6. Nekonečné řady funkcí

V šesté kapitole pokračujeme ve studiu nekonečných řad. Nejprve odvozujeme základní tvrzení o součinech řad (která později využijeme při odvozování základních vlastností exponenciální a goniometrických funkcí). Poté zavádíme pojmy nekonečné řady funkcí a její bodové a stejnoměrné konvergence.

V dalším odstavci probíráme mocninné řady, které jsou základním příkladem nekonečných řad funkcí. Pomocí mocninných řad pak v posledním odstavci definujeme některé elementární funkce: exponenciální a logaritmickou funkci a goniometrické funkce.

6.1 Násobení řad. Podívejme se neprve na násobení mnohočlenů $x = x_1 + \ldots + x_n$ a $y = y_1 + \ldots + y_n$. Podle distributivního zákona máme pro

$$\begin{aligned} n &= 1 \quad xy = x_1y_1, \\ n &= 2 \quad xy = (x_1y_1) + (x_1y_2 + x_2y_2 + x_2y_1) \end{aligned}$$

(oproti předchozímu součinu přibyl součet $x_1y_2 + x_2y_2 + x_2y_1$). Pro dva trojčleny dostaneme

$$n = 3 \quad xy = (x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_2 + x_2y_1) + (x_1y_3 + x_2y_3 + x_3y_3 + x_3y_2 + x_3y_2)$$

(tedy oproti násobení dvojčlenů přibyl součet $x_1y_3 + x_2y_3 + x_3y_3 + x_3y_2 + x_3y_2$). Jistě bychom nyní byli schopni napsat které členy přibudou násobíme-li dva n-členy, toho za chvíli využijeme.

Obdobně postupujeme i v případě součinu nekonečných řad. Uvažme dvě řady $\sum x_n$ a $\sum y_n$ s posloupnostmi částečných součtů (s_n) a (t_n). Máme

$$\begin{aligned} s_nt_n &= (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) \\ &= x_1y_1 + \\ &\quad + x_1y_2 + x_2y_2 + x_2y_1 \\ &\quad + x_1y_3 + x_2y_3 + x_3y_3 + x_3y_2 + x_3y_1 \\ &\quad \vdots \\ &\quad + x_1y_n + x_2y_n + \ldots + x_{n-1}y_n + x_ny_n + \ldots + x_ny_{n-1} + x_ny_{n-2} + \ldots + x_ny_1. \end{aligned} \tag{6.1.1}$$

Posloupnost $(u_n) = (s_nt_n)$ je tedy posloupností částečných součtů řady $\sum z_n$, kde

$$\begin{aligned} z_n &= x_1y_n + x_2y_n + \ldots + x_{n-1}y_n + x_ny_n + \\ &\quad \ldots + x_ny_{n-1} + x_ny_{n-2} + \ldots + x_ny_1. \end{aligned} \tag{6.1.2}$$

Jestliže nyní existují limity $s = \lim s_n$ a $t = \lim t_n$, pak existuje i limita $\lim u_n$ a je rovna st. Dokázali jsme tedy

Věta 6.1. *Nechť členy řady $\sum z_n$ jsou určeny předpisem (6.1.2). Konvergují-li řady $\sum x_n$ a $\sum y_n$, pak konverguje i řada $\sum z_n$ a platí*

$$\sum z_n = \sum x_n \cdot \sum y_n. \tag{6.1.3}$$

Řada $\sum z_n$ z předchozí věty se nazývá *(obyčejný) součin řad* $\sum x_n$ *a* $\sum y_n$.

Věta 6.2. *Nechť řada $\sum \overline{z}$, je tvořena součiny x_iy_j, $i, j \in \mathbb{N}$ uspořádanými v libovolném pořadí. Pak jestliže řady $\sum x_n$ a $\sum y_n$ absolutně konvergují, konverguje absolutně i řada $\sum \overline{z}_n$ a platí*

$$\sum \overline{z} = \sum x_n \cdot \sum y_n. \tag{6.1.4}$$

D ů k a z. Tvrzení, že řada $\sum \overline{z}$ konverguje při libovolném uspořádání členů $x_i y_i$ plyne z absolutní konvergence řad $\sum x_n$, $\sum y_n$ a věty 5.27.

Zbývá tedy dokázat vztah (6.1.4). Protože, jak už víme, uspořádání členů řady $\sum \overline{z}_n$ její součet nezmění, předpokládejme, že členy posloupnosti $(\overline{z}_n)$ jsou uspořádány takto:

$$\begin{aligned}(z_n) = (&x_1 y_1,\\ &x_1 y_2, x_2 y_2, x_2 y_1,\\ &x_1 y_3, x_2 y_3, x_3 y_3, x_3, y_2, x_3 y_1,\\ &\ldots).\end{aligned}$$

Jelikož řady $\sum x_n$ a $\sum y_n$ konvergují absolutně, pak podle věty 6.1 konverguje i řada $\sum z_n$, tvořená členy

$$\begin{aligned}z_n = {} & |x_1||y_n| + |x_2||y_n| + \ldots + |x_{n-1}||y_n| + |x_n||y_n|\\ & + \ldots + |x_n||y_{n-1}| + |x_n||y_{n-2}| + \ldots + |x_n||y_1|\end{aligned}$$

Posloupnost částečných součtů této řady je vybranou posloupností z posloupnosti částečných součtů řady $\sum |\overline{z}_n|$, která má nezáporné členy a konverguje. Řada $\sum \overline{z}_n$ tedy konverguje absolutně. Tím je věta dokázána.

