Matematická analýza I, II

Tento text vznikl rozšířením a doplněním textů Michala Krupky k jeho přednáškám z Matematické analýzy I z let 1998, 1999 a cvičebních textů Zdeňka Kočana a Michala Málka ze stejného období. Přednášel jsem podle něj přednášky z Matematické analýzy I a II ve školním roce 2004/2005.

Michal Málek

Matematická analýza I
přednášky M. Málka
cvičení A. Hakové a R. Otáhalové
Zimní semestr 2004/05

1. Množiny, zobrazení, relace

První kapitola je věnována základním pojmům teorie množin. Pojednává o množinách a základních množinových operacích (sjednocení, průnik, rozdíl), uspořádaných dvojicích a kartézských součinech. Pojem množiny a uspořádané dvojice je považován za intuitivně zřejmý a nedefinuje se (*naivní teorie množin*). Všechny ostatní pojmy, uvedené v této kapitole (a snad i v celém textu), jsou již definovány pomocí těchto základních pojmů.

Dále definujeme pojem *zobrazení* a uvádíme jeho základní vlastnosti (surjektivnost, injektivnost, bijektivnost). Definujeme kompozici zobrazení a inverzní zobrazení.

Závěr kapitoly je věnován binárním relacím, a to zejména ekvivalencím (je ukázán jejich vztah k rozkladům) a uspořádáním (je zaveden pojem uspořádané množiny a s ním související pojmy maxima a minima, suprema a infima a izotonního zobrazení).

1.1 Prvky a množiny. *Množina* je souhrn nějakých věcí. Patří-li věc x do množiny X, říkáme také, že v ní leží, že je jejím prvkem, nebo že množina X tuto věc obsahuje. V takovém případě píšeme $x \in X$. V opačném $x \notin X$.

Množina je jednoznačně určena, jsou-li jednoznačně určeny její prvky. Tuto skutečnost budeme mít na mysli, kdykoli budeme zavádět nějakou novou množinu.

Množina, neobsahující žádný prvek, se nazývá prázdná a značí $\emptyset$.

Množina, obsahující pouze prvek x, se značí takto:

$$\{x\} \tag{1.1.1}$$

Množina všech prvků množiny X, které mají vlastnost P, se značí takto:

$$\{x \in X \mid \text{má vlastnost } P\}. \tag{1.1.2}$$

Řekneme, že množina Y je *podmnožinou množiny* X (a množina X nadmnožinou množiny Y), jestliže každý prvek množiny Y je prvkem množiny X. Píšeme $Y \subset X$, nebo $X \supset Y$. Není-li množina Y podmnožinou množiny X, píšeme $Y \not\subset X$, nebo $X \not\supset Y$.

Množina z (1.1.2) je samozřejmě podmnožinou množiny X; každý její prvek totiž je prvkem množiny X. Naopak, libovolnou podmnožinu Y množiny X můžeme zapsat uvedeným způsobem. Platí totiž:

$$Y = \{x \in X \mid x \in Y\}. \tag{1.1.3}$$

Z definice podmnožiny okamžitě plyne, že každá množina je svou vlastní podmnožinou (skutečně, každý prvek množiny X je prvkem množiny X). Můžeme psát

$$X = \{x \in X \mid x \in X\}, \tag{1.1.4}$$

nebo třeba

$$X = \{x \in X \mid x = x\}. \tag{1.1.5}$$

Jak jsme již uvedli, množina je jednoznačně určena svými prvky. Proto platí i že z $X \subset Y$ a současně $Y \subset X$ plyne $X = Y$. Tohoto jednoduchého faktu budeme velmi často užívat.

Ve výrazu (1.1.2) nám nic nebrání zvolit za P vlastnost, kterou žádný prvek z X nemá. Dostaneme tak prázdnou množinu. Například

$$\emptyset = \{x \in X \mid x \neq x\}. \tag{1.1.6}$$

Prázdná množina je tedy podmnožinou každé množiny. Na tuto okolnost se stojí za to podívat podrobněji.

Především si uvědomme, že tvrzení „když A, tak B," je nepravdivé jedině v případě, že výrok A je pravdivý a výrok B nepravdivý (slib „když budeš hodný, koupím ti lízátko" tedy nesplníme jedině v případě, že děcko bylo hodné a my jsme mu lízátko stejně nekoupili). To znamená, že je-li výrok A nepravdivý, je celé tvrzení pravdivé, bez ohledu na výrok B (ověřte si to na již uvedeném výroku s lízátkem a na výroku „koho uštkne had, ten umře").

Tvrzení „když A, tak B" říká totéž, co tvrzení „ne A nebo B" („Když to uděláš, tak jednu dostaneš"; „Nedělej to nebo jednu dostaneš").

Zpět k prázdné množině: jestliže $x \in \emptyset$, pak $x \in X$ (všimněme si, že první výrok je nepravdivý!). Podle definice podmnožiny jsme tedy ukázali, že $\emptyset \subset X$.

Totéž můžeme říct takto: $x \notin \emptyset$ nebo $x \in X$, což je vždy pravda kvůli první polovině.

Ještě jinak řečeno — každý prvek prázdné množiny je prvkem množiny X; kdyby totiž nějaký nebyl, měla by prázdná množina prvky![1].

Někde se můžete setkat s tvrzením, že prvky prázdné množiny mají jakoukoliv vlastnost, skutečně jak jsme již řekli výrok pokud $x \in \emptyset$, pak x má vlastnost P (jinak řečeno $x \notin \emptyset$ nebo x má vlastnost P) platí ať je P jakákoli vlastnost.

Množině, jejímiž prvky jsou množiny, se někdy říká *systém* množin. Systém všech podmnožin množiny X se značí $\exp X$. Tedy $Y \in \exp X$, právě když $Y \subset X$. [2]

Systému všech podmnožin množiny X se také někdy říká potenční množina a v literatuře se také značí $\mathscr{P}(X)$ nebo 2^X.

Jak jsme již ukázali, pro každou množinu X platí $\emptyset \subset X$ a $X \subset X$. Máme tedy $\emptyset \in \exp X$ a $X \in \exp X$.

1.2 Základní množinové operace. Množina, tvořená těmi prvky, které leží alespoň v jedné z množin X a Y, se nazývá *sjednocení množin X a Y* a značí se $X \cup Y$ ($x \in X \cup Y$, právě když $x \in X$ nebo $x \in Y$).

Zavádíme značení $\{x, y\} = \{x\} \cup \{y\}$, $\{x, y, z\} = \{x\} \cup \{y\} \cup \{z\}$, atd. O množině zapsané tímto způsobem říkáme, že je zapsaná výčtem prvků.

Pro každou množinu X tedy například platí $\{\emptyset, X\} \subset \exp X$. Co je $\exp \emptyset$?

Uvědomte si, že pokud $x = y$, je množina $\{x, y\}$ jednoprvková. Této nepříjemnosti se v některých případech nevyhneme.

Množina tvořena těmi prvky, které leží v každé z množin X a Y, se nazývá *průnik množin X a Y* a značí se $X \cap Y$ ($x \in X \cap Y$, právě když $x \in X$ a $x \in Y$). Průnik množin lze tedy definovat takto:

$$X \cap Y = \{x \in X \mid x \in Y\}. \tag{1.2.1}$$

Množina, tvořená těmi prvky, které leží v množině X a neleží v množině Y, se nazývá *rozdíl množin X a Y* a značí se $X \setminus Y$ ($x \in X \setminus Y$, právě když $x \in X$ a $x \notin Y$). Platí tedy:

$$X \setminus Y = \{x \in X \mid x \notin Y\}. \tag{1.2.2}$$

Řekneme, že množiny X a Y jsou *disjunktní*, jestliže platí

$$X \cap Y = \emptyset. \tag{1.2.3}$$

Řekneme, že množiny systému množin S jsou po *dvou disjunktní*, jsou-li disjunktní každé dvě různé množiny systému S.

Věta 1.1. *Nechť X, Y, a Z jsou množiny. Platí*

$X \cup Y = Y \cup X$,	*(komutativita sjednocení)*
$X \cap Y = Y \cap X$,	*(komutativita průniku)*
jestliže $X \subset Y$ *a* $Y \subset Z$, *pak* $X \subset Z$,	*(tranzitivita inkluze)*
$X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$,	*(asociativita sjednocení)*
$X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$,	*(asociativita průniku)*

[1] Každý růžový nosorožec nosí brýle. Nebo snad ne? Který je nenosí?

[2] Řekneme-li „A, právě když B", myslíme tím, že výroky A a B buď oba platí nebo oba neplatí — jsou to ekvivalentní výroky (někdy také říkáme „A platí tehdy a jen tehdy, když platí B")

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z),$$
$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z). \qquad \textit{(distributivita)}$$

D ů k a z. Podle definice sjednocení je množina $X \cup Y$ množinou všech prvků, které leží v množině X nebo v množině Y. Množina $Y \cup X$ je definována stejně. Tím je dokázána komutativita sjednocení. Podobně se postupuje při důkazu komutativity průniku.

Dokážeme tranzitivitu inkluze. Předpokládejme, že platí $X \subset Y$ a $Y \subset Z$ a zvolme prvek $x \in X$. Pak (definice podmnožiny) určitě $x \in Y$. Jelikož $Y \subset Z$, pak (definice podmnožiny) $x \in Z$. Podívejme se co jsme udělali: Pro libovolný prvek $x \in X$ jsme ukázali, že $x \in Z$. To (podle definice podmnožiny) znamená, že $X \subset Z$.

Důkaz asociativity sjednocení a průniku přenecháme čtenáři. Z distributivních zákonů dokážeme pouze první.

Zvolme prvek $x \in X \cup (Y \cap Z)$. Podle definice sjednocení tento prvek leží v množině X nebo v množině $Y \cap Z$. Předpokládejme, že leží v množině X. Pak jistě leží v množině $X \cup Y$ (definice sjednocení) i v množině $X \cup Z$ (tatáž definice). Leží tedy i v jejich průniku. Leží-li prvek x v množině $Y \cap Z$, leží v každé z množin Y a Z. Proto leží v $X \cup Y$ i v $X \cup Z$. Leží tedy i v průniku těchto množin. Tím jsme dokázali, že $X \cup (Y \cap Z) \subset (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$.

