, dy.$$

3. *Jestliže pro všechna* $(x, y) \in J$ *platí* $f(x, y) \leqq g(x, y)$, *potom*

$$\iint_J f(x, y)\, dx\, dy \leqq \iint_J g(x, y)\, dx\, dy.$$

4. *Jestliže pro všechna* $(x, y) \in J$ *platí* $|f(x, y)| \leqq M$, *kde* $M \in \mathbf{R}$, *potom*

$$\left|\iint_J f(x, y)\, dx\, dy\right| \leqq M\mu(J).$$

5. *Jestliže* $J_1, J_2 \subset \mathbf{R}^2$ *jsou dva uzavřené intervaly, které vznikly rozdělením intervalu* $J$ *úsečkou rovnoběžnou s osou x, resp. y, potom* $f \in R(J_1)$, $f \in R(J_2)$ *a platí*

$$\iint_J f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{J_1} f(x, y)\, dx\, dy + \iint_{J_2} f(x, y)\, dx\, dy.$$



6. $fg \in R(J)$.

7. $|f| \in R(J)$ *a platí*

$$\left|\iint_J f(x, y)\, dx\, dy\right| \leqq \iint_J |f(x, y)|\, dx\, dy.$$

**12.4.6.** Platí tzv. věta o střední hodnotě: *Jestliže je funkce* $f$ *spojitá na intervalu* $J$, *potom existuje bod* $(x_0, y_0) \in J$ *tak, že platí*

$$\iint_J f(x, y)\, dx\, dy = \mu(J) f(x_0, y_0).$$

**12.4.7.** Zcela analogicky jako v čl. 6M lze i nyní definovat pojem *integrálního součtu funkce* $f$ *na intervalu* $J$ a pojem *normální posloupnosti* takových integrálních součtů (normy příslušných dělení konvergují k nule) a dokázat tato dvě tvrzení:

a) *Jestliže* $f \in R(J)$, *potom každá normální posloupnost integrálních součtů funkce* $f$ *na intervalu* $J$ *konverguje a její limita je rovna číslu* $\iint_J f(x, y)\, dx\, dy$.

b) *Jestliže každá normální posloupnost integrálních součtů omezené funkce* $f$ *na intervalu* $J$ *má limitu, potom* $f \in R(J)$ *a limita každé zmíněné posloupnosti je rovna číslu* $\iint_J f(x, y)\, dx\, dy$.

**12.5.** Fubiniova věta pro dvojný integrál funkce na intervalu. *Nechť funkce* $f$ *je integrovatelná na intervalu* $J = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$.

*Jestliže pro každé* $x \in \langle a, b\rangle$ *je funkce* $y \mapsto f(x, y)$ *integrovatelná na intervalu* $\langle c, d\rangle$, *potom funkce* $g$ *daná předpisem*

$$g(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy$$

*je integrovatelná na intervalu* $\langle a, b\rangle$ *a platí*

$$\int_a^b g(x)\, dx = \iint_J f(x, y)\, dx\, dy,$$

*čili jinak zapsáno*

$$\iint_J f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy\right] dx. \tag{12.5.1}$$

*Jestliže pro každé* $y \in \langle c, d\rangle$ *je funkce* $x \mapsto f(x, y)$ *integrovatelná na intervalu* $\langle a, b\rangle$, *potom funkce* $h$ *daná předpisem*

$$h(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$$

*je integrovatelná na intervalu* $\langle c, d\rangle$ *a platí*

$$\int_c^d h(y)\, dy = \iint_J f(x, y)\, dx\, dy,$$

*čili jinak zapsáno*

$$\iint_J f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx\right] dy. \tag{12.5.2}$$

Důkaz nebudeme provádět. Naznačíme pouze zhruba jeho myšlenku.

Integrální součet funkce $f$ na intervalu $J$ při dělení $D = (D_x, D_y)$ daném vztahy (12.1.1) [a dané volbě bodů $(\xi_i, \eta_j) \in J_{ij}$] můžeme např. zapsat ve tvaru

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}). \tag{12.5.3}$$

Tento součet $mn$ čísel můžeme rovněž zapsat ve tvaru

$$\sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j)(y_j - y_{j-1})\right](x_i - x_{i-1}). \tag{12.5.4}$$

Za předpokladů dokazované věty je limita normální posloupnosti integrálních součtů funkce $f$ na intervalu $J$ zapsaných ve tvaru (12.5.3), resp. (12.5.4) rovna levé, resp. pravé straně rovnosti (12.5.1).

Podobná úvaha by byla základem pro důkaz rovnosti (12.5.2). □

**12.6.** Poznámky.

**12.6.1.** Předcházející větu by bylo možné dokázat v mnohem obecnější verzi.

**12.6.2.** Každou z pravých stran rovností (12.5.1) a (12.5.2) nazýváme *dvojnásobným integrálem.* Fubiniova věta vlastně říká, jak a za jakých předpokladů lze dvojný integrál převést na integrál dvojnásobný.

**12.6.3.** Pro dvojnásobný integrál na pravé straně rovnosti (12.5.1), resp. (12.5.2) se někdy používá stručné označení

$$\int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y, \qquad \text{resp.} \qquad \int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x.$$

**12.7.** Příklad. Vypočtěme integrál

$$\iint_J \frac{3y^2}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{12.7.1}$$

kde $J = \langle 0, 1\rangle \times \langle -1, 2\rangle$.

Řešení. Daný integrál vypočteme dvěma způsoby: pomocí vzorců (12.5.1) a (12.5.2).

1. způsob. Funkce $(x, y) \mapsto \dfrac{3y^2}{1 + x^2}$ je na intervalu $J$ spojitá, a proto je na tomto intervalu podle pozn. 12.4.4 integrovatelná. Pro každé pevné $x \in \langle 0, 1\rangle$ je funkce $y \mapsto \dfrac{3y^2}{1 + x^2}$ integrovatelná na intervalu $\langle -1, 2\rangle$ (je tam spojitá) a platí

$$\int_{-1}^{2} \frac{3y^2}{1 + x^2}\,\mathrm{d}y = \left[\frac{1}{1 + x^2}\,y^3\right]_{y=-1}^{y=2} = \frac{1}{1 + x^2}\left[2^3 - (-1)^3\right] = \frac{9}{1 + x^2}.$$

Podle vzorce (12.5.1) vypočteme, že

$$\iint_J \frac{3y^2}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left[\int_{-1}^{2} \frac{3y^2}{1 + x^2}\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{9}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= [9 \operatorname{arctg} x]_0^1 = 9\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{9}{4}\pi.$$



2. způsob. Postupujme již rychleji:

$$\iint_J \frac{3y^2}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{2}\left[\int_0^1 \frac{3y^2}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y =$$

$$= \int_{-1}^{2} [3y^2 \operatorname{arctg} x]_{x=0}^{x=1}\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{2} \frac{3}{4}\pi y^2\,\mathrm{d}y = \left[\frac{\pi}{4}y^3\right]_{y=-1}^{y=2} =$$

$$= \frac{9}{4}\pi.^{1)}\ \square$$

Cvičení k článku 12B

**1.** Vypočtěte dvojné integrály:

a) $\iint_J (4x - y + 3)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $J = \langle -2, 1\rangle \times \langle 2, 5\rangle$;

b) $\iint_J x^3 y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $J = \langle 0, 2\rangle \times \langle 1, 3\rangle$;

c) $\iint_J x\,\mathrm{e}^{x+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $J = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$;

d) $\iint_J xy^2 \sin(x^2 y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $J = \langle 0, 1\rangle \times \left\langle 0, \dfrac{\pi}{2}\right\rangle$.