Důsledek 6.3. *Jestliže řady $\sum x_n$ a $\sum y_n$ absolutně konvergují, pak absolutně konverguje i řada $\sum z_n$, kde $z_n = x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \ldots + x_n y_1$ a platí $\sum z_n = \sum x_n \cdot \sum y_n$.*

Řada $\sum z_n$ z předchozího tvrzení se nazývá *Cauchyho součin řad* $\sum x_n$ a $\sum y_n$.

Uvažujme dvě geometrické řady $\sum p^n$ a $\sum q^n$, Cauchyho součin řad snadněji pochopíme uspořádáme-li si všechny součiny $p^i q^j$ kde $i, j \in \mathbb{N}$ do nekonečně velké „tabulky“

$$\begin{array}{lllll} pq & p^2q & p^3q & p^4q & \ldots\\ pq^2 & p^2q^2 & p^2q^3 & \ldots & \\ pq^3 & p^3q^2 & \ldots & & \\ pq^4 & \ldots & & & \\ \vdots & & & & \end{array}$$

Cauchyho součin $\sum q^n \sum p^n$, porovnej s definicí, je řada $\sum z_n$ jejíž členy jsou $z_1 = pq$ (člen v levém horním rohu), $z_2 = p^2q + pq^2$ (druhá diagonála zprava do leva), dále $z_3 = p^3q + p^2q + pq^3$ (třetí diagonála), až obecně $z_n = p^n q + \ldots + pq^n$.

To může být velmi výhodné, jak uvidíme u mocninných řad. Ale již nyní, pokud by $p = q$, dostaneme $z_n = np^{n+1}$.

6.2 Nekonečné řady funkcí. Nechť $Y \subset X \subset \mathbb{R}$. Uvažujeme posloupnost (f_n) funkcí $f_n : X \to \mathbb{R}$. Symbol $\sum f_n$ nazýváme *nekonečnou řadou funkcí, určenou posloupností* (f_n). Posloupnost (h_n) funkcí $h_n : X \to \mathbb{R}$, definovanou předpisem

$$h_n = f_1 + f_2 + \ldots + f_n,$$

nazýváme *posloupností částečných součtů řady* $\sum f_n$. Jestliže je posloupnost částečných součtů (h_n) na množině Y bodově konvergentní, nazýváme řadu $\sum f_n$ *bodově konvergentní na množině* Y. Obor konvergence posloupnosti (h_n) nazýváme *oborem konvergence řady* $\sum f_n$. Je-li $Z \subset X$ obor konvergence řady $\sum f_n$, pak funkci $f : Z \to \mathbb{R}$ takovou, že pro každé $x \in Z$ platí $f(x) = \sum f_n(x)$ nazýváme *součtem řady* $\sum f_n$. Je-li posloupnost (h_n) na množině Y stejnoměrně konvergentní, nazýváme řadu $\sum f_n$ *stejnoměrně konvergentní na množině* Y.

Nechť $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a $f_n : X \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = n/x^n$. Najděme obor konvergence řady $\sum f_n$. Nechť $x \in X$. Použijeme podílové kritérium (věta 5.21) na řadu $\sum n/|x|^n$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)|x|^n}{|x|^{n+1} n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n|x|} = \frac{1}{x}.$$

Je-li tedy $1/|x| < 1$, řada $\sum n/|x|^n$ konverguje, a tedy řada $\sum n/x^n$ konverguje absolutně. Je-li $1/|x| > 1$ řada $\sum n/|x|^n$, a tedy ani řada $\sum n/x^n$ nesplňuje nutnou podmínku konvergence. Řady $\sum n/1^n$ a $\sum n/(-1)^n$ divergují. Oborem konvergence řady $\sum f_n$ je tedy množina $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Stejného výsledku lze dosáhnout pomocí odmocninového kritéria.

Věta 6.4 (Cauchy-Bolzanovo kritérium). *Řada $\sum f_n$ konverguje stejnoměrně na množině Y, právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje číslo n_0 takové, že pro každé $n_2 \geq n_1 \geq n_0$ a $x \in Y$ platí*

$$|f_{n_1} + \ldots + f_{n_2}| < \varepsilon. \tag{6.2.1}$$

D ů k a z. Stačí použít větu 5.8 na posloupnost částečných součtů řady $\sum f_n$.