Zvolme nyní prvek $x \in (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$. Podle definice průniku tento prvek leží v každé z množin $X \cup Y$ a $X \cup Z$. Leží-li v množině X, leží i v množině $X \cup (Y \cap Z)$ (definice sjednocení). Neleží-li v množině X, musí ležet v každé z množin X a Y, leží tedy v jejich průniku, a tedy i v množině $X \cup (Y \cap Z)$. Tím jsme dokázali, že $(X \cup Y) \cap (X \cup Z) \subset X \cup (Y \cap Z)$.

Výraz $(X \cup Y) \cup Z$ označujeme $X \cup Y \cup Z$. Díky asociativitě sjednocení platí i $X \cup Y \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$. Podobně klademe $X \cap Y \cap Z = (X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$.

Nyní zobecníme sjednocení a průnik množin na systémy množin. Nechť S je neprázdný systém množin. *Sjednocením systému S* nazýváme množinu, tvořenou těmi prvky, které leží alespoň v jedné množině systému S. Značíme ji $\cup S$. *Průnikem systému S* nazýváme množinu, tvořenou těmi prvky, které leží v každé množině systému S. Označení: $\cap S$.

Platí tedy: $x \in \cup S$, právě tehdy když existuje množina $X \in S$ taková, že $x \in X$; $x \in \cap S$, právě když pro každou množinu $X \in S$ platí $x \in X$.

Jsou-li množiny systému S po dvou disjunktní, pak $\cap S = \emptyset$. Opak ale pro každý systém neplatí.

Jak si snadno ověříte, je-li $S = \{X, Y\}$, pak $\cup S = X \cup Y$ a $\cap S = X \cap Y$.

Uspořádaná dvojice objektů x a y je objekt, který se značí (x, y) a má následující vlastnost:

$$(x, y) = (x', y'), \text{ právě když } x = x' \text{ a } y = y'.$$

Kartézský součin množin X a Y je množina všech uspořádaných dvojic (x, y) takových, že $x \in X$ a $y \in Y$. Značí se $X \times Y$.

Věta 1.2. *Pro libovolné množiny X, Y, X', Y' platí:*

$$X \times Y = \emptyset, \text{ právě když } X = \emptyset \text{ nebo } Y = \emptyset; \tag{1.2.4}$$
$$(X \times Y) \cup (X' \times Y) = (X \cup X') \times Y; \tag{1.2.5}$$
$$(X \times Y) \cap (X' \times Y') = (X \cap X') \times (Y \cap Y'). \tag{1.2.6}$$

Jestliže $X \times Y \neq \emptyset$, pak

$$X' \times Y' \subset X \times Y, \text{ právě když } X' \subset X \text{ a } Y \subset Y'. \tag{1.2.7}$$

D ů k a z. První tvrzení vlastně říká, že $X \times Y \neq \emptyset$, právě když $X \neq \emptyset$ a $Y \neq \emptyset$. Nyní už je situace jasná: první tvrzení totiž znamená, že existuje dvojice (x, y), zatímco druhé, že existuje prvek $x \in X$ a prvek $y \in Y$, což jsou ekvivalentní výroky.

Dokažme nyní vztah (1.2.5). Jestliže dvojice (x, y) leží ve sjednocení množin $X \times Y$ a $X' \times Y$, pak určitě leží v jedné z nich. Leží-li v množině $X \times Y$, znamená to, že $x \in X$ a $y \in Y$. Jelikož z prvního vztahu plyne $x \in X \cup X'$, dostáváme $(x, y) \in (X \cup X') \times Y$. Leží-li v množině $X' \times Y$, stejným postupem vyvodíme, že opět $(x, y) \in (X \cup X') \times Y$. Tím jsme ukázali, že $(X \times Y) \cup (X' \times Y) \subset (X \cup X') \times Y$. Opačnou inkluzi dokážeme úplně stejně.

Zbylé dva vztahy necháme na čtenáři.

1.3 Zobrazení. Nechť X a Y jsou množiny $Z \subset X \times Y$ taková podmnožina, že ke každému prvku $x \in X$ existuje právě jeden prvek $y \in Y$, splňující podmínku $(x, y) \in Z$. Množina Z spolu s množinami X a Y se nazývá *zobrazení z množiny X do množiny Y*. Množina X se nazývá *definiční obor*, množina Y *obor hodnot*, množina Z *graf* tohoto zobrazení. Označíme-li toto zobrazení f, píšeme $X = \mathrm{Dom}\, f$, $Y = \mathrm{Codom}\, f$ a $Z = \mathrm{Gr}\, f$.

Z uvedené definice vyplývá, že zobrazení f a g se rovnají, právě když

$$\mathrm{Dom}\, f = \mathrm{Dom}\, g,\ \ \mathrm{Codom}\, f = \mathrm{Codom}\, g \ \text{ a } \ \mathrm{Gr}\, f = \mathrm{Gr}\, g. \tag{1.3.1}$$

Zkratka pro „zobrazení f z množiny X do množiny Y“ je $f : X \to Y$. Je-li $x \in X$, pak prvek $y \in Y$ takový, že $(x, y) \in \mathrm{Gr}\, f$ (tento prvek je podle definice zobrazení jediný, takže nemůže dojít k omylu), označujeme symbolem $f(x)$ a nazýváme *hodnotou zobrazení f v bodě x*, nebo *obrazem bodu x při zobrazení f*[3].

Rozdíl mezi zobrazením a grafem zobrazení je jemný: podle naší definice je obojí tatáž množina, ale v prvním případě kromě grafu máme zafixovány ještě definiční obor a obor hodnot.

Chceme-li zadat zobrazení, musíme tedy zadat tři věci: definiční obor, obor hodnot a graf. Definiční obor a obor hodnot (společně s označením zobrazení) se obvykle zadávají zároveň zápisem $f : X \to Y$.

Pro libovolnou množinu X definujeme zobrazení $\mathrm{id}_X : X \to X$ tak, že pro každé $x \in X$ položíme

$$\mathrm{id}_X(x) = x \tag{1.3.2}$$

Toto zobrazení se nazývá *identické zobrazení* (nebo *identita*) množiny X.

Identitu množiny X jsme tedy označili symbolem id_X. Jejím definičním oborem je množina X, oborem hodnot je množina X, jejím grafem je množina $\{(x, y) \in X \times X \mid x = y\}$.

Jednoduchým zobecněním identického zobrazení je tzv. kanonické vložení: buď Y podmnožina množiny X. Zobrazení $i : Y \to X$, definované pro každé $x \in Y$ předpisem

$$i(x) = x, \tag{1.3.3}$$

se nazývá *kanonické vložení množiny Y do množiny X*.

Všimeme si, že ačkoli předpisy (1.3.2) a (1.3.3) jsou stejné, zobrazení, která definují, jsou různá. Liší se totiž definičními obory. Teprve v případě, že $X = Y$, by platilo $\mathrm{id}_X = i$.

Nechť X a Y jsou množiny. Zobrazení pr_1, definované pro každé $(x, y) \in X \times Y$ předpisem[4]

$$\mathrm{pr}_1(x, y) = x, \tag{1.3.4}$$

se nazývá *první kartézská projekce*. Podobně *druhá kartézská projekce* je zobrazení pr_2, definované pro každé $(x, y) \in X \times Y$ předpisem

$$\mathrm{pr}_2(x, y) = y. \tag{1.3.5}$$

Další tři méně triviální příklady zobrazení. Nechť X je množina. Předpisy

$$\begin{aligned} c(Y) &= X \setminus Y, && \text{pro každé } Y \subset X \\ u(Y_1, Y_2) &= Y_1 \cup Y_2, && \text{pro každé } Y_1, Y_2 \subset X \\ p(Y) &= Y \times Y, && \text{pro každé } Y \subset X \end{aligned} \tag{1.3.6}$$

jsou definována zobrazení $c : \exp X \to \exp X$; $u : (\exp X) \times (\exp X) \to \exp X$ a $p : \exp X \to \exp(X \times Y)$.

Zobrazení $f : X \to Y$ se nazývá *surjektivní* (*surjekce*, zobrazení *na množinu Y*), jestliže pro každé $y \in Y$ existuje alespoň jedno $x \in X$ takové, že $f(x) = y$. Zobrazení f se nazývá *injektivní* (*injekce*,

---

[3] V matematické analýze bývá obvyklé nazývat prvky množin body. Až se začneme zabývat množinami, které v matematické analýze vystupují, pochopíme proč.

[4] Přesné by bylo napsat na levé straně $pr_1((x, y))$; z pochopitelných důvodů si ale v takových předpisech jedny závorky odpouštíme.

prosté), jestliže pro každé $y \in Y$ existuje nejvýše jedno $x \in X$ takové, že $f(x) = y$. Zobrazení f se nazývá *bijektivní* (*bijekce*), jestliže pro každé $y \in Y$ existuje právě jedno $x \in X$ takové, že $f(x) = y$.

Ihned vidíme, že každá bijekce je současně surjekce i injekce a naopak.

Z uvedených příkladů zobrazení je identita bijektivní a kanonické vložení injektivní. Pokud je $Y \neq \emptyset$, je první kartézská projekce $\mathrm{pr}_1 : X \times Y \to X$ surjektivní. Dokážeme postupně všechna tato tvrzení. Všechny důkazy jsou velmi prosté, je ale užitečné si je projít.

Jak už víme, dokázat bijektivnost zobrazení znamená dokázat jeho surjektivnost a injektivnost. Dokázat surjektivnost identity id_X znamená najít ke každému prvku $y \in \mathrm{Codom}\,\mathrm{id}_X$ prvek $x \in \mathrm{Dom}\,\mathrm{id}_X$ takový, že $\mathrm{id}_X(x) = y$. Takový prvek ale snadno najdeme, je to přímo prvek y. Pro $x = y$ totiž platí $\mathrm{id}_X(x) = \mathrm{id}_X(y) = y$. Takže jsme hledaný prvek našli. Injektivnost identity id_X ukážeme snadno: jestliže $\mathrm{id}_X(x_1) = \mathrm{id}_X(x_2)$, pak podle definice identity (1.3.2) platí $x_1 = x_2$ (pokud tento důkaz nechápete, přečtěte si znovu definici injektivního zobrazení).

