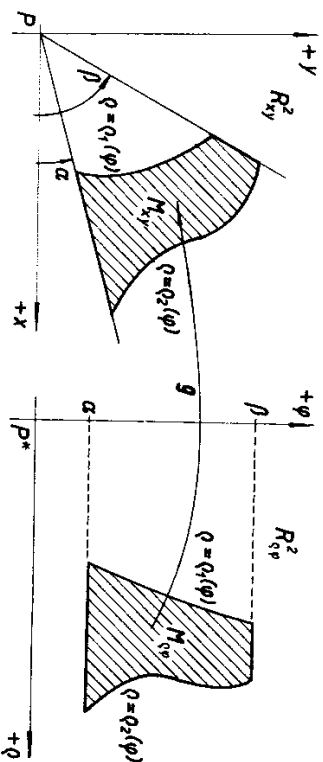
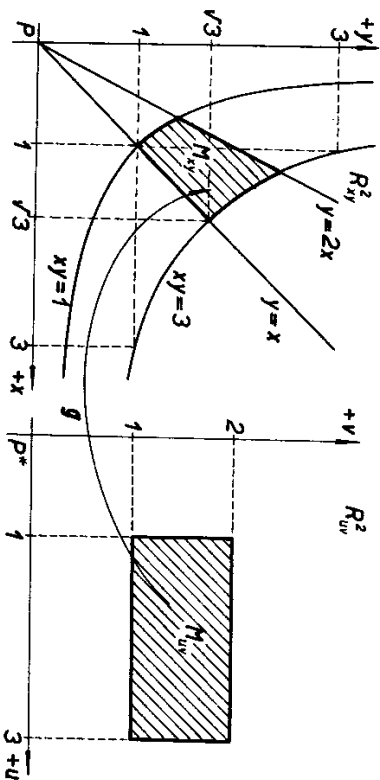


Obr. 67. Integraci obor  $M_{xy}$  vhodný pro substituci do polárních souřadnic (nový integrační obor  $M_{\phi p}$  je elementární oblast prvního druhu)



Obr. 68. Integraci obor  $M_{xy}$  vhodný pro substituci do polárních souřadnic (nový integrační obor  $M_{q\phi}$  je elementární oblast druhého druhu)



Obr. 69. K příkladu 12.35

Řešení. Prohlédnete-li si znovu příkl. 9.121, k němu se vztahující obr. 19 a začátek hesla 9.122, nahlédnete, že daný integrační obor  $M_{xy}$  převedeme dokonce na dvojnásobný interval  $M_{uv}$  (obr. 69), použijeme-li k substituci vektorovou funkci  $\mathbf{g} = (g_1, g_2)$ , jejíž souřadnicové funkce  $g_1, g_2$  jsou (v tomto pořadí) dány rovnicemi

$$x = \sqrt{u/v}, \quad y = \sqrt{uv}.$$

Vypočteme-li, že

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial g_1}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial g_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial g_2}{\partial v}(u, v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} u^{-1/2} v^{-1/2} & -\frac{1}{2} u^{1/2} v^{-3/2} \\ \frac{1}{2} u^{-1/2} v^{1/2} & \frac{1}{2} u^{1/2} v^{-1/2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}.$$

můžeme psát:

$$\iint_{M_{xy}} \frac{y}{x} dx dy = \iint_{M_{uv}} \frac{\sqrt{uv}}{\sqrt{u/v}} \frac{1}{2v} du dv = \iint_{M_{uv}} \frac{1}{2} du dv = \int_1^3 \left[ \int_1^2 \frac{1}{2} dv \right] du = 1$$

(podrobné ověření předpokladů věty 12.30 provedte sami).  $\square$

12.36. Příklad. Pomocí vhodné substituce vypočteme dvojný integrál

$$\iint_{M_{xy}} y dx dy, \quad (12.36.1)$$

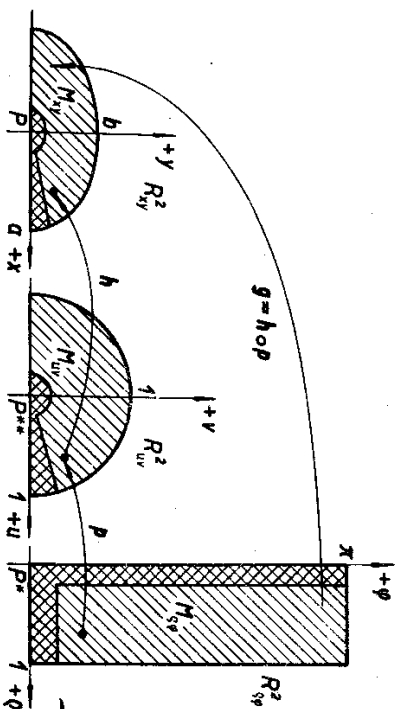
kde

$$M_{xy} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \wedge y \geq 0 \right\} \quad (12.36.2)$$

( $a, b > 0$ ), viz obr. 70.

Řešení. Použijeme substituci do tzv. *zobecněných polárních souřadnic*, která je dána vektorovou funkcí  $\mathbf{g} = (g_1, g_2)$ , jejíž souřadnicové funkce  $g_1, g_2$  jsou (v tomto pořadí) dány rovnicemi

$$x = a\varrho \cos \varphi, \quad y = b\varrho \sin \varphi. \quad (12.36.3)$$



Obr. 70. Transformace do zobecněných polárních souřadnic  $\mathbf{g}$  složená z dilatace  $h$  a transformace do polárních souřadnic  $\mathbf{p}$

Vektorovou funkci  $\mathbf{g}$  bychom mohli zapsat ve tvaru  $\mathbf{g} = \mathbf{h} \circ \mathbf{p}$ , kde vektorová funkce  $\mathbf{h}$  daná vektorovou rovnicí

$$(x, y) = (au, bu)$$

představuje tzv. *dilataci* a vektorová funkce  $\mathbf{p}$  (nám známou) transformací do polárních souřadnic, viz obr. 70. Integrál (12.36.1) bychom mohli počítat tak, že bychom v něm nejdříve provedli substituci pomocí vektorové funkce  $\mathbf{h}$  a potom substituci do polárních souřadnic. Tímto způsobem vypočítáte daný integrál sami.