Jestliže v (6.2.1) položíme $n_1 = n_2$, dostaneme

Důsledek 6.5 (nutná podmínka stejnoměrné konvergence řady funkcí). *Jestliže řada $\sum f_n$ konverguje stejnoměrně na Y, pak posloupnost (f_n) konverguje stejnoměrně k nule na Y.*

Důsledek 6.6. *Jestliže řada $\sum f_n$ konverguje stejnoměrně na Y, pak posloupnost $(\sum_{k=n}^{\infty} f_k)$ konverguje stejnoměrně k nule na Y.*

Věta 6.7. *Jestliže řada $\sum |f_n|$ konverguje na Y, pak i řada $\sum f_n$ konverguje na Y a platí $|\sum f_n| \leq \sum |f_n|$.*

D ů k a z. Pro každé $n_1 \geq n_2$ a $x \in Y$ platí

$$|f_{n_1}(x) + \ldots + f_{n_2}(x)| \leq |f_{n_1}(x)| + \ldots + |f_{n_2}(x)|$$

První část tvrzení je tedy důsledkem věty 6.4. Druhou část dokazuje následující výpočet:

$$\begin{aligned}\left|\sum f_n(x)\right| &= |\lim_{n\to\infty}(f_1(x) + \ldots + f_n(x))| \\ &\leq \lim_{n\to\infty}(|f_1(x)| + \ldots + |f_n(x)|) = \sum |f_n(x)|.\end{aligned}$$

Jestliže řada $\sum |f_n|$ konverguje stejnoměrně na Y (což podle věty 6.7 znamená, že řada $\sum f_n$ na Y rovněž stejnoměrně konverguje) říkáme, že řada na Y konverguje *absolutně stejnoměrně*.

Věta 6.8. *Nechť (f_n) a (g_n) jsou posloupnosti reálných funkcí na X. Jestliže $(|f_n|) \leq (g_n)$ a řada g_n konverguje stejnoměrně na Y, pak řada f_n konverguje absolutně stejnoměrně na Y.*

D ů k a z. Řada $\sum g_n$ splňuje na Y podmínku Cauchyho-Bolzanova kritéria (věta 6.4). Ke každému $\varepsilon > 0$ tedy existuje číslo n_0 takové, že pro každé $n_2 \geq n_1 \geq n_0$ platí $|g_{n_1}| + \ldots + |g_{n_2}| < \varepsilon$. Jelikož $(|f_n|) \leq (g_n)$, řada $\sum f_n$ rovněž na Y splňuje podmínku Cauchyho-Bolzanova kritéria . Řada $\sum f_n$ tedy na Y konverguje absolutně stejnoměrně.

Jsou-li funkce g_n konstantní, plyne stejnoměrná konvergence řady $\sum |g_n|$ z její bodové konvergence (ověřte!). V tomto případě je použití uvedené věty velmi výhodné (porovnej s příkladem 2).

Následující důležité tvrzení je bezprostředním důsledkem věty 5.9.

Věta 6.9. *Nechť funkce f_n jsou spojité na množině Y a řada $\sum f_n$ stejnoměrně konverguje k funkci f na Y. Pak funkce f je na množině Y spojitá.*

D ů k a z. Stačí aplikovat větu 5.9 na posloupnost částečných funkcí řady $\sum f_n$ (jak?).

Důsledek 6.10. *Nechť řada $\sum f_n$ stejnoměrně konverguje na množině Y k funkci f a nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje limita $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = a_n$. Pak řada $\sum a_n$ konverguje, limita $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existuje a platí*

$$\sum a_n = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

6.3 Mocninné řady. Výsledky předchozího odstavce aplikujeme na důležitý typ řad funkcí, na mocninné řady.

Nechť $X = \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ a (a_n) je posloupnost reálných čísel. Definujme posloupnost funkcí $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\begin{aligned} f_1 &= a_1, \\ f_n &= a_n(x - x_0)^{n-1}, \ \text{pro } n > 1. \end{aligned} \tag{6.3.1}$$

Řada $\sum f_n$ se nazývá *mocninná řada*, číslo x_0 její *střed*, posloupnost a_n její *posloupnost koeficientů*.

Pro $n = 1$ a $x = x_0$ výraz $a_n(x - x_0)^{n-1}$ nemá smysl (číslo 0^0 není definováno). Proto bylo nutné funkci f_1 definovat zvlášť. Na druhou stranu, abychom se napříště vyhnuli nepříjemnostem s definováním nadvakrát, domluvíme se takto: kdykoli napíšeme mocninnou řadu $\sum a_n(x - x_0)^{n-1}$, budeme mít na mysli řadu, jejíž první člen je konstantní funkce a_1.

Věta 6.11. *Obor konvergence mocninné řady $\sum a_n(x - x_0)^{n-1}$ je neprázdný interval konečné délky se středem v x_0 nebo množina $\mathbb{R}$. V prvním případě je poloměr intervalu roven číslu $1/p$, kde*

$$p = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}, \tag{6.3.2}$$

ve druhém případě je $p = 0$.

V každém vnitřním bodě svého oboru konvergence mocninná řada konverguje absolutně.