Díky tomu, že předpisy (1.3.2) a (1.3.3) jsou stejné, ukáže se injektivnost kanonického vložení úplně stejně, jako injektivnost identity.

Ještě k surjektivitě kartézské projekce $\mathrm{pr}_1 : X \times Y \to X$. Zvolíme libovolný prvek $z \in X$ a najdeme k němu prvek množiny $X \times Y$, jehož obrazem je tento prvek. Hledáme tedy uspořádanou dvojici (x, y) takovou, že $\mathrm{pr}_1(x, y) = z$. Levá strana této rovnice je ovšem rovna x (podle (1.3.4)), dostáváme tedy $x = z$. Vidíme tedy, že hledanou uspořádanou dvojicí je dvojice (z, y), kde y je úplně libovolný prvek množiny Y. Skutečně, pro takovouto dvojici platí $\mathrm{pr}_1(z, y) = z$. (Kde jsme využili, že množina Y není prázdná? Proč by důkaz v případě, že by prázdná byla, selhal?)

V (1.3.6) je zobrazení c bijektivní, zobrazení u surjektivní a zobrazení p injektivní. Důkazy přenecháme čtenáři, zde dokážeme pouze bijektivnost zobrazení c. Nejprve dokážeme surjektivitu tohoto zobrazení. Podle definice máme ke každému prvku $Z \in \mathrm{Codom}\, c$ najít prvek $Y \in \mathrm{Dom}\, c$ takový, že $c(Y) = Z$. Takový prvek existuje, je to množina $Y = X \setminus Z$. Skutečně, platí

$$
\begin{aligned}
c(Y) &= c(X \setminus Z) && \text{(tak jsme prvek } Y \text{ definovali)}\\
&= X \setminus (X \setminus Z) && \text{(podle definice zobrazení } c)\\
&= Z. && \text{(proč?)}
\end{aligned}
$$

Nyní k injektivitě. Máme ukázat, že ke každému prvku $Z \in \mathrm{Codom}\, c$ existuje nejvýše jeden prvek $Y \in \mathrm{Dom}\, c$ takový, že $c(Y) = Z$. Uděláme to takto: ukážeme, že jestliže jsou takové prvky dva, pak se rovnají. Nechť tedy $c(Y_1) = c(Y_2)$. Podle definice zobrazení c máme $X \setminus Y_1 = X \setminus Y_2$. Pak ovšem musí platit také

$$X \setminus (X \setminus Y_1) = X \setminus (X \setminus Y_2),$$

což ovšem (jak už víme!) znamená $Y_1 = Y_2$.

Mějme zobrazení $f : X \to Y$ a $g : Y \to Z$. Zobrazení $g \circ f : X \to Z$, definované předpisem

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \tag{1.3.7}$$

se nazývá *složené zobrazení*, nebo *kompozice zobrazení f a g*.[5)]

Je-li $f : X \to Y$ libovolné zobrazení, X' podmnožina množiny X a $i : X' \to X$ kanonické vložení, pak kompozice $f \circ i : X' \to Y$ se nazývá *zúžení zobrazení f na množinu* X' a označuje symbolem $f|_{X'}$.

Uvažme zobrazení $j : X \to X \times X$, definované pro každé $x \in X$ předpisem $j(x) = (x, x)$, a první kartézskou projekci $\mathrm{pr}_1 : X \times X \to X$. Pak $j \circ \mathrm{pr}_1 : X \times X \to X \times X$ a pro $(x, y) \in X \times X$ platí

$$(j \circ \mathrm{pr}_1)(x, y) = j(\mathrm{pr}_1(x, y)) = j(x) = (x, x). \tag{1.3.8}$$

Dále $\mathrm{pr}_1 \circ j : X \to X$ a

$$(\mathrm{pr}_1 \circ j)(x) = \mathrm{pr}_1(j(x)) = \mathrm{pr}_1(x, x) = x. \tag{1.3.9}$$

Vidíme tedy, že $\mathrm{pr}_1 \circ j = \mathrm{id}_X$.

Uvažujme zobrazení c z (1.3.6). Pro libovolnou množinu $Y \subset X$ máme

$$(c \circ c)(Y) = c(c(Y)) = c(X \setminus Y) = X \setminus (X \setminus Y) = Y. \tag{1.3.10}$$

Je tedy

[5)] Symbol $g \circ f$ čteme „g po f.“ Vyjadřujeme tím to, co skutečně děláme: aplikujeme zobrazení g po zobrazení f.

$$c \circ c = \mathrm{id}_{\exp X}\,. \tag{1.3.11}$$

Přidejme nyní k zobrazením (1.3.6) ještě jedno: nechť $n : \exp X \times \exp X \to \exp X$ je zobrazení, definované pro každé dvě podmnožiny Y a Z množiny X předpisem

$$n(Y, Z) = Y \cap Z. \tag{1.3.12}$$

Pokuste se dokázat tento vztah:[6)]

$$c \circ n = n(c, c). \tag{1.3.13}$$

Věta 1.3. *Pro libovolná zobrazení $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ a $h : Z \to U$ platí*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \qquad \textit{(asociativita kompozice zobrazení)} \tag{1.3.14}$$

D ů k a z. Zobrazení na levé i pravé straně mají stejný definiční obor i obor hodnot. Stačí tedy porovnat grafy. Z definice kompozice zobrazení nám ovšem vyjde, že pro každé $x \in X$ je

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$$

a

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$$

Mějme zobrazení $f : X \to Y$ a $g : Y \to X$. Zobrazení g se nazývá *inverzní zobrazení k zobrazení f* (nebo *inverze zobrazení f*), jestliže platí

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \tag{1.3.15}$$

a

$$f \circ g = \mathrm{id}_Y \tag{1.3.16}$$

Zobrazení, které má inverzi, se též nazývá *invertibilní*.

Věta 1.4. *Každé zobrazení má nejvýše jednu inverzi.*

D ů k a z. Nechť $f : X \to Y$ je zobrazení $g_1, g_2 : Y \to X$ dvě jeho inverze[7)] Pak platí

$$\begin{aligned} g_1 &= g_1 \circ \mathrm{id}_Y && \text{(proč?)} \\ &= g_1 \circ (f \circ g_2) && \text{(plyne z (1.3.16))} \\ &= (g_1 \circ f) \circ g_2 && \text{(plyne z (1.3.14))} \\ &= \mathrm{id}_X \circ g_2 && \text{(plyne z (1.3.15))} \\ &= g_2 && \text{(proč?)} \end{aligned}$$

Dostali jsme tedy $g_1 = g_2$.

Podle Věty 1.4 je inverze zobrazení f definována jednoznačně. Proto ji můžeme označit: f^{-1}. Je-li zobrazení f invertibilní, je invertibilní i zobrazení f^{-1} a platí

$$(f^{-1})^{-1} = f. \tag{1.3.17}$$

Věta 1.5. *Každé zobrazení má inverzi, právě když je bijektivní.*

D ů k a z. Plyne (jak?) z toho, že je-li $g \circ f$ injekce, je f injekce, a je-li $g \circ f$ surjekce, je g surjekce (dokažte!).

Před chvílí jsme dokázali, že pro zobrazení c z (1.3.6) platí $c^{-1} = c$.

Nechť $f : X \to Y$ je zobrazení, $X' \subset X$, $Y' \subset Y$. Definujeme množinu

---

6) Necháme na čtenáři, aby sám pochopil, co jsme mysleli symbolem (c, c). Hodně zdaru!

7) $g_1, g_2 : Y \to X$ je běžně užívaná zkratka pro $g_1 : Y \to X$, $g_2 : Y \to X$. Podobných zkratek budeme používat více, aniž bychom na ně jednotlivě upozorňovali.

$$f(X') = \{y \in Y \mid \text{existuje } x \in X' \text{ takové, že } f(x) = y\} \tag{1.3.18}$$

(často budeme používat zjednodušený zápis $f(X') = \{x \in X \mid x \in X'\}$) a množinu

$$f^{-1}(Y') = \{x \in X \mid f(x) \in Y'\} \tag{1.3.19}$$

Množina $f(X')$ se nazývá *obraz množiny X' při zobrazení f*, množina $f^{-1}(Y')$ *vzor množiny Y' při zobrazení f*.

Speciálně, obraz množiny X při zobrazení f (tedy množina $f(X)$) se označuje symbolem $\mathrm{Im}\, f$ a nazývá *obraz zobrazení f*.

Vzor množiny Y' při zobrazení f existuje, i když zobrazení f není invertibilní. Pokud by f invertibilní bylo, znamenal by symbol $f^{-1}(Y')$ dvě různé věci: vzor množiny Y' při zobrazení f a obraz množiny Y' při zobrazení f^{-1}. Tyto dvě množiny se ovšem naštěstí rovnají.

Pro zobrazení $f : X \to Y$ je vždy $f^{-1}(Y) = X$.

Položme $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ a definujme zobrazení $f : X \to Y$ předpisem

$$f(x_1) = y_2$$
$$f(x_2) = y_3$$
$$f(x_3) = y_2$$

Dále položme $X' = \{x_1, x_2\}$ a $Y' = \{y_1, y_2\}$. Máme

$$f(X) = f(\{x_1, x_2, x_3\}) = \{f(x_1), f(x_2), f(x_3)\} = \{y_2, y_3, y_2\} = \{y_2, y_3\}$$
$$f(X') = f(\{x_1, x_2\}) = \{f(x_1), f(x_2)\} = \{y_2, y_3\}$$

a

$$f^{-1}(Y) = \{x_1, x_2, x_3\},$$
$$f^{-1}(Y') = \{x_1, x_3\}.$$

1.4 Binární relace. Nechť X je množina, $Z \subset X \times X$. Množinu Z spolu s množinou X nazýváme *binární relací* na množině X.

Množina Z se nazývá *graf* této relace. Označíme-li tuto relaci σ, píšeme $Z = \mathrm{Gr}\,\sigma$. Pokud pro prvky $x, y \in X$ platí $(x, y) \in \mathrm{Gr}\,\sigma$, píšeme $x\ \sigma\ y$.

Relaci na množině X, jejímž grafem je množina $(X \times X) \setminus \mathrm{Gr}\,\sigma$, označujeme symbolem $\not\sigma$.