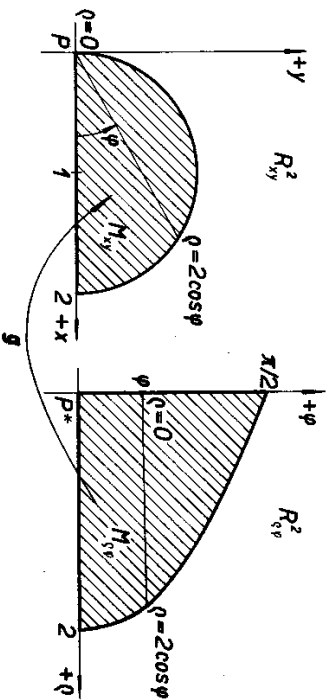
My provedeme obě substituce „najednou“, tj. použijeme k substituci vektorovou funkci  $\mathbf{g}$  danou rovnicemi (12.36.3). Její Jacobián v bodě  $(\varrho, \varphi)$ , jak můžete snadno ověřit, je  $J(\varrho, \varphi) = a b \varrho$  (je to součin Jacobiánu vektorových funkcí  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{p}$  v příslušných bodech, srov. s větou 9.116 a pozn. 9.117). Podle vzorce (12.29.3) můžeme psát:

$$\begin{aligned} \iint_{M_{xy}} y \, dx \, dy &= \iint_{M_{\varrho\varphi}} h \varrho \sin \varphi |ab \varrho| \, d\varrho \, d\varphi = \\ &= ab^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \varrho^2 \sin \varphi \, d\varrho \, d\varphi = \frac{ab^2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \, d\varphi = \frac{2}{3} ab^2. \end{aligned} \quad (10)$$

### 12.37. Příklad. Vypočítáme dvojný integrál

$$\iint_{M_{xy}} \sqrt{(4-x^2-y^2)} \, dx \, dy, \quad (12.37.1)$$

kde  $M_{xy} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2x \wedge y \geq 0\}$ .



Obr. 71. K příkladu 12.37

<sup>10)</sup> V tomto příkladě vektorová funkce  $\mathbf{g}$  na úsečce prostoru  $\mathbb{R}^2$  o krajních bodech  $(0, 0)$ ,  $(0, 2\pi)$  „zlobí“. Celou tuto úsečku zobrazuje do počátku  $P$  prostoru  $\mathbb{R}_x^2$  a v bodě  $(0, 0)$  má nulový Jacobián. Jak jsme se zmínili v pozn. 12.32, je vypočtený výsledek přesto správný. Kdybychom chtěli postupovat zcela přesně, odstranili bychom z integračního oboru  $M_{xy}$  „malé“ „okolí“ zmíněné úsečky, jak je naznačeno v obr. 70, integrovali bychom na zbývající části integračního oboru (tam by již byly všechny předpoklady věty 12.30 splněny) a provedli bychom limitu přechodu pro „zmenšující se“ vyznamnou část. Podobně bychom mohli precizovat výpočty i v jiných analogických příkladech (i u trojného integrálu).

**Řešení.** Snadno zjistíme, že  $M_{xy}$  je uzavřený půlkruh, který je zakreslený v levé části obr. 71. Tento půlkruh je (v podstatě) množina takového typu jako v levé části obr. 68. Podle pozn. 12.34 bude tedy vhodné použít substituci do polárních souřadnic (dokonce i integrovaná funkce se touto substitucí „zjednoduší“).<sup>11)</sup> Při označení z obr. 68 máme:  $\alpha = 0$ ,  $\beta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\varrho_1(\varphi) = 0$ ,  $\varrho_2(\varphi) = 2 \cos \varphi$  [rovnice kružnice  $x^2 + y^2 = 2x$  v polárních souřadnicích, jak snadno vypočítáme dosazením z (12.33.2), totiž je  $\varrho = 2 \cos \varphi$ ]. Použijeme-li postupně vzorce (12.29.3) (kde  $\mathbf{g}$  chápeme jako transformaci do polárních souřadnic) a (12.23.1), můžeme psát:

$$\begin{aligned} \iint_{M_{xy}} \sqrt{(4-x^2-y^2)} \, dx \, dy &= \iint_{M_{\varrho\varphi}} \sqrt{(4-\varrho^2 \cos^2 \varphi - \varrho^2 \sin^2 \varphi)} \, \varrho \, d\varrho \, d\varphi = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2 \cos \varphi} \sqrt{(4-\varrho^2)} \, \varrho \, d\varrho \, d\varphi \quad * \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_0^{4 \sin^2 \varphi} - \frac{1}{2} \sqrt{t} \, dt \right] d\varphi = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ -\frac{1}{3} t^{3/2} \right]_{t=4 \sin^2 \varphi}^{t=4} d\varphi = \\ &= \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \varphi) \, d\varphi = \\ &= \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi - \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 \varphi) \sin \varphi \, d\varphi \quad ** \\ &= \frac{4}{3} \pi + \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - u^2) \, du = \\ &= \frac{4}{3} \pi + \frac{8}{3} \left[ u - \frac{1}{3} u^3 \right]_{u=1}^{u=0} = \frac{4}{3} \pi - \frac{16}{9}. \end{aligned}$$

\*: Ve „vnitřním“ integrálu jsme použili substituci  $t = 4 - \varrho^2$ .  
 \*\*: Ve druhém integrálu jsme použili substituci  $u = \cos \varphi$ .  $\square$

**12.38.** Poznámka. V příkladech se většinou právě části obrázků 66 až 71 nekreslí (my jsme je kreslili, aby chom substituci ve dvojném integrálu vysvětlili co nejnázorněji). Obvykle se meze ve dvojnásobném integrálu, který obdržíme po použití Fubiniovy věty na dvojný integrál získaný příslušnou substitucí „vyčtou“ přímo z levých částí těchto obrázků. Například v levé části obr. 71 je naznačeno, že při každém pevném  $\varphi$  z intervalu  $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$  „probíhá“ proměnná  $\varrho$  interval  $\langle 0, 2 \cos \varphi \rangle$ .