D ů k a z. Zvolme $x \in \mathbb{R}$. Je-li $x = x_0$, řada $\sum a_n(x - x_0)^{n-1}$ absolutně konverguje. Předpokládejme, že $x \neq x_0$ a označme $p = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Z limitního odmocninového kritéria (věta 5.23) plyne, že je-li

$$|x - x_0|p < 1,$$

řada $\sum a_n(x - x_0)^{n-1}$ absolutně konverguje a je-li

$$|x - x_0|p > 1,$$

pak tato řada diverguje. Odtud plyne, že oborem konvergence řady $\sum a_n(x - x_0)^{n-1}$ je interval se středem v x_0 a poloměrem $1/p$ (jestliže $0 < p < \infty$) nebo interval $(-\infty, \infty)$ (je-li $p = 0$) nebo interval $[x_0, x_0]$ (je-li $p = \infty$). Konvergence v koncových bodech (tedy kdy $|x - x_0|p = 1$) je pro tvrzení nepodstatná.[1)]

Obor konvergence mocninné řady $\sum a_n(x - x_0)^{n-1}$ se nazývá *interval konvergence* této řady a jeho poloměr *poloměr konvergence* této řady (je-li intervalem konvergence množina $\mathbb{R}$, je tedy poloměr konvergence řady roven ∞).

Uvažujme řadu

$$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x + 1)^{n+1}. \tag{6.3.3}$$

Najdeme interval konvergence této řady. Pro $x \in \mathbb{R}$ aplikujeme odmocninové kritérium na řadu

$$\sum \frac{|x + 1|^{n+1}}{n} \qquad \text{(řada absolutních hodnot z (6.3.3))}$$

(je to řada nezáporných reálných čísel). Platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x + 1|^{n+1}}{n}} = \lim_{n\to\infty} |x + 1| \sqrt[n]{\frac{|x + 1|}{n}} = |x + 1|.$$

Naše řada tedy konverguje absolutně pro $|x + 1| < 1$, tedy pro $x \in (-2, 0)$ a diverguje pro $|x + 1| > 1$, tedy pro $x \in (-\infty, -2) \cup (0, \infty)$. Poloměr konvergence této řady je tedy 1. Zbývá vyšetřit konvergenci řady pro $x = -2$ a

---

[1)] To znamená, že se může stát, že oborem konvergence bude z jedné strany otevřený a z druhé strany uzavřený interval (porovnej s příkladem za následujícím odstavcem).

$x = 0$. V prvním případě se jedná o harmonickou řadu, která diverguje, ve druhém o alternující řadu, o níž snadno pomocí Leibnizova kritéria zjistíme, že konverguje. Intervalem konvergence naší mocninné řady je tedy interval $(-2, 0]$. Stejného výsledku lze dosáhnout i pomocí podílového kritéria.

Věta 6.12. *Mocninná řada* $\sum a_n(x - x_0)^{n-1}$ *s poloměrem konvergence* r *konverguje stejnoměrně na intervalu* $[x_0 - p, x_0 + p]$ *pro každé kladné* $p < r$.
D ů k a z. Podle věty 6.11 řada $\sum a_n p^{n-1}$ konverguje absolutně. Navíc pro každý prvek $x \in [x_0 - p, x_0 + p]$ platí $|a_n||x - x_0|^{n-1} \le |a_n|p^{n-1}$. Tvrzení tedy plyne z věty 6.8.[2)]

Důsledek 6.13. *Součet mocninné řady* $\sum a_n(x - x_0)^{n-1}$ *je funkce spojitá ve všech vnitřních bodech jejího intervalu konvergence.*
D ů k a z. Plyne z předchozí věty a z věty 6.9.

6.4 Exponenciální funkce a logaritmus. Uvažujme mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$. Pomocí podílového kritéria snadno zjistíme (viz. příklad 5), že oborem konvergence této řady je $\mathbb{R}$. Můžeme tedy definovat funkci $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$[3)] předpisem

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{6.4.1}$$

Tato funkce se jmenuje *exponenciální funkce*. Klademe $\mathrm{e} = \exp(1)$. Číslo e nazýváme *Eulerovo číslo*.[4)]

Je-li $\mathrm{e} = \exp(1)$, jen pouhým využitím definice funkce exp dostaneme, že $\sum_{n=0}^{\infty} 1/n! = \mathrm{e}$.

Následující tvrzení shrnuje základní vlastnosti funkce exp.

Věta 6.14. *1. Funkce* exp *je spojitá.*
2. Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$, *platí* $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$.
3. Funkce exp *je rostoucí.*
4. $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$ *a* $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$.
D ů k a z. 1. Plyne z důsledku 6.13.
2. Máme

$$\begin{aligned}
\exp(x) \cdot \exp(y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{y^n}{n!} + \frac{xy^{n-1}}{1!(n-1)!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \right) && \text{(důsledek 6.3 součet po diagonálách)} \\
&= \sum \frac{1}{n!} \left(\binom{n}{0} y^n + \binom{n}{1} xy^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n} x^n \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x + y)^n && \text{(binomická věta)} \\
&= \exp(x + y).
\end{aligned}$$

3. Jestliže $x < y$, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $x^n/n! < y^n/n!$. Řady pro $\exp(x)$ a $\exp(y)$ přitom mají nezáporné členy, což znamená, že $\exp(x) < \exp(y)$. Tím jsme dokázali, že funkce exp je rostoucí na intervalu $[0, \infty)$. Ze vztahu $\exp(x) \cdot \exp(-x) = 1$ (který plyne z bodu 2.) nyní snadno odvodíme (jak?), že funkce exp je rostoucí i na intervalu $(-\infty, 0]$.