Vztah $x \not\sigma y$ tedy platí, právě když neplatí $x\ \sigma\ y$.

Podobně jako u zbrazení nestačí zadat jen graf relace, relace zadána jestliže jsou zadány dvě věci množina X a graf.

Uvažujme relaci σ na množině X. Tato relace se nazývá *reflexivní*, jestliže pro každý prvek $x \in X$ platí $x\ \sigma\ x$. Relace σ se nazývá *symetrická*, jestliže pro každé dva prvky $x, y \in X$ z $x\ \sigma\ y$ vyplývá $y\ \sigma\ x$, a *antisymetrická*, když $x\ \sigma\ y$ a $y\ \sigma\ x$ znamená $x = y$. Konečně, relace σ je *tranzitivní*, když pro každé tři prvky $x, y, z \in X$ platí: jestliže $x\ \sigma\ y$ a $y\ \sigma\ z$, pak $x\ \sigma\ z$.

Relace, která je reflexivní, symetrická a tranzitivní, se nazývá *ekvivalence*. Relace, která je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní, se nazývá *(částečné) uspořádání*. Ekvivalence se většinou označuje symbolem „$\sim$“, uspořádání symbolem „$\leq$“.[8)]

Relace na množině X, jejíž graf je celá množina $X \times X$, je ekvivalence. Uspořádání je to jedině v případě, když X je prázdná nebo jednoprvková množina. Relace na množině X, jejímž grafem je množina $\{(x, x) \mid x \in X\}$ [9)], je ekvivalence i uspořádání. Je přirozené označit tuto relaci symbolem „=“.

Pro libovolné zobrazení $f : X \to Y$ můžeme na množině X zadat ekvivalenci $\sim$, když položíme $x \sim y$, právě když $f(x) = f(y)$. Tuto ekvivalenci nazýváme *zadanou (indukovanou)* zobrazením f.

---

8) Výraz $x \leq y$ se čte, jak označení napovídá: x je menší nebo rovno y.

9) K označení viz. poznámka za vztahem (1.3.18)

Ukážeme nyní, že se skutečně jedná o ekvivalenci. Že se jedná o relaci, je zřejmé (zadali jsme množinu X a podmnožinu kartézského součinu $X \times X$, tvořenou uspořádanými dvojicemi (x, y), pro které platí $f(x) = f(y)$). Musíme tedy ověřit reflexivitu, symetrii a tranzitivitu této relace.

Aby byla tato relace reflexivní, musí pro každé $x \in X$ platit $x \sim x$. To ovšem znamená $f(x) = f(x)$. Aby byla symetrická, musí pro každé dva prvky $x, y \in X$ z $x \sim y$ (což znamená $f(x) = f(y)$) plynout $y \sim x$ (což znamená $f(y) = f(x)$). Podmínka tranzitivity zase vyžaduje, aby každé tři prvky $x, y, z \in X$, které splňují $f(x) = f(y)$ a $f(y) = f(z)$, splňovaly také $f(x) = f(z)$. Vidíme tedy, že všechny tyto podmínky jsou splněny.

Nyní si ještě ukážeme, jak lze zavést uspořádání podmnožin pomocí inkluze. Nechť X je množina. Pro libovolné dvě množiny $Y, Z \in \exp X$ položme $Y \le Z$, jestliže $Y \subset Z$. Tím jsme definovali relaci $\le$ na množině $\exp X$. Podívejme se, zda se jedná o uspořádání. Pro každé $Y, Z, U \in \exp X$ musí platit

$$\begin{array}{ll} Y \subset Y, & \text{(reflexivita)} \\ \text{jestliže } Y \subset Z \text{ a } Z \subset Y, \text{ pak } Y = Z, & \text{(antisymetrie)} \\ \text{jestliže } Y \subset Z \text{ a } Z \subset U, \text{ pak } Y \subset U. & \text{(tranzitivita)} \end{array}$$

Vidíme, že tyto podmínky jsou splněny (o prvních dvou jsme hovořili na začátku odstavce 1.1, třetí je tranzitivita inkluze z Věty 1.1).

1.5 Ekvivalence a rozklady. Věnujme se nyní podrobněji některým základním vlastnostem ekvivalencí. Nejprve uvedeme definici rozkladu.

Rozkladem množiny X nazýváme systém S jejích podmnožin (tedy podmnožinu $\exp X$) takový, že $\emptyset \notin S$, S je pokrytí množiny X (to znamená $\cup S \supset X$) a množiny systému S jsou po dvou disjunktní. Jednotlivé množiny systému S se nazývají *třídy rozkladu S*.

Následují tři příklady rozkladu množiny X: systém $S_1 = \{X\}$, systém $S_2 = \{\{x\} \mid x \in X\}$[10] a systém $S_3 = \{Y, X \setminus Y\}$, kde Y je podmnožina splňující $Y \notin \{\emptyset, X\}$.

Nechť S je rozklad množiny X. Vzhledem ke druhé a třetí podmínce z definice rozkladu existuje ke každému prvku množiny $x \in X$ právě jedna množina $Y \in S$ taková, že $x \in Y$ (druhá podmínka zaručuje, že existuje alespoň jedna, třetí zase, že existuje nejvýše jedna). Tuto množinu označujeme $[x]_S$ a nazýváme *třídou rozkladu S, definovanou prvkem x*.

Položme

$$x \sim y, \text{ právě když } [x]_S = [y]_S \tag{1.5.1}$$

Tímto předpisem jsme definovali relaci $\sim$ na množině X. Platí:

Věta 1.6. *Relace $\sim$, definovaná předpisem (1.5.1), je ekvivalence.*
D ů k a z. Je jednoduchý; tvrzení plyne z toho, že relace „=“ je ekvivalence.

O ekvivalenci (1.5.1) říkáme, že je *zadaná* (nebo *indukovaná*) rozkladem S.

Nechť $\sim$ je ekvivalence na množině X. Pro každý prvek $x \in X$ klademe

$$[x]_\sim = \{y \in X \mid x \sim y\} \tag{1.5.2}$$

Předpisem

$$S = \{[x]_\sim \mid x \in X\} \tag{1.5.3}$$

je nyní definován systém S podmnožin množiny X. Platí:

Věta 1.7. *Systém S, definovaný předpisem (1.5.3), je rozklad množiny X.*
D ů k a z. Dokážeme postupně platnost všech tří podmínek z definice rozkladu. 1. Relace $\sim$ je reflexivní (protože je to ekvivalence). Každá z množin $[x]_\sim$ tedy obsahuje prvek x a je neprázdná. Skutečně, má-li platit $x \in [x]_\sim$, musí podle (1.5.2) být $x \sim x$, což je splněno díky reflexivitě.

2. Plyne přímo z toho, co jsme už ukázali: jestliže pro každý prvek $x \in X$ platí $x \in [x]_\sim$, je $\cup S = X$. (Pro každé $x \in X$ z $x \in [x]_\sim$ totiž plyne $x \in \cup S$, čímž je dokázána inkluze $X \subset \cup S$. Opačná inkluze je zřejmá (proč?)).

---
[10] Opět (a naposledy): k označení viz. poznámka za vztahem (1.3.18).

3. Předpokládejme, že existují množiny $[y]_\sim, [z]_\sim$ takové, že $[y]_\sim \cap [z]_\sim$. Pak existuje prvek $x \in [y]_\sim \cap [z]_\sim$. Z (1.5.2) plyne $y \sim x$, z téhož vztahu a symetrie ekvivalence $\sim$ plyne $x \sim z$. Z tranzitivity ekvivalence $\sim$ tedy máme $y \sim z$. Zvolme nyní libovolně $u \in [z]_\sim$. Máme $z \sim u$ (ze vztahu (1.5.2)), neboli $y \sim u$ (z $y \sim z$ a tranzitivity). To ale znamená, že $u \in [y]_\sim$, čili $[z]_\sim \subset [y]_\sim$ (z definice podmnožiny). Podobně můžeme ukázat, že $[y]_\sim \subset [z]_\sim$ (to již necháváme na čtenáři), což znamená, že platí $[y]_\sim = [z]_\sim$. Podíváme-li se znovu na začátek tohoto důkazu, vidíme, že jsme dokázali třetí podmínku definice rozkladu.

O rozkladu (1.5.3) říkáme, že je *zadaný ekvivalencí* $\sim$. Nazýváme jej *faktorovou množinou množiny* X *podle ekvivalence* $\sim$ a označujeme symbolem $X/\sim$. Třídy rozkladu S se pak nazývají také *třídy ekvivalence* $\sim$. Zobrazení $\pi : X \to X/\sim$, definované pro každé $x \in X$ předpisem

$$\pi(x) = [x]_\sim, \tag{1.5.4}$$

se nazývá *faktorová projekce*.

Uvědomte si, že faktorová projekce je vždy surjektivní.

Prozkoumejte indukovanou ekvivalenci, faktorovou množinu a faktorovou projekci u dříve uvedených rozkladů S_1, S_2 a S_3.

1.6 Uspořádané množiny. Množinu nazýváme uspořádanou, je-li na ní dáno uspořádání. V tomto odstavci se budeme zabývat základními vlastnostmi uspořádaných množin. Pokud neuvedeme jinak, budeme vždy předpokládat, že na množině X je zavedeno uspořádání $\leq$.

Předpokládejme, že Y je podmnožina množiny X. Pak prvek $x \in X$ se nazývá *horní závorou množiny* Y, jestliže pro každý prvek $y \in Y$ platí $y \leq x$. Prvek $x \in X$ se nazývá *dolní závorou množiny* Y, jestliže pro každý prvek $y \in Y$ platí $y \geq x$.[11)]

Prvek $x \in X$ se nazývá *největším prvkem množiny* Y (*maximem*), je-li její horní závorou a platí-li $x \in Y$. Prvek $x \in X$ se nazývá *nejmenším prvkem množiny* Y (*minimem*), je-li její dolní závorou a platí-li $x \in Y$. Snadno se zjistí (jak?), že největší i nejmenší prvek množiny Y existuje nejvýše jeden. Můžeme tedy zavést značení: $\max Y$ a $\min Y$.