<sup>11)</sup> Bude nás ovšem (podobně jako v příkl. 12.36) „zlobit“ počátek  $P$ , což ale, jak jsme již několikrát zdůraznili, nevedí.

Cvičení k článku 12F

1. Pomocí substituce do polárních souřadnic vypočítejte dvojité integrály:

- a)  $\iint_M (2-x-3y) dx dy$ , kde  $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ ;
- b)  $\iint_M \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy$ , kde  $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$ ;
- c)  $\iint_M (x+1) dx dy$ , kde  $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4y\}$ .

2. Pomocí substituce do zobecněných polárních souřadnic vypočítejte dvojité integrály

$$\iint_M (9x^2 + 4y^2 + 4) dx dy,$$

$$\text{kde } M = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1 \right\}.$$

3. Pomocí vhodné substituce vypočítejte dvojný integrál

$$\iint_M \frac{x}{y} dx dy,$$

$$\text{kde } M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \leq y \leq 2x \wedge x^2 \leq y \leq 2x^2\}. \text{ (Návod: Vyděte z rovnice } y/x = u, y/x^2 = v.)$$

Výsledky cvičení:

- 1. a)  $8\pi$ ; b)  $\pi/6$ ; c)  $4\pi$ .
- 2.  $132\pi$ .
- 3.  $9/16$ .

12G. NĚKTERÉ APLIKACE DVOJNÉHO INTEGRÁLU

12.39. Obsah rovinného obrazce. Již v kap. 6 (heslo 6.117) jsme se zmínili o některých problémech při přesném zavádění pojmu obsahu rovinného obrazce. Přečtěte si heslo 6.117 znovu. Jestliže nyní budeme místo rovinný obrazec říkat měřitelná množina ( $V \in \mathbf{R}^2$ ) a místo obsah (Jordanova) míra, bude vše v pořádku. Přesvědčte se sami, že požadavky 1 až 5, které jsme v hesle 6.117 na pojem obsahu kladli, budou splněny.<sup>12)</sup> Z úvah v čl. 12C a 12D vyplývá, že míra (tj. obsah) měřitelné množiny (tj. rovinného obrazce)  $M \subset \mathbf{R}^2$  se vypočte pomocí vzorce

$$\mu(M) = \iint_M dx dy. \quad (12.39.1)$$

<sup>12)</sup> Při důkazu tvrzení, že obsahy dvou shodných rovinných obrazců se sobě rovnají, provede v integrálu (12.39.1) substituci pomocí příslušné shodnosti transformace a užije skutečnosti (dokáže ji), že absolutní hodnota Jacobianu shodnosti transformace je v každém bodě rovna jedné. Přitom každou shodnostní transformaci v  $\mathbf{R}^2$  lze složit z translace (případně „nulové“), rotace (případně „nulové“) a popřípadě souměrnosti podle vhodné přímky (viz kap. 3, heslo 3.104).

12.40. Příklad. Vypočítejte obsah množiny (12.36.2), viz obr. 70 (tj. „vnitřku půlelipsoidu“).

Řešení. Při označení z příkl. 12.36 můžeme psát:

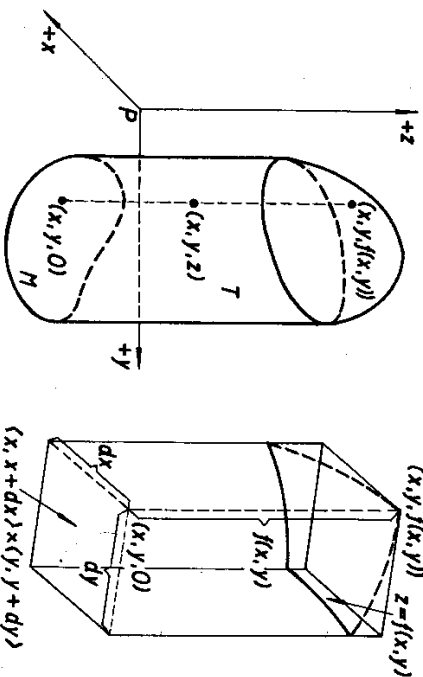
$$\begin{aligned} \mu(M_{xy}) &= \iint_{M_{xy}} dx dy = \iint_{M_{xy}} |adb\theta| d\theta d\varphi = \\ &= ab \int_0^\pi \int_0^1 [\varrho d\varrho] d\varphi = \frac{ab}{2} \int_0^\pi d\varphi = \frac{1}{2} \pi ab. \quad \square \end{aligned}$$

12.41. Objem válcového tělesa. Necht  $M \subset \mathbf{R}^2$  je uzavřená měřitelná oblast a  $f$  spojitá nezáporná funkce definovaná na  $M$ . Uvažujme válcové těleso

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : (x, y) \in M \wedge 0 \leq z \leq f(x, y)\}, \quad (12.41.1)$$

viz obr. 72. Vycházíme-li (podobně jako v kap. 6) z intuitivní (středoškolské) představy o pojmu objemu, vyplývá z definice dvojného integrálu pro objem  $V$  válcového tělesa  $T$  tento vzorec:

$$V = \iint_M f(x, y) dx dy. \quad (12.41.2)$$



Obr. 72. K objemu  $V$  válcového tělesa  $T$

Obr. 73. K „historickému odvození“ vzorce pro výpočet objemu válcového tělesa

Názorné „historické odvození“ vzorce (12.41.2) je velmi podobné „historickému odvození“ vzorce (6.118.1) pro výpočet obsahu křivočarého lichoběžníka (viz heslo 6.123): Vycházíme z „historické definice“ dvojného integrálu uvedeného v hesle 12.29. Rozdělme oblast  $M$  na nekonečně mnoho „nekonečně malých“ dvojných intervalů. Část tělesa  $T$  nad intervalem  $\langle x, x+dx \rangle \times \langle y, y+dy \rangle$  chápeme jako kvádr o rozměrech  $dx, dy, f(x, y)$ , viz obr. 73. Objem tohoto kvádru je roven číslu  $f(x, y) dx dy$ . „Sečteme-li“ všech nekonečně mnoho těchto „nekonečně malých“ čísel, získáme vzorec (12.41.2).