4. Podle bodu 3. je $\exp(1) > \exp(0)$, neboli $\mathrm{e} > 1$. Podle bodu 2. je $\exp(n) = \mathrm{e}^n$. Odtud plyne, že $\lim_{n\to\infty} \exp(n) = \infty$. Z bodu 3. ovšem plyne, že také $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$. Hodnota druhé limity plyne z toho, že $\exp(-x) = 1/\exp(x)$.

---

2) Zde je vidět, jak je výhodné ohraničení konstantními funkcemi (jsou to funkce $a_n p^{n-1}$).

3) To, že jsme mohli vzít za obor hodnot interval $(0, \infty)$ ukáže následující věta.

4) Časem se ukáže, že $\sum_{n=0}^{\infty} 1/n! = \lim(1 + 1/n)^n$. Tím bude odstraněna nestrovnalost, vzniklá dvojím definováním čísla e.

Důsledek 6.15. *1. Pro každé celé číslo k platí* $\exp(k) = e^k$.
2. $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$.
3. Funkce exp *je homeomorfismus.*
D ů k a z. 1. Plyne ihned z bodu 2. předchozí věty.
2. Plyne z bodů 3. a 4. předchozí věty.
3. Plyne z bodů 1. a 3. předchozí věty, z věty 4.21 a z bodu 2. tohoto důsledku.

Inverzní funkci k funkci exp nazýváme *přirozený logaritmus* a označujeme symbolem ln. Následující tvrzení je jednoduchým důsledkem vlastností exponenciální funkce.

Věta 6.16. *1. Funkce* ln *je spojitá.*
2. Pro každé $x_1, x_2 \in (0, \infty)$ *je* $\ln(x_1x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$.
3. Funkce ln *je rostoucí.*
4. $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ *a* $\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$.
D ů k a z. 1. Plyne z bodu 3. důsledku 6.15.
2. Označme $y_1 = \ln(x_1)$, $y_2 = \ln(x_2)$. Máme

$$\ln(x_1x_2) = \ln(e^{y_1}e^{y_2}) = \ln(e^{y_1+y_2}) = y_1 + y_2 = \ln(x_1) + \ln(x_2).$$

3. Inverzní funkce k roustoucí funkci je vždy rostoucí (proč?).
4. Z věty 4.26 vyplývá že tyto limity existují (v $\overline{\mathbb{R}}$). Označíme-li $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = a$ a $\lim_{x\to\infty} \ln(x) = b$, máme podle věty 4.24

$$\lim_{x\to a} e^x = \lim_{y\to 0^+} e^{\ln(y)} = \lim_{y\to 0^+} \ln(y) = 0$$

což znamená, že $a = -\infty$. Podobně, z

$$\lim_{x\to b} e^x = \lim_{y\to\infty} e^{\ln(y)} = \lim_{y\to\infty} y = \infty$$

plyne, že $b = \infty$.

Nyní můžeme definovat exponenciální a logaritmickou funkci o libovolném základu. Pro libovolné číslo $a > 0$ definujeme funkci $\exp_a : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ předpisem

$$\exp_a(x) = e^{x\ln(a)}. \tag{6.4.2}$$

Funkce $\exp_a$ se nazývá *exponenciální funkce o základu a*. Následující věta shrnuje její základní vlastnosti (všechny snadno vyplývají z vlastností funkcí exp a ln; proto necháme její důkaz na čtenáři).

Věta 6.17. *1. Funkce* $\exp_a$ *je spojitá.*
2. Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ *platí* $\exp_a(x + y) = \exp_a(x) \cdot \exp_a(y)$.
3. Je-li $a \in (0, 1)$, *je funkce* $\exp_a$ *klesající. Pro* $a = 1$ *je konstantní a pro* $a > 1$ *rostoucí.*
4. Je-li $a \in (0, 1)$, *je* $\lim_{x\to\infty} \exp_a(x) = 0$ *a* $\lim_{x\to-\infty} \exp_a(x) = \infty$, *je-li* $a > 1$ *je* $\lim_{x\to\infty} \exp_a(x) = \infty$ *a* $\lim_{x\to-\infty} \exp_a(x) = \infty$

Důsledek 6.18. *1. Pro každé celé číslo k platí* $\exp_a(k) = a^k$.
2. Pro $a \neq 1$ *je* $\exp_a(\mathbb{R}) = (0, \infty)$.
3. Pro $a \neq 1$ *je* $\exp_a$ *homeomorfismus.*

Vzhledem k bodu 1. uvedeného důsledku je přirozené zavést označení $\exp_a(x) = a^x$ pro libovolné reálné číslo a. Ihned dostáváme

$$(a^x)^y = a^{xy}.$$

Nechť $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$. Inverzní funkce k funkci $\exp_a$ se nazývá *logaritmus o základu a* a označuje $\ln_a$. Základní vlastnosti této funkce si milý čtenář již snadno odvodí sám.