Prvek $x \in X$ se nazývá *supremem množiny* Y, je-li nejmenším prvkem množiny jejích horních závor. Prvek $x \in X$ se nazývá *infimem množiny* Y, je-li největším prvkem množiny jejích dolních závor. Opět, supremum i infimum množiny Y existuje nejvýše jedno. Zavádíme značení: $\sup Y$, $\inf Y$.

Platí tedy

$$\sup Y = \min\{x \in X \mid x \text{ je horní závora množiny } Y\} \tag{1.6.1}$$
$$\inf Y = \max\{x \in X \mid x \text{ je dolní závora množiny } Y\} \tag{1.6.2}$$

Věta 1.8. *Jestliže existuje maximum množiny* Y, *pak existuje i její supremum a platí*

$$\sup Y = \max Y. \tag{1.6.3}$$

Jestliže existuje minimum množiny Y, *pak existuje i její infimum a platí*

$$\inf Y = \min Y. \tag{1.6.4}$$

D ů k a z. Předpokládejme, že existuje maximum množiny $Y \subset X$ a označme je y. Podle definice maxima je y horní závora množiny Y. Je-li x nějaká jiná horní závora množiny Y, pak je větší nebo rovna než libovolný prvek množiny Y, platí tedy i $x \geq y$ (jelikož $y \in Y$). Takže y je nejmenší horní závora množiny Y.

Důkaz druhé části věty se provede stejně.

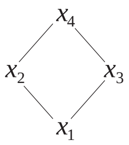
Nechť x_1, x_2, x_3, x_4 jsou po dvou různá,[12)] $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Zaveďme na množině X uspořádání, jehož graf je množina

[11)] $\geq$ je vlastně další relace, kterou jsme dosud nedefinovali; čtenář si ji jistě rád definuje sám.

[12)] Předpokládám, že obratu „po dvou různá“ rozumíte (srovnejte též s definicí po dvou disjunktních množin).

$$\{(x_1, x_1), (x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_1, x_4), (x_2, x_2), (x_2, x_4), (x_3, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_4)\}$$

(ověřte, že je to skutečně uspořádání!). Toto uspořádání se dá přehledněji znázornit následujícím diagramem, v němž jsou výše nakresleny prvky větší a na stejné úrovni prvky nesrovnatelné:[13]



Uvažujme nyní množinu $Y \subset X$, $Y = \{x_1, x_2, x_3\}$. Množina horních závor této množiny je $\{x_4\}$. To znamená, že maximum množina Y nemá (žádná její horní závora v ní neleží) a $\sup Y = \min\{x_4\} = x_4$.

Nechť X a Y jsou dvě uspořádané množiny. Zobrazení $f : X \to Y$ se nazývá *izotonní*, jestliže pro každé dva prvky $x, x' \in X$ takové, že $x \le x'$, platí $f(x) \le f(x')$.[14] Izotonní bijekce se nazývá *izomorfismus uspořádaných množin*.

Uvažme uspořádanou množinu X z předchozí poznámky a množinu $U = \{u_1, u_2\}$, kde $u_1 \ne u_2$. Zaveďme dále na množině $\exp U$ uspořádání pomocí inkluze (viz konec odstavce 1.4). Pak zobrazení $f : \exp U \to X$, dané předpisem

$$\begin{aligned} &f(\emptyset) = x_1 \\ &f(\{u_1\}) = x_2 \\ &f(\{u_2\}) = x_3 \\ &f(\{u_1, u_2\}) = x_4 \end{aligned}$$

je izomorfismus uspořádaných množin.

Příklady

1. *Dokažte, že pro každé tři podmnožiny A, B, C množiny X, platí $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$.*
Řešení: Zvolme libovolný prvek $x \in C \setminus (A \cup B)$. Z definice rozdílu množin plyne, že $x \in C$ a $x \notin A \cup B$. To znamená, že $x \in C$ a zároveň x neleží ani v jedné z množin A, B, tedy $x \in C \setminus A$, $x \in C \setminus B$ (opět z definice rozdílu množin). Konečně, jestliže x leží jak v množině $C \setminus A$ tak i v množině $C \setminus B$, musí (podle definice průniku množin) ležet i v množině $(C \setminus A) \cap (C \setminus B)$. Tím je dokázána inkluze $C \setminus (A \cup B) \subset (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$.

Nyní zvolme libovolný prvek $x \in (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$. To znamená, že x leží v množině $C \setminus A$ a současně v množině $C \setminus B$. Využijeme definici rozdílu množin a dostaneme, že $x \in C$, $x \notin A$ a $x \notin B$. Protože prvek x neleží ani v jedné z množin A, B neleží ani ve sjednocení těchto množin, tedy $x \notin A \cup B$. Jak již víme prvek x leží v množině C a současně neleží v množině $A \cup B$. To ale znamená, že $x \in C \setminus (A \cup B)$. A tím je dokázána inkluze $C \setminus (A \cup B) \supset (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$.

2. *Dokažte, že pro každé zobrazení $f : X \to Y$ a množiny $A, B \subset X$, platí $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.*
Řešení: Zvolme libovolný prvek $y \in f(A \cup B)$. Pak existuje prvek $x \in A \cup B$ takový, že $f(x) = y$. Prvek x leží v množině A nebo v množině B (to plyne z definice sjednocení). Předpoládejme nejprve, že leží v množině A. Potom ale prvek y musí ležet v množině $f(A)$ a tím spíše v množině $f(A) \cup f(B)$. Nyní předpokládejme, že x leží v množině B. Potom ale prvek y musí ležet v množině $f(B)$ a tedy i v množině $f(A) \cup f(B)$. Tím je dokázána inkluze $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.

[13] *Nesrovnatelné* prvky jsme nedefinovali. Co to asi je?

[14] Zde jsme se dopustili určité nepřesnosti, jaké se v matematice dopouštíme často: symbol „$\le$“ na levé straně označuje jinou relaci, než tentýž symbol na straně pravé! V takových případech se vždy očekává, že je čtenář při věci a nenechá se stejným označením různých objektů zmást.

Zvolme libovolný prvek $y \in f(A) \cup f(B)$. Prvek y leží v množině $f(A)$ nebo $f(B)$ (což plyne znovu z definice sjednocení). Předpokládejme nejprve, že y leží v množině $f(A)$. To znamená, že existuje prvek $x \in A$ takový, že $f(x) = y$. Z definice sjednocení také plyne, že x leží v množině $A \cup B$. Potom ale prvek $f(x) = y$ musí ležet v množině $f(A \cup B)$. Nyní předpokládejme, že y leží v množině $f(B)$. Existuje tedy prvek x takový, že $x \in B$. Z definice sjednocení plyne, že x leží v množině $A \cup B$. Potom ale prvek $f(x) = y$ musí ležet v množině $f(A \cup B)$. Tím je dokázána i inkluze $f(A \cup B) \supset f(A) \cup f(B)$.

3. *Nechť $f : X \to Y$, $A \subset X$, $B \subset Y$. Dokažte, že je-li $f(A) \subset B$, pak $A \subset f^{-1}(B)$.*
Řešení: Zvolme $x \in A$ libovolně. Z předpokladu $f(A) \subset B$ víme, že $f(x) \in B$ (zde jsme využili také tranzitivity inkluze porovnej s Větou 1.1). Tedy, protože $f(x) \in B$, musí $x \in f^{-1}(B)$ (jak je požadováno v definici vzoru množiny porovnej s (1.3.19)). Tím je důkaz hotov.

4. *Nechť X je neprázná uspořádaná množina. Nalezněte množinu horních (dolních) závor množiny $\emptyset \subset X$.*
Řešení: Nejprve vyřešíme problém pro množinu horních závor. Tedy podle definice: prvek $x \in X$ je horní závorou prázné množiny, jestliže pro každý prvek $y \in \emptyset$ platí $y \leq x$. To je ale splněno! Protože neexistuje prvek prázné množiny větší než náš prvek x (nebo snad ano? Který?), je x horní závora $\emptyset$. Prvek x byl zvolen libovolně tedy množinou horních závor $\emptyset$ je celá množina X. Obdobně pro dolní závory.

5. *Nechť X je neprázdná a $A \subset \exp X$. Uvažujme podmnožinu $\exp X$ s uspořádáním $\subset$. Najděte $\sup A$.*
Řešení: Dokážeme, že $\sup A = \cup A$. Označme $S = \cup A$. Je nutno ověřit dvě podmínky. 1. Že množina S je horní závorou A, tedy, že pro libovolnou množinu $B \in A$ platí $B \subset S$. To je ale zřejmé z definice sjednocení systému (vezmeme-li si libovolný prvek $b \in B$, existuje množina systému S, která tento prvek obsahuje: množina B). 2. Je nutno ověřit, že množina S je nejmenší horní závora množiny A, neboli, že pro každou jinou horní závoru C platí $S \subset C$. Zvolme prvek $x \in S$. Pak existuje nějaká množina $B \in A$ taková, že $x \in B$ (porovnej s definicí sjednocení systému). Protože ale C je horní závora množiny A, musí platit $B \subset C$ a tedy i $x \in C$. Proto $S \subset C$. Ukázali jsme tedy, že S je nejmenší horní závora množiny A. Tím je důkaz ukončen.

6. *Rozhodněte, zda existuje množina, která nemá supremum.*
Řešení: Položme $A = \{a, b, c\}$, kde prvky a, b, c jsou po dvou různé. Uvažujeme na množině A relaci $\leqslant$ s grafem $\{(a, b), (a, c), (a, a), (b, b), (c, c)\}$. Snadno se ověří, že tato relace je uspořádání. Tvrdíme, že množina A nemá supremum. Pokud by ho měla, byl by to jeden z prvků b, c (prvek a to být nemůže protože $a \leqslant b$). Nemůže to být prvek b, protože $c \not\leqslant b$. Obdobně lze dospět k závěru, že supremem nemůže být ani prvek c. Množina A tedy nemá supremum.

7. *Předpokládejme, že relace $R = X \times X$ na X je uspořádání. Dokažte, že pak množina X je prázdná nebo jednoprvková.*
Řešení: Předpokládejme, že množina X obsahuje dva různé prvky a, b a že na ní je relace $R = X \times X$ uspořádání. Platí, že $a\ R\ b$ i $b\ R\ a$, protože $(a, b) \in R$ a $(b, a) \in R$. Relace uspořádání musí být antisymetrická (jak je uvedeno v definici uspořádání). Z $a\ R\ b$ a $b\ R\ a$ tedy plyne $a = b$. Celkově tedy každé dva prvky jsou shodné a množina X má nanejvýš jeden prvek. Skutečnost, že na prázdné a jednoprvkové množině se jedná o uspořádání již přenecháváme k ověřeni čtenáři.