Výsledky cvičení:

**1.** a) $-45/2$; b) 16; c) $\mathrm{e} - 1$; d) $(\pi^2 - 4\pi + 8)/16$.

## 12C. MĚŘITELNÉ MNOŽINY V $\mathbf{R}^2$

**12.8.** V dalším textu rozšíříme integraci funkcí z intervalů na tzv. měřitelné množiny v $\mathbf{R}^2$. Než tak učiníme, uvedeme v tomto článku několik nejzákladnějších faktů o těchto množinách. Úvahy budou geometricky názorné, ale jejich přesné matematické zdůvodňování by bylo dosti zdlouhavé. Proto jednotlivé věty nebudeme většinou dokazovat.

Pojem měřitelné množiny a dvojného integrálu na měřitelné množině uvádíme pro úplnost výkladu. Chcete-li postupovat rychleji, můžete si následující dva články prozatím přečíst pouze orientačně a postoupit k článku 12E pojednávajícím o integrování na elementárních oblastech. V aplikacích se většinou setkáte pouze s dvojnými integrály spojitých funkcí na elementárních oblastech. Rozhodnete-li se pro tento rychlejší postup, můžete za definici takových integrálů považovat vzorce (12.22.2) a (12.23.1).

---

[1]) Při počítání dvojných (a také trojných) integrálů by někdy nemuselo být na první pohled jasné, za kterou proměnnou máme do vypočtené primitivní funkce dosazovat příslušné meze. Proto někdy používáme uvedenou symboliku.

**12.9. Definice.** Nechť $M \subset \mathbf{R}^2$. Funkci $\chi_M$ (s definičním oborem $\mathbf{R}^2$) definovanou předpisem

$$\chi_M(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } (x, y) \in M \\ 0 & \text{pro } (x, y) \in \mathbf{R}^2 - M \end{cases}$$

nazýváme *charakteristickou funkcí množiny M*.

**12.10. Definice.** Množinu $M \subset \mathbf{R}^2$ nazveme (*jordanovsky*) *měřitelnou* (*v* $\mathbf{R}^2$), jestliže její charakteristická funkce $\chi_M$ je integrovatelná na nějakém uzavřeném intervalu $J \subset \mathbf{R}^2$, kde $M \subset J$. Je-li $M$ měřitelná, potom číslo

$$\iint_J \chi_M(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

nazveme (*Jordanovou*) *mírou množiny M*.[2])

**12.11. Poznámky.** V těchto poznámkách uvedeme stručně (bez dokazování) některé poznatky o měřitelných množinách v $\mathbf{R}^2$. Důkazy jednotlivých tvrzení by nebyly příliš obtížné.

**12.11.1.** V definici 12.10 je možno zvolit uzavřený interval $J$ obsahující množinu $M$ nekonečně mnoha způsoby. Zmíněná definice je však na této volbě nezávislá.

**12.11.2.** *Každá měřitelná množina je omezená.*

**12.11.3.** *Prázdná množina a také každá množina obsahující jen konečný počet bodů je měřitelná. Míra takové množiny je rovna nule.*

**12.11.4.** *Každý omezený interval (i nikoliv uzavřený) je měřitelná množina. Jeho míra je rovna jeho obsahu.*

**12.11.5.** *Míra každé měřitelné množiny je nezáporné číslo.*

**12.11.6.** *Sjednocení, resp. průnik konečného počtu měřitelných množin je měřitelná množina. Rozdíl dvou měřitelných množin je měřitelná množina.*

**12.11.7.** *Jestliže $M_1, \ldots, M_n$ jsou měřitelné množiny, z nichž každé dvě jsou disjunktní, potom*

$$\mu(M_1 \cup \ldots \cup M_n) = \mu(M_1) + \ldots + \mu(M_n).$$

**12.11.8.** *Jestliže $M_1$, $M_2$ jsou měřitelné množiny a $M_1 \subset M_2$, potom*

$$\mu(M_1) \leqq \mu(M_2).$$

**12.11.9.** Existují omezené množiny, které nejsou jordanovsky měřitelné. Příkladem je množina všech bodů uzavřeného intervalu $J$, jejichž obě souřadnice jsou racionální čísla. Tento příklad zároveň dokumentuje skutečnost, že podmnožina měřitelné množiny nemusí být měřitelná.

V inženýrských aplikacích matematiky se však takové „umělé“ množiny prakticky nevyskytují. V podstatě lze říci, že každá omezená množina v $\mathbf{R}^2$, s níž se v inženýrských aplikacích setkáte, bude jordanovsky měřitelná.

---

[2]) Někdy se místo míra množiny $M$ říká obsah množiny $M$, což je v souladu se skutečností, že pojem míry v $\mathbf{R}^2$ je zobecněním středoškolského pojmu obsahu rovinného obrazce.



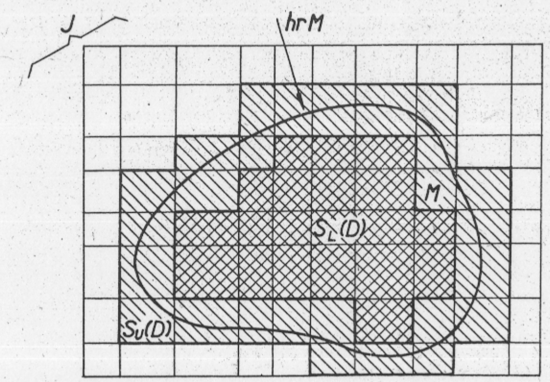
**12.12. Množiny míry nula.** Významnou roli hrají měřitelné množin jejichž míra je rovna nule, čili tzv. *množiny míry nula*. O nich platí tato důležit tvrzení (nebudeme je dokazovat):

**12.12.1.** *Každá podmnožina množiny míry nula je měřitelná a má míru nul*

**12.12.2.** *Množina $M \subset \mathbf{R}^2$ má (Jordanovu) míru nula právě tehdy, když k každému $\varepsilon > 0$ existuje konečná posloupnost $(J_1, \ldots, J_n)$ uzavřených dvojrozměrnýc intervalů taková, že*

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{n} J_i, \qquad \sum_{i=1}^{n} \mu(J_i) < \varepsilon.$$

**12.12.3.** *Graf (jako podmnožina prostoru $\mathbf{R}^2$) spojité funkce jedné proměnn jejímž definičním oborem je uzavřený interval, má (v $\mathbf{R}^2$) míru nula.*