6.5 Goniometrické funkce. Podobně jako exponenciální funkce se definují i funkce goniometrické. Funkce *sinus* $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ a *kosinus* $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ jsou definovány předpisem

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \tag{6.5.1}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \tag{6.5.2}$$

(opět lze zjistit, že řady na pravé straně konvergují pro každé $x \in \mathbb{R}$, což nás opravňuje vzít za definiční obor $\mathbb{R}$; později se ukáže, že maximum a minimu těchto funkcí je -1 a 1, proto oborem hodnot může být interval $[-1, 1]$).

Základní vlastnosti goniometrických uvádí následující věta.

Věta 6.19. *1. Funkce* sin *a* cos *jsou spojité.*
2. Funkce sin *je lichá, funkce* cos *je sudá.*
3. Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ *platí*

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \qquad \textit{(součtový vzorec pro sinus)}$$

a

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y). \qquad \textit{(součtový vzorec pro kosinus)}$$

D ů k a z. 1. Plyne z důsledku 6.13.

2. Plyne z tvrzení 3. věty 2.15.

3. Dokážeme nejprve součtový vzorec pro sinus. Vyjádřeme si výrazy $\sin(x)\cos(y)$ a $\cos(x)\sin(y)$ jako cauchyovy součiny řad z (6.5.1) a (6.5.2) (tedy použijeme důsledek 6.3, můžeme, řady jsou přece absolutně konvergentní (ověřte!)). Máme

$$\begin{array}{ccccc}
\multicolumn{5}{c}{\sin(x)\cos(y)} \\
x & -\frac{x^3}{3!} & \frac{x^5}{5!} & \frac{x^7}{7!} & \cdots \\
-\frac{xy^2}{2!} & \frac{x^3y^2}{3!2!} & -\frac{x^5y^2}{5!2!} & \cdots & \\
\frac{xy^4}{4!} & -\frac{x^3y^4}{3!4!} & \cdots & & \\
-\frac{xy^6}{6!} & \cdots & & & \\
\vdots & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
\multicolumn{5}{c}{\sin(y)\cos(x)} \\
y & -\frac{y^3}{3!} & \frac{y^5}{5!} & -\frac{y^7}{7!} & \cdots \\
-\frac{x^2y}{2!} & \frac{x^2y^3}{2!3!} & -\frac{x^2y^5}{2!5!} & \cdots & \\
\frac{x^4y}{4!} & -\frac{x^4y^3}{4!3!} & \cdots & & \\
-\frac{x^6y}{2!} & \cdots & & & \\
\vdots & & & &
\end{array}$$

Vezmeme-li postupně z obou těchto tabulek nejprve první diagonály a sečteme je potom druhé a tak dále (to přece můžeme, jsou to absolutně konvergentní řady, porovnej s větou 5.27), dostaneme řadu

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a_n &= (x+y) - \left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x^2y}{2!} + \frac{xy^2}{2!} + \frac{y^3}{3!}\right) + \\
&\quad + \left(\frac{x^5}{5!} + \frac{x^4y}{4!} + \frac{x^3y^2}{3!2!} + \frac{x^2y^3}{2!3!} + \frac{xy^4}{4!} + \frac{y^5}{5!}\right) - \ldots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{x^{2n+1-k}y^k}{(2n+1-k)!k!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} x^{2n+1-k} y^k
\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+y)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin(x+y)$$

Obdobným způsobem lze dokázat i součtový vzorec pro kosinus ten ale přenecháváme tobě čtenáři.

Důsledek 6.20. *1. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí* $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ *a* $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.
2. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.
D ů k a z. 1. Plyne ze součtových vzorců sinu a kosinu.

2. V součtovém vzorci pro kosinus položíme $y = -x$, využijeme bodu 2. předchozí věty a toho, že $\cos(0) = 1$. Potom tedy dostáváme

$$1 = \cos(x - x) = \cos(x)\cos(-x) - \sin(x)\sin(-x) = \cos^2(x) + \sin^2(x).$$

Lze dokázat, ale zatím to není v našich silách, že takto definované funkce sin a cos mají téže vlastnosti, s nimiž se čitatel v předchozím studiu setkal. Zopakujme pouze, že funkce sin a cos jsou periodické a polovinu jejich periody budeme značit π.[5] Další vlastnosti goniometrických funkcí zde již nezmiňujeme, spoléháme se na čtenářovy dřívější znalosti, o dalších goniometrických funkcích se zde již jen zmíníme.

Definujeme funkci $\tan : \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, tak že položíme $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$, tuto funkci nazveme *tangens*. Obdobně definujeme funkci *kotangens* $\operatorname{cotan} : \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, $\operatorname{cotan}(x) = \cos(x)/\sin(x)$.