Cvičení

1. Platí rovnost $\emptyset = \{\emptyset\}$?
2. Najděte příklad množin A, B, C tak, aby platilo:
   a) $A \cup (B \times C) \neq (A \cup B) \times (A \cup C)$; b) $A \cap (B \times C) \neq (A \cap B) \times (A \cap C)$.
3. Dokažte, nebo vyvraťte: Pro každé tři množiny A, B, C platí:
   a) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus B) \setminus (C \setminus B)$; b) $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus B$;
   c) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B$.

4. Dokažte, že pro každé tři podmnožiny A, B, C množiny X platí:
   a) $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$;
   b) $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$;
   c) $(X \setminus (A \setminus B) = B \cup (X \setminus A)$;
   d) $A \setminus A = \emptyset, \quad A \setminus \emptyset = A$;
   e) $A \cup A = A, \quad A \cap A = A$.

5. Dokažte, že pro každé tři množiny A, B, C platí:
   a) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;
   b) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;
   c) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$;
   d) je-li $A \subset B$ potom $A \times C \subset B \times C$.

6. Dokažte, že pro každé dvě množiny A, B platí $\exp A \cup \exp B \subset \exp(A \cup B)$ a dokažte, že v tomto výraze obecně neplatí rovnost.

7. Vysvětlete, proč každá bijekce je vždy injekce a surjekce.

8. Co je grafem inverzního zobrazení? (Přesněji: Jak lze z grafu invertibilního zobrazení dostat graf jeho inverze?)

9. Nechť $f : X \to X$ a $A \subset X$ taková, že $f(A) \subset A$.
   a) Dokažte, že potom $A \subset f^{-1}(A)$.
   b) Uveďte příklad f a množiny A aby navíc platilo:
      1. $f(A) \neq A$ a $A = f^{-1}(A)$,
      2. $f(A) = A$ a $A \neq f^{-1}(A)$.

10. Nechť $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ jsou zobrazení taková, že zobrazení $g \circ f$ je surjektivní. Dokažte, že
   a) zobrazení g je surjektivní.
   b) Je-li g injektivní pak je f surjektivní.

11. Uveďte příklad zobrazení $f : X \to Y$ a $g : Y \to Z$ tak, aby $g \circ f$ byla bijekce a přitom f nebylo surjektivní a g nebylo injektivní.

12. Je zřejmé, že pro libovolné zobrazení $f : X \to Y$ a libovolný bod $x \in X$ platí $x \in f^{-1}(f(x))$. Uveďte příklad zobrazení f a bodu x, kdy $f^{-1}(f(x)) \neq \{x\}$.

13. Nechť $f : X \to Y$, $A \subset X$. Dokažte, že je-li f injektivní, pak $f^{-1}(f(A)) = A$.

14. Dokažte, že pro každé zobrazení $f : X \to Y$ a libovolné množiny $A, B \subset X$ a $C, D \subset Y$ platí:
   a) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$;
   b) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$;
   c) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

15. Nechť $Z \subset X \times X$. Dokažte, že $Z \subset \mathrm{pr}_1(Z) \times \mathrm{pr}_2(Z)$. Platí i opačná inkluze?

16. Definujme zobrazení $f : \exp X \times \exp X \to \exp X$ předpisem $f(Y, Z) = (Y \cup Z) \setminus (Y \cap Z)$. Najděte $f^{-1}(\emptyset)$.

17. Je vždy průnikem (sjednocením) dvou relací opět relace? Jak tomu bude pro systém relací?

18. Je vždy průnikem (sjednocením) dvou ekvivalencí opět ekvivalence?

19. Nechť $X = \{a, b, c, d\}$, kde a, b, c, d jsou po dvou různá. Je relace $R = \{(a, a), (c, d), (b, c)\}$ zobrazení z X do X?

20. Dokažte, že složením dvou zobrazení je opět zobrazení.

21. Nechť X je uspořádaná množina. Pro libovolné prvky x, y definujme relaci $x < y$, jestliže $x \leq y$ a $x \neq y$. Dokažte, že pro graf této relace platí:

$$\mathrm{Gr}(<) = \mathrm{Gr}(\leq) \setminus \mathrm{Gr}(=)$$

Dále dokažte, že tato relace je tranzitivní, že pro libovolný prvek $x \in X$ platí $x \not< x$ a že jestliže pro dva prvky $x, y \in X$ platí $x < y$, pak $y \not< x$.

22. Mějme zobrazení $f : X \to Y$. Definujeme ekvivalenci $\sim$ na X takto: $x \sim y$ právě, když $f(x) = f(y)$. (Že se jedná skutečně o ekvivalenci, již bylo ukázáno.) Nyní definujeme zobrazení $F : X/\!\sim \to f(X)$ takto $F([x]_\sim) = f(x)$. Ověřte, že toto zobrazení je korektně definováno[15)]. Dále ověřte, že toto

[15)] Ověřte, že je jednoznačně určeno, co je obrazem třídy $[x]_\sim$

zobrazení je bijekce a navíc že platí $f = i \circ F \circ \pi$, kde $i : f(X) \to X$ je kanonické vložení a $\pi X \to X/\!\sim$ je příslušná faktorová projekce.

23. Nechť X je libovolná množina. Definujeme na množině $\exp X$ následující relaci. Dvě podmnožiny A, B množiny X jsou v relaci, právě když existuje bijekce $f : A \to B$. Dokažte, že tato relace je ekvivalence.

24. Nechť X je upořadaná množina, pokuste se najít supremum (infimum) prázzdné množiny. Využijte výsledků z příkladu 4.

25. Uvažujme podmožinu $A \subset \exp X$ s uspořádáním $\subset$. Co je infimem tohoto systému? Využijte obdobný postup jako v řešení příkladu 5.

26. Obdobně jako v příkladu 6 se pokuste najít množinu, která nemá infimum.

2. Reálná čísla, funkce reálné proměnné

V této kapitole zavádíme množinu, na níž stojí celá matematická analýza: množinu reálných čísel. Tuto množinu definujeme *axiomaticky*: nesnažíme se ji zkonstruovat (dokonce se ani nezabýváme otázkou, co to reálná čísla jsou); vyjmenujeme jen několik vlastností, které tato množina má, a v dalších úvahách vycházíme pouze z nich.

Základní roli v definici množiny reálných čísel hraje axiom spojitosti a v dalším textu pak věta o supremu, která je s tímto axiomem ekvivalentní.

Dále definujeme ostatní základní číselné množiny: množinu přirozených, celých, racionálních a iracionálních čísel s tím, že otázku existence iracionálních čísel odsouváme na později.

Závěrem této kapitoly se zabýváme základními vlastnostmi funkcí reálné proměnné, jako jsou monotonnost, extrémy, konvexnost, parita. Definujeme také základní operace na množinách funkcí, afinní a mocninné funkce.

2.1 Binární operace. *Binární operací* na množině X rozumíme libovolné zobrazení z kartézského součinu $X \times X$ do X. Hodnotu binární operace $*$ v bodě $(x, y) \in X \times X$ označujeme $x * y$.

Nechť X je množina. Pak průnik, sjednocení a rozdíl množin definují binární operace na množině $\exp X$ (první a druhá byly definovány v (1.2.1) a (1.3.6)). Tyto operace se značí (jak jinak) $\cap$, $\cup$ a $\setminus$.

Označme Y^X množinu všech zobrazení z X do Y. Pro libovolná dvě zobrazení $f, g \in X^X$ platí $g \circ f \in X^X$. Kompozice zobrazení tedy definuje binární operaci $\circ$ na množině X^X.

Operace $*$ na množině X se nazývá *komutativní*, když pro každé dva prvky $x, y \in X$ platí

$$x * y = y * x \tag{2.1.1}$$

a *asociativní*, když pro každé tři prvky $x, y, z \in X$ platí

$$(x * y) * z = x * (y * z) \tag{2.1.2}$$

(tuto hodnotu značíme $x * y * z$).

Neutrálním prvkem operace $*$ na množině X rozumíme takový prvek $e \in X$, že pro každé $x \in X$ platí

$$\begin{aligned} e * x &= x, \\ x * e &= x. \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

Věta 2.1. *Každá binární operace má nejvýše jeden neutrální prvek.*
D ů k a z. Předpokládejme, že e_1, e_2 jsou dva neutrální prvky operace $*$. Z první rovnice (2.1.3) plyne, že $e_1 * e_2 = e_2$ (jelikož e_1 je neutrální prvek), z druhé rovnice zase $e_1 * e_2 = e_1$ (jelikož e_2 je neutrální prvek). Dostáváme $e_1 = e_2$.

Uvažujme operace průniku, sjednocení a rozdílu množin na množině $\exp X$. Z věty 1.1 plyne, že průnik a sjednocení jsou komutativní a asociativní. Neutrálním prvkem průniku je množina X (jelikož pro každé Y platí $X \cap Y = Y \cap X = Y$), neutrálním prvkem sjednocení je prázdná množina ($Y \cup \emptyset = \emptyset \cup Y = Y$). Operace rozdílu množin ukazuje, že neutrální prvek nemusí existovat (pro každé $Y \subset X$ je $Y \setminus Y = \emptyset$; odtud plyne, že jedině prázdná množina má šanci být neutrálním prvkem. Jak se ovšem snadno ověří, bude jím, jedině když $X = \emptyset$).

Má-li operace $*$ na množině X neutrální prvek e, pak *inverzním prvkem (inverzí) prvku* x (vzhledem k operaci $*$) nazveme takový prvek y, že

$$\begin{aligned} y * x &= e, \\ x * y &= e. \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

Věta 2.2. *Každý prvek množiny X s asociativní operací $*$ má vzhledem k této operaci nejvýše jednu inverzi.*
D ů k a z. Buďte e neutrální prvek operace $*$ a y_1, y_2 dvě inverze prvku $x \in X$. Pak

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1 * e && (e \text{ je neutrální prvek})\\ &= y_1 * (x * y_2) && (y_2 \text{ je inverze prvku } x)\\ &= (y_1 * x) * y_2 && (\text{asociativita } *)\\ &= e * y_2 && (y_1 \text{ je inverze } x)\\ &= y_2. \end{aligned}$$

Inverzní prvek k prvku x je tedy u asociativních operací určen jednoznačně. Obvykle jej značíme x^{-1}. Z definice ihned plyne, že $(x^{-1})^{-1} = x$.