V následující části 12.11 této kapitoly se budeme zabývat měřitelnými množinami v  $\mathbf{R}^3$ . Budeme-li pak (podobně jako v této části kapitoly obsah rovinného obrazce) objem tělesa chápat jako míru měřitelné množiny v  $\mathbf{R}^3$ , bude vzorec (12.41.2) naprosto samozřejmostí.

**12.42. Příklad.** Vypočítáme objem tělesa v  $\mathbf{R}^3$  ohraničeného plochami o rovnicích  $y = x^2, y = x, z = 0, z = x^2 + y^2$ .

Řešení. Jde zřejmě o válcové těleso (12.41.1), kde

$$M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \geq x^2 \wedge y \leq x\}, \quad f(x, y) = x^2 + y^2$$

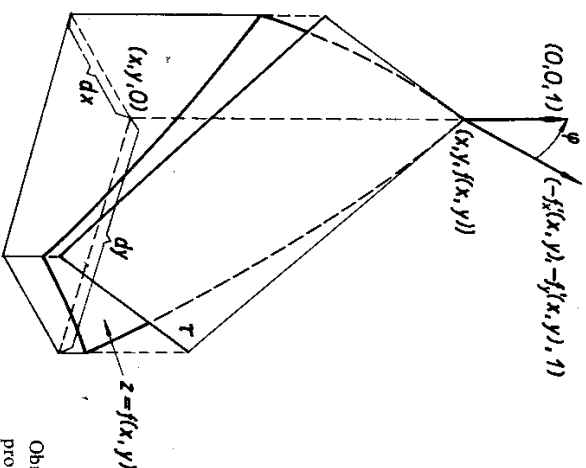
(množina  $M$  je zakreslena v obr. 62). Jeho objem  $V$  vypočítáme pomocí vzorce (12.41.2). Použijeme-li výsledek příkl. 12.25, můžeme psát, že

$$V = \iint_M (x^2 + y^2) dx dy = \frac{3}{35}. \quad \square$$

**12.43. Obsah plochy.** Necht'  $M \subset \mathbf{R}^2$  je uzavřená měřitelná oblast. Necht'  $G \subset \mathbf{R}^2$  je otevřená množina taková, že  $M \subset G$ . Necht'  $f$  je funkce definovaná na  $G$ , která je na  $G$  třídy  $C^1$ . Potom pro obsah  $P$  grafu funkce  $f$  uvažované na oblasti  $M$  platí vzorec:

$$P = \iint_M \sqrt{\{1 + [f'_x(x, y)]^2 + [f'_y(x, y)]^2\}} dx dy \quad (12.43.1)$$

(opět vycházíme z intuitivní představ o pojmu obsahu plochy). Integrál v (12.43.1) zřejmě existuje, neboť je to dvojný integrál spojitě funkce na uzavřené měřitelné množině.



Obr. 74. K „historickému odvození“ vzorce pro výpočet obsahu plochy

Naznačíme intuitivní „historické odvození“ vzorce (12.43.1): Vycházíme opět z „historické definice“ dvojného integrálu z hesla 12.29. Rozdělme oblast  $M$  na nekonečně mnoho „nekonečně malých“ dvojměrných intervalů. Graf funkce  $f$  „nad“ intervalem  $\langle x, x + dx \rangle \times \langle y, y + dy \rangle$  nahradíme příslušnou částí též roviny  $\tau$  sestojené k tomuto grafu v bodě  $(x, y, f(x, y))$ ; tj. jistým rovnoběžníkem (viz obr. 74). Z elementární geometrie vyplývá, že obsah tohoto rovnoběžníka je roven číslu

$$dx dy (\cos \varphi)^{-1}, \quad (12.43.2)$$

kde  $\varphi$  je odchylka roviny  $\tau$  a souřadnicové roviny  $P_{xy}$  čili odchylka směrových vektorů normál těchto rovin

$$(-f'_x(x, y), -f'_y(x, y), 1), \quad (0, 0, 1)$$

[souřadnice prvního vektoru jsme ve shodě s větou 11.80 získali parciálním derivováním implicitní rovnice  $z - f(x, y) = 0$  dané plochy]. Vypočítáme-li  $\cos \varphi$  pomocí vzorce (3.75.1) pro odchylku dvou (geometrických) vektorů, můžeme číslo (12.43.2) upravit takto:

$$dx dy (\cos \varphi)^{-1} = dx dy \left( \frac{0 + 0 + 1}{\sqrt{[-f'_x(x, y)]^2 + [-f'_y(x, y)]^2 + 1}} \right)^{-1} = \sqrt{\{1 + [f'_x(x, y)]^2 + [f'_y(x, y)]^2\}} dx dy.$$

„Sečteme-li“ všech nekonečně mnoho těchto „nekonečně malých“ čísel, získáme vzorec (12.43.1).