Obr. 58. K pojmu dolní a horní mír množiny $M \subset \mathbf{R}^2$

**12.13. Geometrický význam míry.** Nechť $M \subset \mathbf{R}^2$ a nechť $J \subset \mathbf{R}^2$ j uzavřený interval takový, že $M \subset J$. Pro každé dělení $D$ intervalu $J$ označme

$$S_L(D), \quad \text{resp.} \quad S_U(D)$$

sjednocení všech částečných intervalů dělení $D$, které jsou podmnožinou množiny $M$ resp. které mají s $M$ neprázdný průnik, viz obr. 58 [množina $S_L(D)$ může bý prázdná]. Číslo

$$\sup_D \mu(S_L(D)), \quad \text{resp.} \quad \inf_D \mu(S_U(D))$$

($D$ „probíhá“ všechna možná dělení intervalu $J$) nazýváme *dolní* (*Jordanovou mírou*, resp. *horní* (*Jordanovou*) *mírou množiny M*.[3])

Názorný geometrický význam pojmů dolní a horní míry množiny $M \subset \mathbf{R}^2$ j zřejmý z jejich zavedení.

---

[3]) Někdy se místo dolní míra, resp. horní míra množiny $M$ říká *dolní obsah*, resp. *horní obsa množiny M*.

Lze dokázat, že platí

$$\sup_D \mu(S_L(D)) = \iint_J \chi_M(x, y)\,dx\,dy,$$
$$\inf_D \mu(S_U(D)) = \overline{\iint_J} \chi_M(x, y)\,dx\,dy. \qquad (12.13.1)$$

Z (12.13.1) a def. 12.3 vyplývá, že množina $M$ je měřitelná právě tehdy, když její dolní míra se rovná její horní míře. Odtud by bylo možné poměrně snadno dokázat [nebudeme to však dělat, neboť jsme nedokázali rovnosti (12.13.1)] tuto důležitou větu:

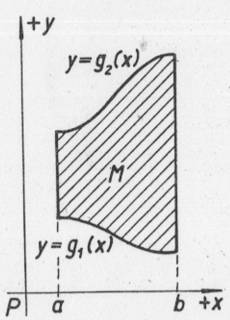
**12.14.** Věta. *Omezená množina* $M \subset \mathbf{R}^2$ *je měřitelná* (*v* $\mathbf{R}^2$) *právě tehdy, když její hranice* hr $M$ *má* (*v* $\mathbf{R}^2$) *míru nula.*

**12.15.** Důležité měřitelné množiny v $\mathbf{R}^2$. Věta 12.14 má velký význam. Pomocí ní v konkrétních případech poznáme, zda daná množina $M \subset \mathbf{R}^2$ je měřitelná, a pouze měřitelné množiny budeme připouštět jako integrační obory dvojných integrálů. Nejdůležitější z měřitelných množin jsou množiny těchto tří typů (s nimiž v praktických příkladech vystačíme):

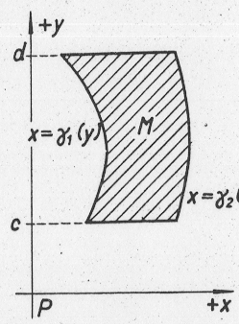
A) *Elementární* (*uzavřená*) *oblast prvního druhu.* Je to křivočarý lichoběžník

$$M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \in \langle a, b\rangle \wedge g_1(x) \leqq y \leqq g_2(x)\}, \qquad (12.15.1)$$

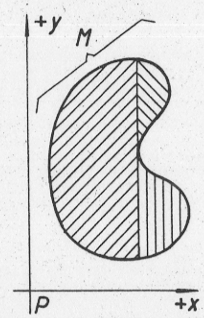
kde $g_1$, $g_2$ jsou funkce jedné proměnné definované a spojité na intervalu $\langle a, b\rangle$, přičemž pro každé $x \in (a, b)$ je $g_1(x) < g_2(x)$ (viz obr. 59).




Obr. 59. Elementární oblast prvního druhu




Obr. 60. Elementární oblast druhého druhu




Obr. 61. Elementární oblast

B) *Elementární* (*uzavřená*) *oblast druhého druhu.* Je to křivočarý lichoběžník

$$M = \{(x, y) \in \mathbf{R} : y \in \langle c, d\rangle \wedge \gamma_1(y) \leqq x \leqq \gamma_2(y)\}, \qquad (12.15.2)$$

kde $\gamma_1$, $\gamma_2$ jsou funkce jedné proměnné definované a spojité na intervalu $\langle c, d\rangle$, přičemž pro každé $y \in (c, d)$ je $\gamma_1(y) < \gamma_2(y)$ (viz obr. 60).

C) *Elementární* (*uzavřená*) *oblast.* Je to uzavřená oblast, kterou lze vyjádřit jako sjednocení konečně mnoha elementárních oblastí prvního nebo druhého



druhu, přičemž průnik každých dvou z těchto oblastí je množina míry nula viz např. obr. 61.

## 12D. DVOJNÝ INTEGRÁL NA MĚŘITELNÉ MNOŽINĚ

**12.16.** Úmluva. Nechť $f$ je funkce definovaná na množině $M \subset \mathbf{R}^2$. Pro potřeby této kapitoly definujme součin funkcí $f\chi_M$ takto:

$$(f\chi_M)(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{pro} \quad (x, y) \in M \\ 0 & \text{pro} \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2 - M. \end{cases}$$

Definičním oborem funkce $f\chi_M$ je tedy $\mathbf{R}^2$. Pokud je funkce $f$ definovaná na celém prostoru $\mathbf{R}^2$, je naše úmluva ve shodě s obyčejným násobením funkcí.

**12.17.** Definice. Nechť $M$ je neprázdná měřitelná množina v $\mathbf{R}^2$. Nech funkce $f$ je definovaná a omezená na množině $M$. Jestliže je funkce $f\chi_M$ integrovatelná na nějakém uzavřeném intervalu $J \subset \mathbf{R}^2$ obsahujícím množinu $M$, říkáme že funkce $f$ je (*riemannovsky*) *integrovatelná na množině* $M$ a píšeme $f \in R(M)$ Číslo

$$\iint_J (f\chi_M)(x, y)\,dx\,dy$$

pak nazýváme *dvojným* (nebo *dvojrozměrným*) *Riemannovým integrálem funkce* $f$ *na množině* $M$ a používáme pro ně označení

$$\iint_M f(x, y)\,dx\,dy. \qquad (12.17.1)$$

Je-li $M = \emptyset$, klademe hodnotu integrálu (12.17.1) rovnu nule.

**12.18.** Poznámky.

**12.18.1.** Definice 12.17 nezávisí na volbě uzavřeného intervalu $J$ obsahujícího množinu $M$.

**12.18.2.** Z definice 12.17, hesla 12.12.3 a pozn. 12.4.5 vyplývá, že integrál (12.17.1) je pro každou množinu $M$ míry nula roven nule.