Důkaz předchozí věty nápadně připomíná důkaz věty 1.4. To není náhoda.

Je-li e neutrální prvek operace $*$, je $e * e = e$, a tedy $e = e^{-1}$.

Je-li operace $*$ asociativní a má-li každý z prvků x a y inverzi, pak má inverzi i prvek $x * y$ a platí $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$. Je totiž:

$$(y^{-1} * x^{-1}) * (x * y) = (y^{-1} * (x^{-1} * x)) * y = (y^{-1} * e) * y = e$$

a

$$(x * y) * (y^{-1} * x^{-1}) = (x * (y * y^{-1})) * x^{-1} = (x * e) * x^{-1} = e.$$

2.2 Pole. Množina X se nazývá *pole*, splňuje-li následující podmínky:

1. Na množině X je dána komutativní a asociativní operace s neutrálním prvkem. Každý prvek množiny X má vzhledem k této operaci inverzi.

Tuto operaci budeme značit $+$ a nazývat *sčítání* v poli X. Její neutrální prvek označíme 0. Inverzní prvek k prvku x označíme $-x$.

2. Na množině X je dána komutativní a asociativní operace s neutrálním prvkem různým od 0. Každý prvek množiny $X \setminus \{0\}$ má vzhledem k této operaci inverzi.

Tuto operaci budeme značit $\cdot$ a nazývat *násobení* v poli X. Často budeme místo $x \cdot y$ psát pouze xy. Neutrální prvek označíme 1 a inverzní prvek k prvku x označíme x^{-1}. Při zápisu budeme dodržovat obvyklou přednost násobení před sčítáním.

3. Pro každé tři prvky $x, y, z \in X$ platí distributivní zákon:

$$x(y + z) = xy + xz.$$

Věta 2.3. *Pro každé pole platí: 1.* $0 \cdot x = 0$ *pro každý prvek* x.
2. 0 *nemá vzhledem k násobení inverzi.*
3. $(-1)x = -x$ *pro každý prvek* x.
D ů k a z. 1. Především, jelikož $0 + 0 = 0$ (0 je vzhledem ke sčítání neutrální prvek), máme $0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$ (distributivní zákon). Označíme-li si tedy $0 \cdot x = y$, máme $y = y + y$ a

$$\begin{aligned} y &= y + 0 && (0 \text{ je neutrální prvek})\\ &= y + (y + (-y)) && (-y \text{ je inverze } y)\\ &= (y + y) + (-y) && (\text{asociativita sčítání})\\ &= y + (-y) && (\text{viz. výše})\\ &= 0. && (-y \text{ je inverze } y) \end{aligned}$$

2. Pro inverzní prvek nuly by platilo $0 \cdot 0^{-1} = 1$. Podle předchozího bodu ovšem $0 \cdot 0^{-1} = 0$. To je spor, protože z definice pole víme, že $0 \neq 1$.

3. Platí

$$\begin{aligned} x + (-1) \cdot x &= 1 \cdot x + (-1) \cdot x && (1 \text{ je neutrální prvek})\\ &= (1 + (-1)) \cdot x && (\text{komutativita násobení a distributivita})\\ &= 0 \cdot x && (-1 \text{ je inverze } 1) \end{aligned}$$

$= 0.$ (bod 1.)

To ovšem znamená, že inverzí prvku x vzhledem ke sčítání (tedy prvkem $-x$) je prvek $(-1)x$. Tím je důkaz hotov.

Mějme nyní na poli X dáno uspořádání $\leq$. Řekneme, že toto uspořádání je *úplné*, jestliže pro každé dva prvky $x, y \in X$ nastane alespoň jedna z možností $x \leq y$ a $y \leq x$ (prvky x a y jsou srovnatelné). Dále řekneme, že toto uspořádání je *slučitelné (kompatibilní)* se sčítáním a násobením v poli X, jestliže pro každé tři prvky $x, y, z \in X$ platí:

Jestliže $x \leq y$, pak $x + z \leq y + z$. (2.2.1)
Jestliže $0 \leq x$ a $0 \leq y$, pak $0 \leq xy$. (2.2.2)

Pole X se nazývá *uspořádané*, je-li na něm dáno úplné uspořádání, slučitelné se sčítáním a násobením.[1)]

Připomeňme, že v uspořádané množině vztah $x < y$ znamená, že $x \leq y$ a $x \neq y$.

Věta 2.4. *V každém uspořádaném poli platí: 1.* $0 < 1$.
2. Z $x + z \leq y + z$ *plyne* $x \leq y$.
3. Z $0 < x$ *plyne* $0 < x^{-1}$.
4. Je-li $0 < z$, *pak jsou vztahy* $x \leq y$ *a* $xz \leq yz$ *ekvivalentní.*
D ů k a z. 1. Kdyby $0 \not\leq 1$, muselo by být $1 \leq 0$ (uspořádání je úplné). Položíme-li v (2.2.1) $x = 1$, $y = 0$ a $z = -1$, dostaneme $1 + (-1) \leq 0 + (-1)$, neboli (protože -1 je inverze 1 a 0 je neutrální prvek) $0 \leq -1$. Teď položme v (2.2.2) $x = -1$ a $y = -1$. Dostaneme $0 \leq (-1)(-1)$. Víme ale (poznámka za větou 2.3), že $(-1)(-1) = 1$. Dostáváme tedy $0 \leq 1$, což spolu s předpokladem $1 \leq 0$ dává $1 = 0$, a to je spor s definicí pole. Z předpokladu $0 \not\leq 1$ jsme vyvodili spor, platí tedy $0 < 1$.

2. Podle (2.2.1) z $x + y \leq y + z$ plyne $(x + z) + (-z) \leq (y + z) + (-z)$ to ovšem (podle asociativního zákona, proto, že $-z$ je vzhledem ke sčítání inverze z, a proto, že 0 je vzhledem ke sčítání neutrální prvek) znamená $x \leq y$.

4. Předpokládejme, že $x \leq y$. Pak podle (2.2.1) platí $x + (-x) \leq y + (-x)$, čili $0 \leq y + (-x)$. Nyní můžeme použít (2.2.2) na prvky $x + (-y)$ a z (o kterém předpokládáme $0 \leq z$). Dostáváme $0 \leq (y+(-x))z$ a podle distributivního zákona $0 \leq yz+(-x)z$. Teď si stačí uvědomit, že $(-x)z = -(xz)$ (to plyne z bodu 3. věty 2.3 a asociativity násobení) a aplikovat na nerovnost $0 \leq yz + (-(xz))$ a prvek xz vztah (2.2.1). Tím je dokázáno, že z $x \leq y$ plyne $xz \leq yz$.

Nyní můžeme snadno dokázat bod 3. Připusťme, že tvrzení tohoto bodu neplatí, tedy že existuje prvek x takový, že sice $0 < x$, ale $0 \not< x^{-1}$ (existence prvku x^{-1} vyplývá z definice pole; je totiž $x \neq 0$). To znamená, že $x^{-1} \leq 0$ (z úplnosti uspořádání) a (podle části bodu 4, kterou jsme již dokázali) že $x^{-1}x \leq 0x$. Podle bodu 1. věty 2.3 máme $1 \leq 0$, což je spor s bodem 1. této věty, který jsme již dokázali.

Zbývá nám dokázat druhou polovinu bodu 4: Je-li $0 < z$, je také $0 < z^{-1}$, a z $xz \leq yz$ vyplývá $xzz^{-1} \leq yzz^{-1}$, což znamená $x \leq y$.

Tím je celá věta dokázána.

Kromě sčítání a násobení zavádíme v poli ještě *odčítání*: $x - y = x + (-y)$ a *dělení*: x/y (nebo $\frac{x}{y}$) $= xy^{-1}$ (pouze pro $y \neq 0$; 0^{-1} neexistuje).

Prvky x, splňující $x > 0$ (případně $x < 0$) nazýváme *kladné* (případně *záporné*). Pokud splňují $x \geq 0$ (případně $x \leq 0$), nazýváme je *nezápornými* (případně *nekladnými*).

Jsou-li x, y dva prvky uspořádaného pole X, $x \leq y$, pak množinu prvků $z \in X$ takových, že $x < z < y$ nazýváme *otevřeným intervalem s koncovými body x a y* a označujeme (x, y).[2)] Množinu prvků $z \in X$ takových, že $x \leq z \leq y$, nazýváme *uzavřeným intervalem s koncovými body x a y* a označujeme $[x, y]$. Množinu prvků $z \in X$ takových, že $x \leq z < y$ (případně $x < z \leq y$) nazýváme

---

[1)]Úplnost uspořádání v poli je podmínka natolik přirozená, že míváme sklon považovat ji za samozřejmost. Uvědomme si ovšem, že i v praxi se setkáváme s neúplnými uspořádáními: Když na množině studentů položíme $s_1 < s_2$ (s_1 je horší student, než s_2), jestliže student s_1 má horší studijní průměr než student s_2, dostaneme neúplné uspořádání (definované samosebou předpisem: $s_1 \leq s_2$, jestliže $s_1 < s_2$ nebo $s_1 = s_2$). Pro dva různé studenty se stejným studijním průměrem totiž neplatí ani $s_1 < s_2$, ani $s_2 < s_1$ a samozřejmě ani $s_1 = s_2$.

[2)]Předpokládáme, že čtenář vždy rozliší, kdy se jedná o interval a kdy o uspořádanou dvojici.

polootevřeným intervalem s koncovými body x a y, uzavřeným v x a otevřeným v y (případně *otevřeným v x a uzavřeným v y*) a označujeme $[x, y)$ (případně $(x, y]$). Ve všech těchto případech prvek $y - x$ (který je určitě nezáporný), nazýváme *délkou* příslušného intervalu.