**12.44. Příklad.** Vypočítáme obsah plochy

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x + y + z = 2 \wedge x^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathbf{R}^3.$$

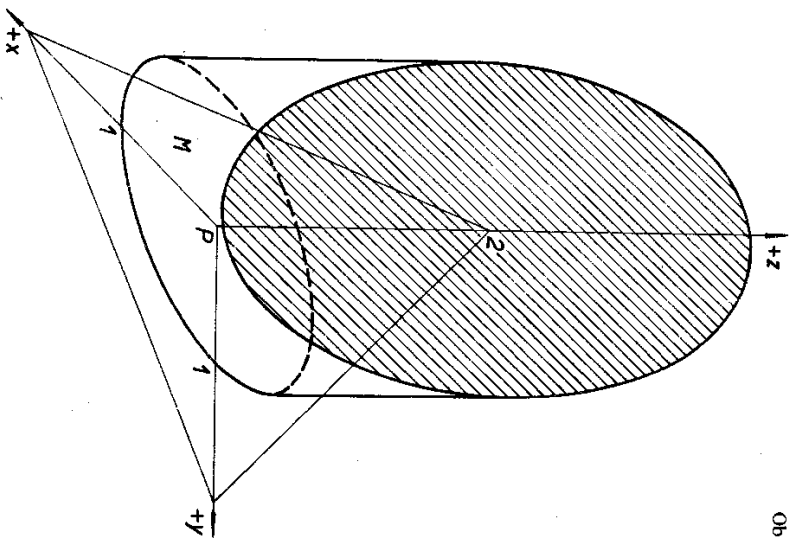
Řešení. Jde o část roviny  $x + y + z = 2$  (čili grafu funkce  $f$  dané rovnicí  $z = 2 - x - y$ ) nad uzavřeným kruhem  $M$  ležícím v souřadnicové rovině  $P_{xy}$ , který má střed v počátku a poloměr roven jedné (viz obr. 75). Obsah  $P$  dané plochy vypočítáme pomocí vzorce (12.43.1) [v našem případě je  $f'_x(x, y) = -1$ ]:

$$P = \iint_M \sqrt{\{1 + [-1]^2 + [-1]^2\}} dx dy = \sqrt{3} \iint_M dx dy = \sqrt{3}\pi$$

(poslední integrál je roven obsahu kruhu  $M$ , tedy číslu  $\pi$ ).  $\square$

**12.45. Hmotnosti a hustota tenké desky.** Necht'  $M \subset \mathbf{R}^2$  je měřitelná množina. Označme  $\mathcal{H}(M)$  systém všech měřitelných podmnožin množiny  $M$ . Předpokládáme, že na  $\mathcal{H}(M)$  je definována tzv. množinová reálná funkce  $m$ , která každé množině  $N \in \mathcal{H}(M)$  přiřazuje nezáporné číslo  $m(N)$ . Necht' množinová funkce  $m$  je *additivní*, tj. necht' pro každé dvě množiny  $N_1, N_2 \in \mathcal{H}(M)$ , pro které  $m(N_1 \cap N_2) = 0$ , platí  $m(N_1 \cup N_2) = m(N_1) + m(N_2)$ .

V takovém případě (ve shodě s fyzikální představou) můžeme množinu  $M$  považovat za hmotnou tenkou desku a pro každé  $N \in \mathcal{H}(M)$  číslo  $m(N)$  za hmotnost množiny  $N$ . V praxi bude  $M$  většinou elementární oblast (bude, z jednoho kusu, nebude obsahovat izolované body apod.).



Pro každou množinu  $N \in \mathcal{M}(M)$ , pro niž  $\mu(N) \neq 0$ , budeme číslo

$$h(N) = \frac{m(N)}{\mu(N)}$$

nazývat *příměrnou (plošnou) hustotou množiny N*. Řekneme, že množina  $M$  má v bodě  $(x_0, y_0) \in M$  (plošnou) hustotu  $h(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$ , jestliže platí

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{m[O((x_0, y_0), \delta) \cap M]}{\mu[O((x_0, y_0), \delta) \cap M]} = h(x_0, y_0)^{13)}$$

tj. jestliže limita vlevo existuje a rovná se číslu  $h(x_0, y_0)$ .<sup>14)</sup>

Hmotnou tenkou desku  $M$  nazýváme *homogenní*, jestliže má v každém svém bodě hustotu rovnou témuž číslu (tj. jestliže její hustota je popsána konstantní funkcí definovanou na  $M$ ).

<sup>13)</sup> Připomeňme, že  $O((x_0, y_0), \delta)$  je okolí bodu  $(x_0, y_0)$  o poloměru  $\delta$ .

<sup>14)</sup> Hustotu  $h(x_0, y_0)$  by bylo možné definovat obecněji než jsme to udělali my. Naše definice např. „nezachycuje“ body  $(x_0, y_0)$ , jejichž některé okolí má s množinou  $M$  práhnik míry nula.

Pro výpočet hmotnosti  $m(M)$  uzavřené měřitelné množiny  $M \subset \mathbb{R}^2$ , jejíž hustota je popsána spojitou nezápornou funkcí  $h$  definovanou na  $M$ , platí vzorec (12.45.1)

$$m(M) = \iint_M h(x, y) dx dy.$$

Intuitivní („historické“) odvození vzorce (12.45.1): Rozdělme množinu  $M$  na nekonečně mnoho „nekonečně malých“ dvojrozměrných intervalů. „Hmotný“ interval  $\langle x, x + dx \rangle \times \langle y, y + dy \rangle$  považujeme za homogenní s konstantní hustotou rovnou číslu  $h(x, y)$ . Hmotnost tohoto intervalu pak je

$$h(x, y) dx dy.$$

$$(12.45.2)$$

„Sečteme-li“ všech nekonečně mnoho těchto „nekonečně malých“ čísel, obdržíme vzorec (12.45.1).

**12.46. Příklad.** Vypočteme hmotnost  $m(M)$  hmotné tenké desky

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2x \wedge y \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2,$$

jejíž hustota je popsána funkcí  $h(x, y) = \sqrt{(4 - x^2 - y^2)}$ ,  $(x, y) \in M$ .