**12.18.3.** Pro dvojný integrál (12.17.1) se používají různá stručná označení jako např.

$$\iint_M f\,dx\,dy, \quad \iint_M f(x, y)\,dP, \quad \iint_M f(\mathbf{x})\,dP, \quad \iint_M f\,dP, \quad \iint_M f \quad \text{apod.}$$

**12.18.4.** V definici 12.17 jsme zavedli pojem dvojného integrálu funkce $f$ na měřitelné množině $M$ pomocí dvojného integrálu jiné funkce na uzavřeném intervalu $J$. Lze tedy očekávat, že věty, které jsme uvedli pro dvojný integrál na uzavřeném intervalu je možné přenést i na dvojný integrál na měřitelné množině. Na základě pozn. 12.18.2 by bylo možné dokázat další důležité věty. Nejdůležitější vlastnosti dvojného integrálu na měřitelné množině shrneme nyní do následující věty 12.19, kterou nebudeme dokazovat (podrobný důkaz by nebyl obtížný, byl by však dosti zdlouhavý).

**12.19.** Věta. *Nechť $M$ je měřitelná množina v $\mathbf{R}^2$. Potom platí:*

1. *Nechť $f \in R(M)$ a nechť $g$ je omezená funkce definovaná na $M$, pro kterou platí $g(x, y) = f(x, y)$ pro všechna $(x, y) \in M - M_0$, kde $M_0$ je množina míry nula. Potom $g \in R(M)$ a*

$$\iint_M g(x, y)\,dx\,dy = \iint_M f(x, y)\,dx\,dy.$$[4])

2. *Jestliže funkce $f$ je spojitá na $M$ a množina $M$ je uzavřená, potom $f \in R(M)$.*

3. *Nechť $f_1, \ldots, f_n \in R(M)$ a $k_1, \ldots, k_n \in \mathbf{R}$. Potom funkce*

$$g = k_1 f_1 + \ldots + k_n f_n$$

*je integrovatelná na $M$ a platí*

$$\iint_M g(x, y)\,dx\,dy = k_1 \iint_M f_1(x, y)\,dx\,dy + \ldots + k_n \iint_M f_n(x, y)\,dx\,dy.$$

4. *Nechť $f_1, \ldots, f_n \in R(M)$. Potom $f_1 f_2 \ldots f_n \in R(M)$.*

5. *Nechť $f \in R(M)$. Potom $|f| \in R(M)$.*

6. *Nechť $f, g \in R(M)$ a nechť pro každé $(x, y) \in M$ platí $f(x, y) \leqq g(x, y)$. Potom*

$$\iint_M f(x, y)\,dx\,dy \leqq \iint_M g(x, y)\,dx\,dy.$$

7. *Nechť $f \in R(M)$ a $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Nechť pro každé $(x, y) \in M$ platí $\alpha \leqq f(x, y) \leqq \beta$. Potom*

$$\alpha\mu(M) \leqq \iint_M f(x, y)\,dx\,dy \leqq \beta\mu(M).$$

8. *Nechť $M_1$, $M_2$ jsou měřitelné množiny v $\mathbf{R}^2$ a nechť $f \in R(M_1)$, $f \in R(M_2)$. Potom $f \in R(M_1 \cup M_2)$. Jestliže navíc $\mu(M_1 \cap M_2) = 0$, potom platí*

$$\iint_{M_1 \cup M_2} f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{M_1} f(x, y)\,dx\,dy + \iint_{M_2} f(x, y)\,dx\,dy.$$

**12.20.** Náročná poznámka. V kapitole 6 jsme uvedli „náročnou poznámku“ pro jednorozměrný Riemannův integrál (heslo 6.77). Tuto poznámku lze doslova přenést na dvojrozměrný (a samozřejmě též $n$-rozměrný) Riemannův integrál na uzavřeném intervalu:

Omezená funkce je na uzavřeném intervalu $J \subset \mathbf{R}^2$ riemannovsky integrovatelná právě tehdy, když množina všech jejích bodů nespojitosti na $J$ má Lebesgueovu míru nula. Přitom o množině $M \subset \mathbf{R}^2$ říkáme, že má *Lebesgueovu míru nula*, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje konečný nebo spočetný (srovnejte s heslem 12.12.3) systém dvojrozměrných uzavřených intervalů o celkovém obsahu menším než $\varepsilon$, který množinu $M$ pokrývá.

Tato věta zasahuje do teorie Lebesgueova integrálu. Pro zajímavost konstatujme, že pokud množina $M \subset \mathbf{R}^2$ má Jordanovu míru nula, má i Lebesgueovu míru nula. Obrácená implikace však neplatí. Množina, která má Lebesgueovu míru nula, má Jordanovu míru nula nebo není jordanovsky měřitelná.

---

[4]) Toto tvrzení si snadno zapamatujete ve tvaru: Hodnota dvojného integrálu se nezmění, změníme-li hodnoty integrované funkce na množině míry nula (ovšem tak, aby nová funkce byla opět omezená).



## 12E. FUBINIOVA VĚTA PRO DVOJNÝ INTEGRÁL

**12.21.** Konečně se dostáváme k počítání konkrétních příkladů. V tomto článku budeme počítat dvojné integrály, v nichž integrační obory budou elementární oblasti a integrované funkce budou spojité funkce nebo omezené funkce, jejichž body nespojitosti tvoří množinu míry nula. K převedení takových integrálů na integrály dvojnásobné slouží tzv. Fubiniova věta, kterou vyslovíme ve dvou verzích. Dokazovat ji nebudeme, poznamenejme však, že je poměrně jednoduchým důsledkem Fubiniovy věty pro dvojný intergál na uzavřeném intervalu (věta 12.5) a definice dvojného integrálu na měřitelné množině (def. 12.17). Fubiniovu větu by bylo možné vyslovit za mnohem obecnějších předpokladů, než učiníme nyní my.

**12.22.** Fubiniova věta (první verze, viz obr. 59). *Nechť funkce $f$ je integrovatelná na elementární oblasti prvního druhu (12.15.1), kde $g_1$, $g_2$ jsou funkce definované a spojité na intervalu $\langle a, b\rangle$, přičemž pro každé $x \in (a, b)$ je $g_1(x) < g_2(x)$.*

*Jestliže pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ je funkce $y \mapsto f(x, y)$ integrovatelná na intervalu $\langle g_1(x), g_2(x)\rangle$, potom funkce*

$$x \mapsto \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\,dy^{5)} \tag{12.22.1}$$

*je integrovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$ a platí*

$$\iint_M f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b \Big[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\,dy\Big]\,dx. \tag{12.22.2}$$

**12.23.** Fubiniova věta (druhá verze, viz obr. 60). *Nechť funkce $f$ je integrovatelná na elementární oblasti druhého druhu (12.15.2), kde $\gamma_1$, $\gamma_2$ jsou funkce definované a spojité na intervalu $\langle c, d\rangle$, přičemž pro každé $y \in (c, d)$ je $\gamma_1(y) < \gamma_2(y)$.*