6.6 Cyklometrické funkce.

Inverzní funkce ke zúženým funkcím $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$, $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$, $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ a $\operatorname{cotan} : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ nazýváme *arkus sinus*, *arkus kosinus*, *arkus tangens* a *arkus kotangens*, značíme je arcsin, arccos, arctan a arccotan.

Vlastnosti těchto funkcí laskavě ponecháváme k prozkoumání čtenáři.

Příklady

1. *Najděte obor konvergence řady $\sum f_n$, jestliže $f_n(x) = (x-2)^n/n$.*
Řešení: Použijeme odmocninové kritérium na řadu $\sum |f_n|$

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x-2|^n}{n}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{|x-2|^n}}{\sqrt[n]{n}} = \frac{|x-2|}{1}.$$

Z odmocninového kritéria dostáváme, že pro $|x-2| < 1$ řada $\sum |f_n|$ konverguje a podle věty 5.25 konverguje i $\sum f_n$. Pro $|x-2| > 1$ řada $\sum |f_n|$ a tudíž i $\sum f_n$ nesplňuje nutnou podmínku konvergence. Zbývá nám ověřit případy $x = 3$ a $x = 1$. Pro $x = 3$ jde o řadu $\sum 1/n$, tedy o harmonickou řadu, která, jak jistě víme, nekonverguje. Pro $x = 1$ jde o řadu $\sum n(-1)^n/n$, tato řada je konvergentní. Lze se o tom přesvědčit Leibnitzovým kritériem. Celkově, oborem konvergence naší řady je interval $[1, 3)$.

2. *Dokažte, že řada $\sum f_n$ stejnoměrně konverguje na I, jestliže $f_n(x) = \frac{1}{e^{nx} n}$ a $I = [1, \infty)$.*
Řešení: Pokusíme se k řadě $\sum |f_n|$ najít stejnoměrně konvergentní majorantu. Nejlépe se pro tento účel hodí řada konstantních funkcí (pro ty přece stejnoměrná konvergence plyne z konvergence, proč?). Každou funkci $|f_n|$ shora ohraničíme konstantní funkcí $g_n(x) = \sup_{x\in[1,\infty)} |f_n(x)|$. Protože každá z funkcí $|f_n|$ je na intervalu $[1, \infty)$ klesající (opravdu $|f_n|(x) = f_{n(x)} = 1/n \cdot 1/e^{nx}$, funkce $1/n$ je

[5] Známé Ludolfovo číslo. Pomocí součtu nekonečné řady jej lze definovat $\pi = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

konstantní a e^{nx} rostoucí), nabývá f_n svého maxima v bodě 1. Proto $g_n(x) = f_n(1) = 1/ne^n$, řada $\sum 1/ne^n$ je konvergentní (ověřte odmocninovým kritériem!) a řada $\sum g_n$, tudíž i $\sum f_n$, je stejnoměrně konvergentní.

3. *Ukažte, že součet řady funkcí* $\sum f_n$, *kde* $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{5x^2}{n^2}$ *je spojitá funkce.*

Řešení: Je jasné, že každá z funkcí f_n je spojitá, pokud se nám podaří ukázat, že řada $\sum f_n$ konverguje stejnoměrně na $[0, 1]$, pak i její součet bude nutně spojitá funkce. Stejně jako v předchozím příkladě se pokusíme funkce f_n shora ohraničit konstantními funkcemi. Jelikož $f_n \geq 0$ a pro každé $x \in [0, 1]$ platí $5x^2 \leq 5$, vezmeme posloupnost (g_n) konstantních funkcí, $g_n(x) = 5/n^2$, pro které platí $f_n \leq g_n$ a protože $\sum g_n = \sum 5/n^2$ konverguje (ověřte podílovým kritériem!), podařilo se nám řadu funkcí $\sum f_n$ shora ohraničit stejnoměrně konvergentní řadou funkcí $\sum g_n$.

4. *Najděte obor konvergence mocninné řady se středem v* x_0 *a posloupností koeficientů* (a_n), *jestliže* $x_0 = 0$ *a* $a_n = n5^n$.
Řešení: Počítejme poloměr konvergence $r = 1/p$, kde $p = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n5^n|}$. Tedy

$$p = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n5^n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{5^n} = 1 \cdot 5.$$

Víme, že řada konverguje pro $x \in (x_0 - r, x_0 + r) = (-\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$, jak je tomu v koncových bodech musíme prozkoumat zvlášť. Pro $x = -\frac{1}{5}$, jde o řadu $\sum n5^n(-\frac{1}{5})^n = \sum(-1)^n$, která ale nesplňuje nutnou podmínku konvergence. Obdobně je tomu i pro $x = \frac{1}{5}$. Celkově dostáváme, že intervalem konvergence této řady je $(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$.

5. *Najděte obor konvergence řady* $\sum \dfrac{x^n}{n!}$.
Řešení: Využijeme limitního podílového kritéria. Počítejme

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{x^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0,$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$. Tedy oborem konvergence je $\mathbb{R}$.