Řešení. Množina  $M$  je uzavřený půlkruh z levé části obr. 71. Její hmotnost vypočteme pomocí vzorce (12.45.1). Použijeme-li výsledek příkl. 12.37, můžeme psát, že

$$m(M) = \iint_M \sqrt{(4 - x^2 - y^2)} dx dy = \frac{4}{3} \pi - \frac{16}{9}. \quad \square$$

**12.47. Statické momenty tenké desky.** Necht' tenká deska  $M \subset \mathbb{R}^2$  je měřitelná uzavřená množina, jejíž hustota je popsána spojitou nezápornou funkcí  $h$  definovanou na  $M$ . Necht'  $p$  je přímka v  $\mathbb{R}^2$ . Potom *statický moment*  $S_p$  tenké desky  $M$  vzhledem k přímce  $p$  je dán vzorcem

$$S_p = \iint_M d((x, y), p) h(x, y) dx dy. \quad (12.47.1)$$

kde  $d((x, y), p)$  je tzv. *orientovaná vzdálenost bodu*  $(x, y)$  *od přímky*  $p$  [tj.  $d((x, y), p)$  je příslušná vzdálenost opatřená znaménkem plus, resp. minus, leží-li bod  $(x, y)$  v „kladné“, resp. „záporné“ polovině určené přímkou  $p$ ].

Intuitivní („historické“) odvození vzorce (12.47.1): Rozdělme množinu  $M$  na nekonečně mnoho „nekonečně malých“ dvojrozměrných intervalů. Hmotnost intervalu  $\langle x, x + dx \rangle \times \langle y, y + dy \rangle$  nahradíme (jako v hesle 12.45) číslem (12.45.2). Považujeme-li tento interval za bod  $(x, y)$  o hmotnosti (12.45.2), je jeho statický moment vzhledem k přímce  $p$  (jakožto součin jeho orientované vzdálenosti od přímky  $p$  a jeho hmotnosti) roven číslu

$$d((x, y), p) h(x, y) dx dy.$$

„Sečteme-li“ všech nekonečně mnoho těchto „nekonečně malých“ čísel, obdržíme vzorec (12.47.1).

Speciálně pro statický moment  $S_x$ , resp.  $S_y$  uvažované tenké desky vzhledem k ose  $x$ , resp. ose  $y$  platí:

$$S_x = \iint_M y m(x, y) dx dy, \quad (12.47.2)$$

$$\text{resp. } S_y = \iint_M x h(x, y) dx dy, \quad (12.47.3)$$

jak snadno odvodíme ze vzorce (12.47.1).

**12.48.** Těžšíště tenké desky. Uvažujme tenkou desku z hesla 12.47. Její těžšíště definujeme jako hmotný bod  $T \in \mathbf{R}^2 (\equiv \mathbf{E}_2)$ , který má tyto dvě vlastnosti:

- Hmotnost hmotného bodu  $T$  je rovna hmotnosti tenké desky  $M$ .
- Statické momenty hmotného bodu  $T$  vzhledem k osám souřadnic jsou rovny příslušným statickým momentům tenké desky  $M$ .

Z požadavků a), b) jednoduše vyplývá, že

$$T = (S_y/m(M), S_x/m(M)), \quad (12.48.1)$$

kde  $S_x$ , resp.  $S_y$  je statický moment tenké desky  $M$  vzhledem k ose  $x$ , resp. ose  $y$  [vypočíte se pomocí vzorce (12.47.2), resp. (12.47.3)] a  $m(M)$  hmotnost tenké desky  $M$  [vypočíte se pomocí vzorce (12.45.1)].

**12.49.** Poznámka. Lze ukázat, že statický moment těžšíště hmotné tenké desky vzhledem k libovolné přímce je roven příslušnému statickému momentu desky. V jistém smyslu se tenká deska chová stejně jako její těžšíště.

**12.50.** Příklad. Určeme souřadnice těžšíště homogenní hmotné tenké desky

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \wedge y \geq 0 \right\},$$

kde  $a, b > 0$ .

Řešení.  $M$  je „vnitřek půlelipsy“ zakreslený v levé části obr. 70. Ze souměrnosti homogenní desky  $M$  podle osy  $y$  vyplývá, že její těžšíště  $T = (x_T, y_T)$  leží na ose  $y$ , tj.  $x_T = 0$ . Vzhledem k (12.48.1) potřebujeme pro určení souřadnice  $y_T$  těžšíště vypočítat statický moment  $S_x$  vzhledem k ose  $x$  a hmotnost  $m(M)$  dané tenké desky. Předpokládejme, že její hustota je dána konstantní funkcí  $h(x, y) = k$ , kde  $k \in \mathbf{R}$ ,  $k > 0$ . Pomocí vzorců (12.47.2) a (12.45.1) a s použitím výsledků příkl. 12.36 a 12.40 vypočteme, že

$$S_x = \iint_M yk dx dy = \frac{3}{8}kab^2, \quad m(M) = \iint_M k dx dy = \frac{1}{2}k\pi ab.$$

Tedy

$$y_T = S_x/m(M) = 4b/(3\pi),$$

tj.

$$T = (x_T, y_T) = \left( 0, \frac{4b}{3\pi} \right).^{15)} \quad \square$$

<sup>15)</sup> Všimněte si, že souřadnice těžšíště homogenní desky nezávisí na konstantě  $k$  (což je ostatně samozřejmé).

**12.51.** Momenty setrvačnosti tenké desky. *Moment setrvačnosti hmotného bodu* vzhledem k přímce  $p$  se definuje jako součin hmotnosti tohoto bodu a čtverce jeho vzdálenosti od přímky  $p$ . Uvažujme hmotnou desku  $M$  z hesla 12.47 a přímku  $p$  v  $\mathbf{R}^2$ . Podobná úvaha jako v hesle 12.47 nás dovede k tomuto vzorci pro výpočet momentu setrvačnosti  $I_p$  tenké desky  $M$  vzhledem k přímce  $p$ :

$$I_p = \iint_M d^2(x, y, p) h(x, y) dx dy, \quad (12.51.1)$$

Odtud snadno vyplývají vzorce pro výpočet momentů setrvačnosti desky  $M$  vzhledem k osám souřadnic:

$$I_x = \iint_M y^2 h(x, y) dx dy, \quad (12.51.2)$$

$$I_y = \iint_M x^2 h(x, y) dx dy. \quad (12.51.3)$$

**12.52.** Příklad. Vypočteme momenty setrvačnosti vzhledem k osám souřadnic homogenní hmotné tenké desky

$$M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \geq x^2 \wedge y \leq x\},$$

jejíž hustota je v každém bodě rovna jedné.