*Jestliže pro každé $y \in \langle c, d\rangle$ je funkce $x \mapsto f(x, y)$ integrovatelná na intervalu $\langle \gamma_1(y), \gamma_2(y)\rangle$, potom funkce*

$$y \mapsto \int_{\gamma_1(y)}^{\gamma_2(y)} f(x, y)\,dx$$

*je integrovatelná na intervalu $\langle c, d\rangle$ a platí*

$$\iint_M f(x, y)\,dx\,dy = \int_c^d \Big[\int_{\gamma_1(y)}^{\gamma_2(y)} f(x, y)\,dx\Big]\,dy. \tag{12.23.1}$$

**12.24.** Poznámka. Pro tzv. *dvojnásobný integrál* na pravé straně rovnosti (12.22.2), resp. (12.23.1) se někdy používá stručné označení

$$\int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\,dy, \quad \text{resp.} \quad \int_c^d dy \int_{\gamma_1(y)}^{\gamma_2(y)} f(x, y)\,dx.$$

---

[5]) V případě, že $g_1(x) = g_2(x)$, rozumíme integrovatelností funkce $y \mapsto f(x, y)$ na „intervalu $\langle g_1(x), g_2(x)\rangle$“ existenci integrálu v (12.22.1), který ovšem existuje automaticky a je roven nule. Tato poznámka se týká i dalších verzí Fubiniovy věty pro dvojný i trojný integrál.

**12.25. Příklad.** Vypočtěme integrál

$$\iint_M (x^2 + y^2)\,dx\,dy, \tag{12.25.1}$$

kde $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \geqq x^2 \wedge y \leqq x\}$.

Řešení. Množina $M$ (viz obr. 62) je elementární oblast prvního (a také druhého) druhu, tedy uzavřená měřitelná množina. Funkce $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ je na $M$ spojitá, a proto integrovatelná.

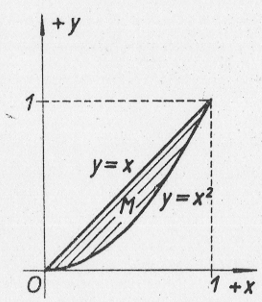
Integrál (12.25.1) vypočteme pomocí vzorce (12.22.2):

$$\iint_M (x^2 + y^2)\,dx\,dy = \int_0^1 \Big[\int_{x^2}^{x} (x^2 + y^2)\,dy\Big]\,dx =$$
$$= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3\right]_{y=x^2}^{y=x} dx =$$
$$= \int_0^1 \left(x^3 + \frac{1}{3} x^3 - x^4 - \frac{1}{3} x^6\right) dx =$$
$$= \left[\frac{1}{3} x^4 - \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{21} x^7\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{3}{35}.$$

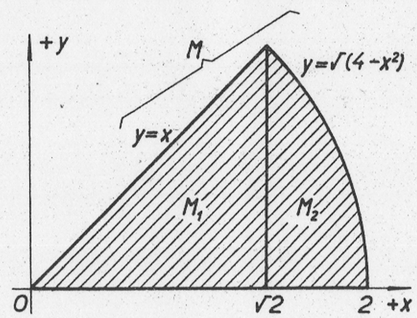
Daný integrál bychom mohli vypočítat rovněž pomocí vzorce (12.23.1):

$$\iint_M (x^2 + y^2)\,dx\,dy = \int_0^1 \Big[\int_y^{\sqrt{y}} (x^2 + y^2)\,dx\Big]\,dy =$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} y^{3/2} + y^{5/2} - \frac{4}{3} y^3\right) dy = \frac{3}{35}$$

(tento druhý výpočet podrobně odůvodněte sami). □




Obr. 62. K příkladu 12.25




Obr. 63. K příkladu 12.26

**12.26. Příklad.** Vypočtěme integrál

$$\iint_M 2x^2 y\,dx\,dy, \tag{12.26.1}$$

kde $M$ je kruhová výseč z obr. 63.



Řešení. Stejně jako v příkl. 12.25 bychom mohli odůvodnit, že daný integrál existuje.

Integrační obor $M$ rozdělme přímkou $x = \sqrt{2}$ na dvě části $M_1$, $M_2$ (viz obr. 63) a pišme

$$\iint_M 2x^2 y\,dx\,dy = \iint_{M_1} 2x^2 y\,dx\,dy + \iint_{M_2} 2x^2 y\,dx\,dy. \tag{12.26.2}$$

Každý z integrálů napravo vypočteme pomocí vzorce (12.22.2) (každá z množin $M_1$, $M_2$ je elementární oblast prvního druhu):

$$\iint_{M_1} 2x^2 y\,dx\,dy = \int_0^{\sqrt{2}} \Big[\int_0^{x} 2x^2 y\,dy\Big]\,dx = \int_0^{\sqrt{2}} [x^2 y^2]_{y=0}^{y=x}\,dx =$$
$$= \int_0^{\sqrt{2}} x^4\,dx = \left[\frac{1}{5} x^5\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{4}{5}\sqrt{2},$$

$$\iint_{M_2} 2x^2 y\,dx\,dy = \int_{\sqrt{2}}^{2} \Big[\int_0^{\sqrt{(4-x^2)}} 2x^2 y\,dy\Big]\,dx =$$
$$= \int_{\sqrt{2}}^{2} [x^2 y^2]_{y=0}^{y=\sqrt{(4-x^2)}}\,dx = \int_{\sqrt{2}}^{2} (4x^2 - x^4)\,dx =$$
$$= \left[\frac{4}{3} x^3 - \frac{1}{5} x^5\right]_{\sqrt{2}}^{2} = \frac{4}{15}(16 - 7\sqrt{2}).$$

Dosadíme-li tyto výsledky do (12.26.2), dostaneme:

$$\iint_M 2x^2 y\,dx\,dy = \frac{4}{5}\sqrt{2} + \frac{4}{15}(16 - 7\sqrt{2}) = \frac{16}{15}(4 - \sqrt{2}).$$

Příklad je vyřešen. Poznamenejme ještě, že množina $M$ jako celek je rovněž elementární oblast prvního druhu, avšak funkci, jejímž grafem je „ohraničená shora“, nelze zapsat jedním jednoduchým předpisem. Proto jsme oblast $M$ rozdělili na oblasti $M_1$, $M_2$ a integrál (12.26.1) počítali jako součet integrálů na těchto oblastech. Dodejme, že množina $M$ je také elementární oblast druhého druhu a že kdybychom integrál (12.26.1) počítali na základě vzorce (12.23.1), nebylo by nutné množinu $M$ rozdělovat na části (příslušný výpočet proveďte sami). □

## Cvičení k článku 12E

**1.** Vypočtěte dvojné integrály:

a) $\iint_M (2x + y - 1)\,dx\,dy$, kde $M$ je množina ohraničená přímkami $y = x$, $y = 2x$, $x = 1$;

b) $\iint_M xy\,dx\,dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y^2 \leqq 2x \wedge x \leqq 2\}$;

c) $\iint_M \sqrt{(1 - x^2 - y^2)}\,dx\,dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leqq 1 \wedge x \geqq 0 \wedge y \geqq 0\}$;

d) $\iint\limits_M \frac{y^2}{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M$ je množina ohraničená křivkami $xy = 1$, $y = \frac{1}{4}x$, $y = 3$;

e) $\iint\limits_M (x - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M$ je (nekonvexní) pětiúhelník, jehož vrcholy (v tomto pořadí) jsou $(0, 0)$, $(4, 2)$, $(6, 0)$, $(2, -2)$, $(4, 0)$.

f) $\iint\limits_M \operatorname{sgn}(y - 2x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leqq 4\}$.