Cvičení

1. Najděte obor konvergence řady $\sum f_n$, jestliže
   a) $f_n(x) = (3 - x)^n$; b) $f_n(x) = \dfrac{x(x+n)}{n}$;
   c) $f_n(x) = \dfrac{n!}{(x^2+1)(x^2+2)\dots(x^2+n)}$; d) $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{|x|}{x}\right)^n$;
   e) $f_n(x) = \ln^n(3x)$; f) $f_n(x) = \dfrac{\cos(x)}{e^{nx}}$.
2. Dokažte následující tvrzení: Je-li $\sum f_n$ konvergentní řada konstantních funkcí $f : X \to \mathbb{R}$, pak tato řada konverguje na X stejnoměrně.
3. Dokažte, že řada $\sum_{n=2}^{\infty} f_n$ stejnoměrně konverguje na I, jestliže
   a) $f_n(x) = \dfrac{1}{x^4+n^2}$, $I = \mathbb{R}$; b) $f_n(x) = x^2e^{-nx}$, $I = [0, \infty)$;
   c) $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^4x^2}$, $I = [0, \infty)$; d) $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2+e^{2x}}$, $I = \mathbb{R}$;

e) $f_n(x) = \dfrac{\cos(nx)}{2^n}, \quad I = \mathbb{R}$; f) $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n\sqrt{n}}, \quad I = \mathbb{R}$;

g) $f_n(x) = \ln\left(1 + \dfrac{x}{n\ln^2(n)}\right), I = (-1, 1)$; h) $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n + \sin(x)}, \quad I = [0, 2\pi]$;

i) $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x+n}, \quad I = (0, \infty)$; j) $f_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-n^2x^2}}{n^3}, \quad I = \mathbb{R}$.

4. Dokažte, že součet řady $\sum f_n$ je spojitá funkce, kde

a) $f_n(x) = \dfrac{\cos(nx)}{n(n+1)}$; b) $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n(n+1)}$; c) $f_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{n(n^2+1)}$.

5. Najděte obor konvergence mocninné řady se středem x_0 a posloupností koeficientů (a_n), jestliže

a) $x_0 = 0, \quad a_n = n5^n$; b) $x_0 = 0, \quad a_n = n!$;

c) $x_0 = 0, \quad a_n = \dfrac{3^n}{\sqrt{2^n}}$; d) $x_0 = 0, \quad a_n = 3 + (-1)^n$;

e) $x_0 = 2, \quad a_n = \dfrac{(-1)^n}{n + \sqrt{n}}$; f) $x_0 = 2, \quad a_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

6. Najděte obor konvergence řady $\sum f_n$, jestliže

a) $f_n(x) = \dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!(2n-1)}$; b) $f_n(x) = 3^{n^2}x^{n^2}$;

c) $f_n(x) = n!x^{n^2}$; d) $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{2^n}$;

e) $f_n(x) = (n-1)5^{n-1}n^{n-1}$; f) $f_n(x) = 10^{2n}(2x-3)^n$.

7. Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí následující rovnosti

a) $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$;

b) $\exp(1-1) = 1$.

8. Buď

$$a = \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Dokažte, že Cauchyho součin řad $a \cdot a$ nekonverguje. Obyčejný součin řad $a \cdot a$ ale konverguje (proč?). Jak je to možné?

9. Pomocí Cauchyho součinu spočtěte druhou mocninu řady $\sum(-\frac{1}{5})^{n-1}$.

Výsledky

1. a) $(2, 4)$; **b)** $\emptyset$; **c)** $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; **d)** $(-\infty, 0)$; **e)** $(1/3\mathrm{e}, \mathrm{e}/3)$; **f)** $\{-\pi/2 - \pi n \mid n = 0, 1, 2, \ldots\} \cup (0, \infty)$. **3. a)** Stejnoměrně konvergentní majoranta na I: $g_n(x) = 1/n^2$; **b)** $g_n(x) = \mathrm{e}^{-n}$; **c)** $g_n(x) = 1/2n^2$; **e)** $g_n(x) = 2^n$; **f)** $g_n(x) = n^{-3/2}$; **h)** $g_n(x) = (-1)^n/n$; **i)** $g_n(x) = (-1)^n/n$; **j)** $g_n(x) = 1/n^3$. **4. a)** Stejnoměrně konvergentní majoranta: $g_n(x) = 1/(n(n+1))$; **b)** $g_n(x) = 1/(n(n+1))$; **c)** $g_n(x) = 1/(n(n^2+1))$. **5. a)** $(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$; **b)** $\{0\}$; **c)** $(-\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2})$; **e)** $(1, 3)$; **f)** $(2-\mathrm{e}, 2+\mathrm{e})$. **6. b)** $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$; **c)** $\{0\}$; **d)** $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$; **e)** $\emptyset$; **f)** $(\frac{397}{200}, \frac{403}{200})$. **9.** $\frac{25}{36}$.