Řešení. Množina  $M$  je zakreslena v obr. 62. Pomocí vzorců (12.51.2) a (12.51.3) podobnými výpočty jako v řešení příkl. 12.25 dostaneme:

$$I_x = \iint_M y^2 dx dy = \int_0^1 \left[ \int_{x^2}^x y^2 dy \right] dx = \frac{1}{28},$$

$$I_y = \iint_M x^2 dx dy = \int_0^1 \left[ \int_{x^2}^x x^2 dy \right] dx = \frac{1}{20}. \quad \square$$

Cvičení k článku 12G

- Vypočítejte obsah rovinného obrazce ( $\mathbf{R}^2$ ) ohraničeného křivkami:
  - $xy = 1, x^2 = y, y = 2, x = 0$ ;
  - $y = 0, x^2 + y^2 = 5$  a tečnou této kružnice sestrojenou v bodě (1, 2).

**2.** Dokažte, že ze vzorce (12.39.1) vyplývají tyto vzorce z kap. 6:

- vzorec (6.118.1) pro výpočet obsahu křivočarého jehoběžníka;
- vzorec (6.121.1) pro výpočet obsahu křivočaré výše.

**3.** Vypočítejte objem tělesa ( $\mathbf{R}^3$ ) ohraničeného plochami:

$$\text{a) } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, z = 0, y + z = 0 (z \geq 0);$$

$$\text{b) } z = x^2, y = 0, y + z = 2.$$

[Návod: V a) použijte zobeněné polární souřadnice, v b) při použití vzorce (12.41.2) navzájem zaměňte role proměnných  $y, z$ .]

**4.** Vypočítejte obsah plochy

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z = xy \wedge x^2 + y^2 \leq 4\} \subset \mathbf{R}^3.$$

5. Vypočítejte hmotnost tenké čtvercové desky se stranou jedna, jestliže její hustota je přímo úměrná vzdálenosti od průsečíku úhlopříček čtverce a ve vrcholech čtverce je rovna jedné.

6. Homogenní tenká deska má tvar výseče mezikružní s poloměry 1 a 3 a středovým úhlem velikosti  $\pi/3$ . Určete vzdálenost těžiště této desky od středu obou kružnic.

7. Dokažte, že ze vzorců (12.47.2) a (12.47.3) vyplývají vzorce pro výpočet statických momentů vzhledem k osám souřadnic homogenního křivočarého lichoběžníka s jednotkovou hustotou z kap. 6 (heslo 6.136).

8. Určete moment setrvačnosti vzhledem k ose  $x$  homogenní tenké desky  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 4 - x^2\}$ , jejíž hustota v každém bodě je rovna jedné.

Výsledky cvičení:

1. a)  $\frac{2}{3} + \ln 2$ ; b)  $5 - \frac{5}{2} \arcsin \frac{2}{\sqrt{5}}$ .
3. a) 12; b)  $\frac{32}{15} \sqrt{2}$ .
4.  $\frac{2}{3} \pi(5\sqrt{5} - 1)$ .
5.  $\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{12} \ln(3 + 2\sqrt{2})$ .
6.  $\frac{13}{2\pi}$ .
8.  $\frac{4096}{105}$ .

## 12 II TROJNÝ INTEGRÁL

V mnohých knihách jsou dvojný a trojný integrál studovány současně. My jsme to tak neudělali, protože si myslíme, že by tento přístup při prvním studiu těchto partií trochu znepráhloval situaci. Na druhé straně však teorii trojného integrálu vyložíme maximálně stručně, přičemž se často budeme dovolávat analogie s dvojným integrálem. Podrobně uvedeme jen některé definice, věty (např. Fubiniovu) a vzorce. Trojný integrál bude definován tak, aby měl opět, podobně jako jednorozměrný a dvojný integrál jistý geometrický a fyzikální význam. Některé jeho aplikace uvedeme v čl. 12M. Při čtení této části kapitoly listujte zároveň částí 12 I.

### 12H. TROJNÝ INTEGRÁL NA INTERVALU

**12.53.** Definice. Necht' je dán trojrozměrný uzavřený interval

$$J = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle \times \langle e, g \rangle \subset \mathbb{R}^3. \quad (12.53.1)$$

Necht'

$$D_x = (x_0, \dots, x_m), \quad \text{resp. } D_y = (y_0, \dots, y_n), \quad \text{resp. } D_z = (z_0, \dots, z_p),$$

je dělení intervalu  $\langle a, b \rangle$ , resp.  $\langle c, d \rangle$ , resp.  $\langle e, g \rangle$ . Potom uspořádanou trojici  $D = (D_x, D_y, D_z)$  nazýváme *dělením intervalu J*. Každý trojrozměrný interval

$$J_{j,k} = \langle x_{j-1}, x_j \rangle \times \langle y_{k-1}, y_k \rangle \times \langle z_{k-1}, z_k \rangle, \quad (12.53.2)$$

kde  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $k \in \{1, \dots, p\}$  nazýváme *částičným intervalem dělení D*.

Necht'  $f$  je funkce definovaná a omezená na intervalu  $J$ . Označme  $m_{j,k}$ , resp.  $M_{j,k}$  infimum, resp. supremum funkce  $f$  na částičném intervalu (12.53.2) a  $\mu(J_{j,k})$  objem tohoto intervalu. Podobně jako v def. 12.2 definujeme dolní součet

$$L(f, D) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p m_{i,j,k} \mu(J_{i,j,k})$$

a horní součet

$$U(f, D) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p M_{i,j,k} \mu(J_{i,j,k})$$

funkce  $f$  na intervalu  $J$  při dělení  $D$ .