**2.** Zaměňte pořadí integrace v těchto dvojnásobných integrálech:

a) $\int\limits_1^{\mathrm{e}} [\int\limits_0^{\ln x} f(x, y)\,\mathrm{d}y]\,\mathrm{d}x$;

b) $\int\limits_{-1}^{0} [\int\limits_0^{\sqrt{(1-y^2)}} f(x, y)\,\mathrm{d}x]\,\mathrm{d}y$;

c) $\int\limits_0^{2} [\int\limits_{x/2}^{2x} f(x, y)\,\mathrm{d}y]\,\mathrm{d}x$.

Výsledky cvičení:

**1.** a) $2/3$; b) $0$; c) $\pi/6$; d) $1225/64$; e) $76/3$; f) $0$.

**2.** a) $\int\limits_0^{1} [\int\limits_{\mathrm{e}^y}^{\mathrm{e}} f(x, y)\,\mathrm{d}x]\,\mathrm{d}y$; b) $\int\limits_0^{1} [\int\limits_{-\sqrt{(1-x^2)}}^{0} f(x, y)\,\mathrm{d}y]\,\mathrm{d}x$;
c) $\int\limits_0^{1} [\int\limits_{y/2}^{2y} f(x, y)\,\mathrm{d}x]\,\mathrm{d}y + \int\limits_1^{4} [\int\limits_{y/2}^{2} f(x, y)\,\mathrm{d}x]\,\mathrm{d}y$.

## 12F. SUBSTITUČNÍ METODA PRO DVOJNÝ INTEGRÁL

**12.27.** Substituční metodu pro jednorozměrný Riemannův integrál jsme probrali v kap. 6 (věta 6.91). Připomeňme, že je-li funkce $g$ prostá a spojitě diferencovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$ a funkce $f$ spojitá na intervalu $\langle g(a), g(b)\rangle$, potom platí

$$\int\limits_A^B f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(g(t))\,g'(t)\,\mathrm{d}t, \tag{12.27.1}$$

kde $A = g(a)$, $B = g(b)$ [čili $a = g^{-1}(A)$, $b = g^{-1}(B)$].[6])

**12.28.** Intuitivní („historické") odvození věty o substituci pro jednorozměrný integrál. Přečtěte si znovu v kap. 6 historickou poznámku 6.123 pojednávající o „historické definici" určitého integrálu. Nyní „odvodíme" vzorec (12.27.1) pomocí úvah z této poznámky.

---

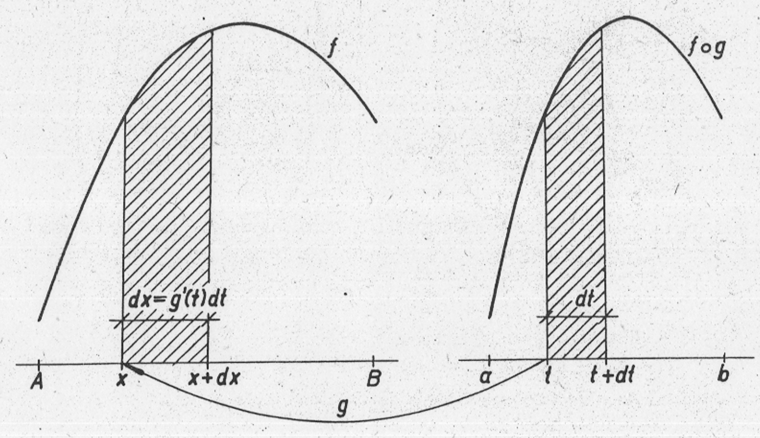
[6]) Věta 6.91 popisovala poněkud obecnější situaci. Nepředpokládali jsme v ní, že funkce $g$ je prostá. V dvojrozměrné analogii, k níž směřujeme v tomto článku, však budeme předpokládat, že odpovídající vektorová funkce $\mathbf{g}$ je prostá, a proto jsme větu 6.91 připomněli v této speciální verzi. Oproti větě 6.91 jsme navíc zaměnili role proměnných $x$, $t$ (podobně jako v druhém pravidle o substituci v neurčitém integrálu, viz heslo 6.23).



Při zobrazení $g$ odpovídá „nekonečně malému" dílku $\langle t, t + \mathrm{d}t\rangle$ délky $\mathrm{d}t$ intervalu $\langle a, b\rangle$ „nekonečně malý" dílek $\langle x, x + \mathrm{d}x\rangle$, kde $x = g(t)$, intervalu $\langle A, B\rangle$, jehož délka je $\mathrm{d}x = g'(t)\,\mathrm{d}t$ (viz obr. 64). Platí tedy

$$f(x)\,\mathrm{d}x = f(g(t))\,g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Z této rovnosti a z „historické definice" určitého integrálu z hesla 6.123 vyplývá vzorec (12.27.1). Sečtením všech nekonečně mnoha „nekonečně malých" čísel $f(x)\,\mathrm{d}x$, resp. $f(g(t))\,g'(t)\,\mathrm{d}t$ (odpovídajících všem dílkům, na něž máme rozdělen interval $\langle A, B\rangle$, resp. $\langle a, b\rangle$) dostaneme totiž (podle pozn. 6.123) integrál na levé, resp. pravé straně rovnosti (12.27.1).




Obr. 64. K „historickému odvození" substituční metody pro jednorozměrný integrál

**12.29.** Intuitivní („historické") odvození věty o substituci pro dvojný integrál. Nyní podobnými úvahami jako v hesle 12.28 „odvodíme" vzorec pro substituci ve dvojném integrálu [bude podobný vzorci (12.27.1)]. Intuitivní úvahy budeme provádět, aniž bychom přesně formulovali příslušné předpoklady. Tyto předpoklady přesně uvedeme v následující větě 12.30.

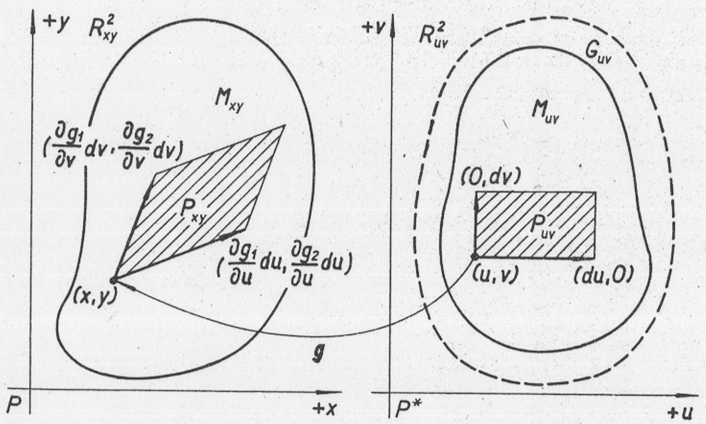
Dvojný integrál se dříve definoval podobně jako jednorozměrný určitý integrál zhruba takto: Uvažujme funkci $f$ definovanou na (dejme tomu elementární) oblasti $M \subset \mathbf{R}^2$. Rozdělme oblast $M$ na nekonečně mnoho „nekonečně malých" dílků (např. obdélníků, rovnoběžníků apod.). Dvojný integrál funkce $f$ na oblasti $M$ „definujeme" jako „součet" všech nekonečně mnoha „nekonečně malých" čísel $f(x, y)\,P_{xy}$, kde $P_{xy}$ je obsah příslušného „nekonečně malého" dílku.