Čísła

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \sup_D L(f, D),$$

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \inf U(f, D)$$

(D „prohňá“ všechna možná dělení intervalu  $J$ ) nazýváme (v tomto pořadí) *dolním Riemannovým integrálem* a *horním Riemannovým integrálem* funkce  $f$  na intervalu  $J$ . Jestliže se obě tato čísla sobě rovnají, říkáme, že *funkce  $f$  je (Riemannovsky) integrovatelná na intervalu  $J$*  a píšeme  $f \in R(J)$ . Pro obě čísla pak užíváme společně označení

$$\iiint_J f(x, y, z) dx dy dz$$

a toto číslo nazýváme *trojným* (nebo *trojrozměrným*) *Riemannovým integrálem* funkce  $f$  na intervalu  $J$ .

**12.54.** Poznámky.

**12.54.1.** Pro trojný integrál platí tvrzení analogická jednotlivým tvrzením pro dvojný integrál, která jsme uvedli v pozn. 12.4. Fubiniovu větu pro trojný integrál funkce na intervalu nebudeme uvádět. Je zvláštním případem obecnějších verzí, které vyslovíme v čl. 12K.

**12.54.2.** Chcete-li postupovat rychleji, můžete si (podobně jako u dvojného integrálu) následující dva články prozrátím přečíst pouze orientačně (ovšem s tím, že si v čl. 12I podrobně přečtete pozn. 12.57.2) a postoupit k čl. 12K. V aplikacích se většinou setkáváte pouze s trojnými integrály spojitých funkcí na elementárních oblastech. Za definici trojného integrálu spojitě funkce na elementární oblasti vzhledem k rovině  $P_{xy}$  (viz pozn. 12.57.2) můžete (v případě, že zvolíte nabízený rychlejší postup) považovat vzorec (12.60.1) (podobně pro elementární oblasti vzhledem k rovině  $P_{yz}$  nebo  $P_{zx}$ ).

## 12I. MĚRITELNÉ MNOŽINY V $\mathbb{R}^3$

**12.55.** Definice. Necht  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . *Charakteristickou funkcí*  $\chi_\Omega$  množiny  $\Omega$  definujeme analogicky jako v def. 12.9. Zcela analogicky jako v def. 12.10 definujeme dále (*Jordanovskyy*) *měřitelnou množinu* (v  $\mathbb{R}^3$ ) a její (*Jordanova*) *míru*. Míra  $\mu(\Omega)$  měřitelné množiny  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  je tedy dána vzorcem

$$\mu(\Omega) = \iiint_J \chi_\Omega(x, y, z) dx dy dz,$$

kde  $J \subset \mathbb{R}^3$  je nějaký uzavřený interval obsahující množinu  $\Omega$ .<sup>19)</sup>

**12.56.** Poznámka. Pro měřitelné množiny v  $\mathbb{R}^3$  bychom mohli vyslovit tvrzení analogická jednotlivým tvrzením z pozn. 12.11.

<sup>19)</sup> Někdy se místo míry množiny  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  říká objem množiny  $\Omega$ , což je v souladu se skutečností, že pojem míry v  $\mathbb{R}^3$  je zobecněním střediskořského pojmu objemu tělesa.

Významnou roli v  $\mathbb{R}^3$  hrají (opět) tzv. *množiny míry nula*. Pro ně platí analogie hesla 12.12. Speciálně: Graf (jako podmnožina prostoru  $\mathbb{R}^3$ ) spojitě funkce dvou proměnných, jejíž definičním oborem je uzavřená měřitelná množina v  $\mathbb{R}^2$ , má (v  $\mathbb{R}^3$ ) míru nula.

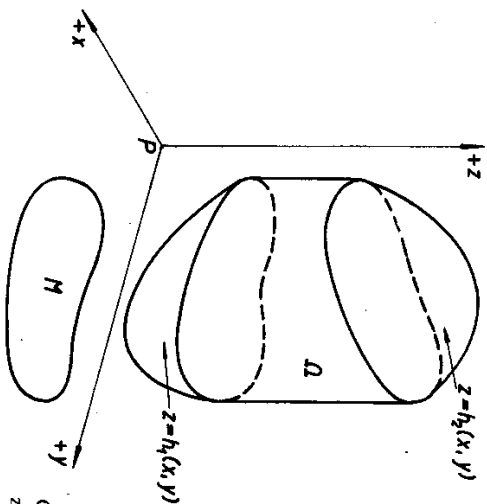
Rovněž hesla 12.13 a 12.14 mají svou analogii v trojrozměrném případě.

**12.57.** Důležité měřitelné množiny v  $\mathbb{R}^3$ .

**12.57.1.** Necht  $M \subset \mathbb{R}^2$  je uzavřená měřitelná množina v  $\mathbb{R}^2$ . Necht  $h_1, h_2$  jsou funkce dvou proměnných definované a spojitě na množině  $M$ , přičemž pro každé  $(x, y) \in M$  je  $h_1(x, y) \leq h_2(x, y)$ . Potom množina

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in M \wedge h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)\} \quad (12.57.1)$$

(viz obr. 76) je měřitelná v  $\mathbb{R}^3$ .



Obr. 76. Měřitelná množina  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  z hesla 12.57.1

**12.57.2.** Je-li  $M$  elementární oblast prvního nebo druhého druhu v  $\mathbb{R}^2$  (viz obr. 60 nebo 61) a platí-li pro každý vnitřní bod  $(x, y)$  množiny  $M$   $h_1(x, y) < h_2(x, y)$ , nazýváme množinu (12.57.1) *elementární (uzavřenou) oblastí vzhledem k rovině  $P_{xy}$* . Podobně hovoříme o *elementární (uzavřené) oblasti vzhledem k rovině  $P_{yz}$* , resp.  *$P_{zx}$ . Elementární (uzavřenou) oblasti (v  $\mathbb{R}^3$ )* pak nazýváme uzavřenou oblast, kterou lze vyjádřit jako sjednocení konečné mnoha elementárních oblastí vzhledem k rovině  $P_{xy}$  nebo  $P_{yz}$  nebo  $P_{zx}$ , přičemž průnik každých dvou z těchto oblastí je množina míry nula. Každá elementární oblast v  $\mathbb{R}^3$  je samozřejmě měřitelná množina.