Předpokládejme, že je dána vektorová funkce $\mathbf{g} = (g_1, g_2)$, jejíž souřadnicové funkce $g_1$, $g_2$ jsou dány rovnicemi

$$x = g_1(u, v), \qquad y = g_2(u, v), \tag{12.29.1}$$

která je vzájemně jednoznačným zobrazením elementární oblasti $M_{uv} \subset \mathbf{R}^2$ na elementární oblast $M_{xy} \subset \mathbf{R}^2$. Situace je znázorněna na obr. 65, na němž je prostor $\mathbf{R}^2$ zakreslen dvakrát (jednou je označen jako $\mathbf{R}^2_{xy}$, podruhé jako $\mathbf{R}^2_{uv}$). Na oblasti $M_{xy}$ nechť je definována funkce $f$ (dvou proměnných $x$, $y$). Této funkci odpovídá na oblasti $M_{uv}$ složená funkce $f \circ \mathbf{g}$ (dvou proměnných $u$, $v$), která je dána předpisem

$$(u, v) \mapsto f(g_1(u, v), g_2(u, v)).^{7})$$




Obr. 65. K „historickému odvození“ substituční metody pro dvojný integrál

Naším cílem je „odvodit“ vzorec, který by dvojný integrál

$$\iint_{M_{xy}} f(x, y)\, dx\, dy$$

převedl na dvojný integrál nějaké funkce na oblasti $M_{uv}$.

Uvažujme „nekonečně malý“ dílek $\langle u, u + du \rangle \times \langle v, v + dv \rangle$ oblasti $M_{uv}$, tj. obdélník, jehož strany můžeme chápat jako vektory $(du, 0)$, $(0, dv)$. Obsah $P_{uv}$ tohoto obdélníka je roven číslu $du\, dv$. Zobrazení $\mathbf{g}$ přiřazuje „nekonečně malým“ vektorům $(du, 0)$, $(0, dv)$ (v tomto pořadí) „nekonečně malé“ vektory

$$\left(\frac{\partial g_1}{\partial u}(u, v)\, du, \frac{\partial g_2}{\partial u}(u, v)\, du\right), \quad \left(\frac{\partial g_1}{\partial v}(u, v)\, dv, \frac{\partial g_2}{\partial v}(u, v)\, dv\right).^{8}) \tag{12.29.2}$$

---

7) Na rozdíl od obr. 64, v němž jsme pro jednorozměrný případ zakreslili grafy funkcí $f$, $f \circ g$ a zároveň naznačili geometrický význam příslušných integrálů, v obr. 65 funkce $f$, $f \circ \mathbf{g}$ znázorněny nejsou (jsou tam pouze příslušné integrační obory).

8) To plyne ze vzorců

$$dx = \frac{\partial g_1}{\partial u}(u, v)\, du + \frac{\partial g_1}{\partial v}(u, v)\, dv,$$

$$dy = \frac{\partial g_2}{\partial u}(u, v)\, du + \frac{\partial g_2}{\partial v}(u, v)\, dv,$$

které obdržíme „diferencováním“ rovnic (12.29.1).



Vyšrafovanému obdélníku z pravé části obr. 65 odpovídá tedy v oblasti $M_{xy}$ „nekonečně malý“ rovnoběžník určený vektory (12.29.2), který je vyšrafovaný v levé části obr. 65. Obsah $P_{xy}$ tohoto rovnoběžníka je roven absolutní hodnotě determinantu

$$\left| \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u}(u, v)\, du, & \frac{\partial g_1}{\partial v}(u, v)\, dv \\ \frac{\partial g_2}{\partial u}(u, v)\, du, & \frac{\partial g_2}{\partial v}(u, v)\, dv \end{vmatrix} \right| = \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u}(u, v), & \frac{\partial g_1}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial g_2}{\partial u}(u, v), & \frac{\partial g_2}{\partial v}(u, v) \end{vmatrix} \right| du\, dv.^{9})$$

Platí tedy, že

$$P_{xy} = |J(u, v)|\, du\, dv = |J(u, v)|\, P_{uv},$$

kde

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u}(u, v), & \frac{\partial g_1}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial g_2}{\partial u}(u, v), & \frac{\partial g_2}{\partial v}(u, v) \end{vmatrix}$$

je Jacobián vektorové funkce $\mathbf{g}$ v bodě $(u, v)$ (viz def. 9.113).

A nyní přijde zcela analogická úvaha jako v závěru hesla 12.28. Z rovnosti (která je důsledkem našich výpočtů)

$$f(x, y)\, dx\, dy = f(g_1(u, v), g_2(u, v))\, |J(u, v)|\, du\, dv$$

a z „historické definice“ dvojného integrálu uvedené na začátku tohoto hesla vyplývá (naprosto stejně jako v hesle 12.28 pro jednorozměrný případ), že

$$\iint_{M_{xy}} f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{M_{uv}} f(g_1(u, v), g_2(u, v))\, |J(u, v)|\, du\, dv. \tag{12.29.3}$$

To je vzorec, který jsme chtěli odvodit. Naše úvahy by bylo možné precizovat, kdybychom místo o součtech nekonečně mnoha „nekonečně malých“ čísel mluvili o limitách normálních posloupností integrálních součtů. Totéž platí pro podobné úvahy v dalším textu. Výklad by se však po formální stránce dosti zkomplikoval.

**12.30.** Věta o substituční metodě pro dvojné integrály. *Nechť $M_{xy} \subset \mathbf{R}^2$ je měřitelná množina a nechť $f$ je funkce (dvou proměnných $x$, $y$), která je definovaná a spojitá na $M_{xy}$. Nechť $M_{uv} \subset \mathbf{R}^2$ je měřitelná uzavřená množina a $G_{uv} \subset \mathbf{R}^2$ otevřená množina taková, že $M_{uv} \subset G_{uv}$. Nechť $\mathbf{g} = (g_1, g_2) : G_{uv} \to \mathbf{R}^2$ je prostá vektorová funkce (dvou proměnných $u$, $v$), která je na $G_{uv}$ třídy $C^1$ a jejíž Jacobián je v každém bodě $(u, v) \in G_{uv}$ různý od nuly. Nechť souřadnicové funkce $g_1$, $g_2$ vektorové funkce $\mathbf{g}$ jsou dány rovnicemi* (12.29.1). *Nechť $g(M_{uv}) = M_{xy}$* (opět viz obr. 65). *Potom existují dvojné Riemannovy integrály na obou stranách rovnosti* (12.29.3) *a rovnost* (12.29.3) *platí.*

Důkaz nebudeme provádět. □

---

9) Determinant druhého, třetího, atd. stupně počítá (snad až na znaménko) obsah rovnoběžníka, objem rovnoběžnostěnu atd. určeného řádky, případně sloupci příslušné matice.

**12.31.** Poznámka. U jednorozměrných Riemannových integrálů jsme pomocí vzorce (12.27.1) v příkladech převáděli jeden z integrálů, které se v tomto vzorci vyskytují (zpravidla „obtížnější"), na druhý z obou integrálů (který byl většinou již „jednodušší"). Potíže při výpočtu jednorozměrných integrálů činily pouze integrované funkce, nikoliv integrační obory (byly to vždy jednorozměrné intervaly). Vzorec (12.29.3) pro dvojný Riemannův integrál budeme používat podobným způsobem. Potíže při výpočtu dvojných integrálů však kromě integrovaných funkcí mohou způsobovat také integrační obory (což mohou být dosti komplikované podmnožiny prostoru $\mathbf{R}^2$). Pomocí vzorce (12.29.3) budeme v mnohých případech „zjednodušovat" nejen integrované funkce, ale také příslušné integrační obory.

**12.32.** Poznámka. Užití věty 12.30 ukážeme na čtyřech příkladech. V prvním a druhém z nich budou všechny předpoklady věty 12.30 splněny, což v prvním příkladě podrobně ukážeme. V dalších dvou příkladech bude vektorová funkce $\mathbf{g}$ na jisté množině míry nula „zlobit" (nebude na ní splňovat předpoklady věty 12.30: nebude tam prostá, bude mít v některých bodech nulový Jacobián apod.). To však (jak lze ukázat) v těchto příkladech nevadí. Mohli bychom vyslovit obecnější věty o substituci, které by zachycovaly i tuto situaci, ale nebudeme to dělat. V podstatě lze říci, že ve všech „rozumných" příkladech, se kterými se v praxi setkáte, vás vzorec (12.29.3) bezpečně dovede k cíli, i když předpoklady věty 12.30 nebudou přesně splněny. Jak by bylo možné v takových příkladech postupovat zcela přesně, naznačíme v pozn. pod čarou[10]) k příkl. 12.36.

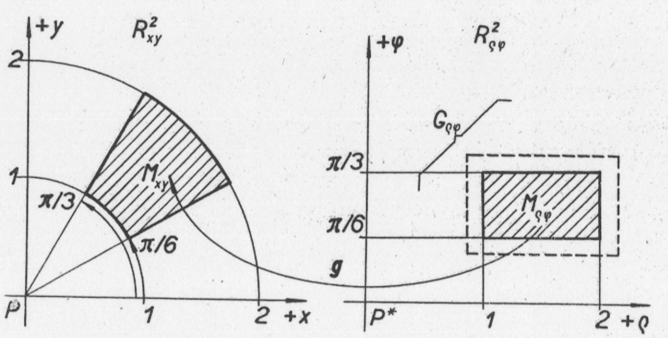
**12.33.** Příklad. Pomocí substituce do polárních souřadnic vypočtěme dvojný integrál

$$\iint_{M_{xy}} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{12.33.1}$$

kde

$$M_{xy} = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2_{xy} : 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4 \wedge \frac{\sqrt{3}}{3}x \leqq y \leqq \sqrt{3}x\right\},$$

viz obr. 66.




Obr. 66. K příkladu 12.33



Řešení. Uvažujme transformaci do polárních souřadnic, tj. vektorovou funkci $\mathbf{g} = (g_1, g_2)$ (dvou proměnných $\varrho$, $\varphi$), jejíž souřadnicové funkce $g_1$, $g_2$ jsou dány (v tomto pořadí) rovnicemi

$$x = \varrho\cos\varphi, \quad y = \varrho\sin\varphi \tag{12.33.2}$$

(viz heslo 9.124).

Tato vektorová funkce $\mathbf{g}$ zobrazuje vzájemně jednoznačně na elementární oblast $M_{xy}$ elementární oblast

$$M_{\varrho\varphi} = \left\{(\varrho, \varphi) \in \mathbf{R}^2_{\varrho\varphi} : 1 \leqq \varrho \leqq 2 \wedge \frac{\pi}{6} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{3}\right\}$$

(opět viz obr. 66). Uvažujme vektorovou funkci $\mathbf{g}$ na otevřené množině $G_{\varrho\varphi} \subset \mathbf{R}^2_{\varrho\varphi}$, třeba na otevřeném obdélníku (jak je naznačeno v obr. 66), který obsahuje uzavřený obdélník $M_{\varrho\varphi}$, který má však prázdný průnik s kladnou částí osy $x$ (včetně počátku) (srov. s pozn. 9.127.3). Je jasné, že vektorová funkce $\mathbf{g}$ je na $G_{\varrho\varphi}$ prostá, třídy $C^1$ a že má v každém bodě $(\varrho, \varphi) \in G_{\varrho\varphi}$ Jacobián $J(\varrho, \varphi) = \varrho$ (viz cvič. 2a k čl. 9Q) různý od nuly.

Všechny předpoklady věty 12.30 jsou tedy splněny, a proto podle vzorce (12.29.3) můžeme psát:

$$\iint_{M_{xy}} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{M_{\varrho\varphi}} (\varrho^2\cos^2\varphi + \varrho^2\sin^2\varphi)\,|\varrho|\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \left[\int_1^2 \varrho^3\,\mathrm{d}\varrho\right] \mathrm{d}\varphi = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{15}{4}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{5}{8}\pi$$

[„nový" integrál byl dvojný integrál na dvojrozměrném intervalu, vypočetli jsme jej pomocí vzorce (12.5.2)]. □

**12.34.** Poznámka k substituci do polárních souřadnic. Substituci do polárních souřadnic ve dvojném integrálu

$$\iint_{M_{xy}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{12.34.1}$$

je vhodné použít zvláště tehdy, když nový integrační obor $M_{\varrho\varphi}$ je elementární oblast prvního, resp. druhého druhu, tj. když integrační obor $M_{xy}$ má tvar jako v levé části obr. 67, resp. 68. Integrovaná funkce $f$ v (12.34.1) se při substituci do polárních souřadnic zjednoduší např. tehdy, když je dána předpisem

$$f(x, y) = h(x^2 + y^2),$$

kde $h$ je nějaká funkce jedné proměnné.

**12.35.** Příklad. Pomocí vhodné substituce vypočtěme dvojný integrál

$$\iint_{M_{xy}} \frac{y}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{12.35.1}$$

kde $M_{xy} \subset \mathbf{R}^2$ je množina ohraničená křivkami $xy = 1$, $xy = 3$, $y = x$, $y = 2x$ $(x, y > 0)$, viz obr. 69.