Dále klademe $(x, \infty) = \{y \in X \mid y > x\}$, $[x, \infty) = \{y \in X \mid y \geq x\}$, $(-\infty, x) = \{y \in X \mid y < x\}$ a $(-\infty, x) = \{y \in X \mid y \leq x\}$. Tyto množiny *nazýváme nevlastní intervaly*.

Občas se nám bude hodit toto označení: pro dvě množiny $Y, Z \subset X$ píšeme $Y \leq Z$, jestliže pro každé prvky $y \in Y$ a $z \in Z$ platí $y \leq z$. Podobně zavádíme značení $Y < Z$, $Y \geq Z$ a $Y > Z$. Vztah $\{y\} \leq Z$ zapisujeme $y \leq Z$ (a podobně v ostatních případech).

Pro množinu $Y \subset X$ klademe $-Y = \{-y \mid y \in Y\}$. Pro dvě množiny $Y, Z \subset X$ klademe $Y + Z = \{y + z \mid y \in Y, z \in Z\}$. Podobným způsobem definujeme množiny Y^{-1} (pokud $0 \notin Y$), $Y - Z$, $Y \cdot Z$ a Y/Z (pokud $0 \notin Z$).

2.3 Reálná čísla. Řekneme, že uspořádané pole X je *spojitě uspořádané*, jestliže ke každým dvěma neprázdným podmnožinám $Y, Z \subset X$ takovým, že $Y \leq Z$, existuje prvek $x \in X$, splňující podmínku $Y \leq x \leq Z$ (*axiom spojitosti*).

Každé spojitě uspořádané pole se nazývá *množina reálných čísel* a označuje symbolem $\mathbb{R}$. Prvky množiny reálných čísel se nazývají reálná čísla.

Abychom mohli zformulovat následující důležitou větu, uvedeme ještě definici, která by se hodila spíše do odstavce o uspořádaných množinách.

Podmnožina Y uspořádané množiny X se nazývá *shora (zdola) ohraničená*, má-li horní (dolní) závoru. Podmnožina, která je současně shora i zdola ohraničená, se nazývá *ohraničená*.

Věta 2.5 (o supremu). *Každá neprázdná shora ohraničená podmnožina $\mathbb{R}$ má supremum.*
D ů k a z. Nechť $Y \subset \mathbb{R}$ je neprázdná a shora ohraničená. Položme $Z = \{z \in \mathbb{R} \mid Y \leq z\}$ (Z je tedy množina všech horních závor množiny Y). Tato množina je rovněž neprázdná (Y je shora ohraničená — má horní závoru). Navíc platí $Y \leq Z$, takže podle axiomu spojitosti existuje prvek $x \in X$ takový, že $Y \leq x \leq Z$. Jelikož $Y \leq x$, je také x horní závora množiny Y, tedy $x \in Z$. Jelikož nadto $x \leq Z$, je $x = \min Z$. Dostáváme $x = \sup Y$.

Následující Věta o infimu se dá dokázat stejným způsobem jako Věta o supremu.

Věta 2.6 (o infimu). *Každá neprázdná zdola ohraničená podmnožina $\mathbb{R}$ má infimum.*

Nechť $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Podle definice intervalu je $y \geq [x, y]$. Současně ovšem platí $y \in [x, y]$, což znamená, že $y = \max[x, y]$. Podle věty 1.8 je tedy $y = \sup[x, y]$.

Uvažujme nyní otevřený interval (x, y). Opět platí, $y \geq (x, y)$, nicméně $y \notin (x, y)$. To znamená, že $y \neq \max(x, y)$. Má interval (x, y) maximum? Kdyby bylo $z = \max(x, y)$, muselo by být $z < y$ (to je totiž jediná možnost, která zbývá). K takovému číslu ovšem vždy najdeme prvek intervalu (x, y), který je větší. Například pro číslo $u = (z + y)/2$[3)] platí $z < u < y$ (ověřte!). To znamená, že $z \neq \max(x, y)$ a interval (x, y) tedy nemá maximum.

Číslo y je ovšem horní závorou intervalu (x, y), což, jak jsme ukázali před chvílí, pro žádné menší číslo neplatí. Máme tedy $y = \sup(x, y)$.

Následující věta uvádí často používané kriterium existence suprema v $\mathbb{R}$.

Věta 2.7. *Nechť $z \in \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$. Následující dvě podmínky jsou ekvivalentní:*
1. $z = \sup X$,
2. $z \geq X$ a ke každému $y < z$ existuje $x \in X$ takové, že $y \leq x \leq z$.
D ů k a z. Předpokládejme, že platí 1. Podle definice suprema je $z \geq X$. Zvolme číslo $y < z$. Kdyby neexistovalo $x \in X$ s uvedenou vlastností, bylo by x horní závorou množiny X menší než z, což je spor s 1.

Nechť platí podmínka 2. První její část říká, že z je horní závora množiny X. Druhá část zase, že žádná horní závora y není menší. Je tedy z nejmenší horní závora této množiny.

Podobná věta platí i pro infimum. Zkuste ji zformulovat a dokázat.

Poslední věta tohoto odstavce říká, že axiom spojitosti je ekvivalentní s větou o supremu.

[3)] Ach! Číslo 2 jsme ovšem zatím nedefinovali. Honem to tedy napravíme: položíme $2 = 1 + 1$; a k problému se ještě později vrátíme.

Věta 2.8. *Nechť X je uspořádané pole, jehož každá neprázdná shora ohraničená množina má supremum. Pak X je spojitě uspořádané.*
D ů k a z. Musíme dokázat, že v X platí axiom spojitosti. Zvolme tedy dvě neprázdné podmnožiny $Y, Z \subset X$, $Y \leq Z$ a hledejme prvek $x \in X$ splňující podmínku $Y \leq x \leq Z$.

Jelikož množina Z je neprázdná, je množina Y shora ohraničená. Podle předpokladu věty tedy má supremum. Ukážeme, že toto supremum splňuje podmínku $Y \leq \sup Y \leq Z$. První část této podmínky ($Y \leq \sup Y$) plyne okamžitě z definice suprema ($\sup Y$ je horní závora množiny Y). Druhá z věty2.7: Kdyby pro nějaký prvek $z \in Z$ platilo $z < \sup Y$, existoval by prvek $y \in Y$ větší než z, což by byl spor s předpokladem $Y \leq Z$. Můžeme tedy položit $x = \sup Y$.

2.4 Přirozená čísla. Řekneme, že množina $X \subset \mathbb{R}$ je *induktivní*, jestliže $1 \in X$ a jestliže z $x \in X$ plyne $x + 1 \in X$.

Příklady induktivních množin: $\mathbb{R}$, $(0, \infty)$, $[1, \infty)$.

Uvedeme nyní jednoduché tvrzení:

Lemma 2.9. *Průnik libovolného systému induktivních množin je induktivní množina.*
D ů k a z. Nechť S je systém induktivních množin. Ověříme, že množina $\cap S$ je induktivní. Pro libovolnou množinu $X \in S$ platí $1 \in X$ (X je induktivní). Proto $1 \in \cap S$. Jestliže $x \in \cap S$, pak $x \in X$ pro každé X. Jelikož každé $X \in S$ je induktivní množina, leží $x + 1$ v každé množině systému S. Platí tedy i $x + 1 \in \cap S$.

Množinou přirozených čísel nazýváme průnik systému všech induktivních podmnožin R. Značíme ji $\mathbb{N}$. Její prvky nazýváme přirozená čísla.

Věta 2.10 (základní vlastnosti množiny přirozených čísel). *1. $\mathbb{N}$ je induktivní.*
2. (princip matematické indukce) Jestliže $X \subset \mathbb{N}$ je induktivní množina, pak $X = \mathbb{N}$.
3. $\mathbb{N}$ má nejmenší prvek. Platí $\min \mathbb{N} = 1$.
4. Je-li $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$, pak $n - 1 \in \mathbb{N}$.
5. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $(n, n + 1) \cap \mathbb{N} = \emptyset$.
6. Každá neprázdná podmnožina $\mathbb{N}$ má nejmenší prvek.
7. (Archimedova vlastnost) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $n > x$.
D ů k a z. 1. Plyne z definice množiny přirozených čísel a předchozího lemmatu.

2. Z definice množiny přirozených čísel plyne, že $\mathbb{N} \subset X$.

3. Jelikož $\mathbb{N}$ je induktivní množina, je $1 \in \mathbb{N}$. Jelikož množina $[1, \infty)$ je induktivní (ověřte!), je $\mathbb{N} \subset [1, \infty)$. Každý prvek intervalu $[1, \infty)$ je ovšem větší nebo roven 1, totéž tedy platí i pro prvky množiny $\mathbb{N}$.

4. Nechť $n \neq 1$ a $n - 1 \notin \mathbb{N}$. Pak množina $\mathbb{N} \setminus \{n\}$ je induktivní a máme $\mathbb{N} \subset \mathbb{N} \setminus \{n\}$. To ovšem nastane jedině v případě, že $n \notin \mathbb{N}$.

5. Využijeme princip matematické indukce. Nechť X je množina všech přirozených čísel n, pro něž je $(n, n + 1) \cap \mathbb{N} = \emptyset$. Dokážeme, že tato množina je induktivní:

Nejprve je třeba ukázat, že $1 \in X$. Položme $Y = \{1\} \cup [2, \infty)$. Tato množina je induktivní (ověřte), platí tedy $\mathbb{N} \subset Y$. Navíc, jak snadno plyne z definice intervalů, $Y \cap (1, 2) = \emptyset$. To znamená, že $(1, 2) \cap \mathbb{N} = \emptyset$, a tedy $1 \in X$.

Nyní předpokládejme, že $n \in X$, a připusťme, že $n + 1 \notin X$, tedy že existuje přirozené číslo x, ležící v intervalu $(n + 1, n + 2)$. Platí $n + 1 < x < n + 2$ (z definice otevřeného intervalu) a $x \neq 1$ (podle bodu 3.). Je tedy $x - 1 \in \mathbb{N}$ (podle bodu 4.) a $n < x - 1 < n + 1$. To je spor s předpokladem $n \in X$. Je tedy i $n + 1 \in X$.

Dokázali jsme tedy, že množina X je induktivní. Z principu matematické indukce nyní plyne, že $X = \mathbb{N}$. To je ovšem přesně to, co jsme měli dokázat.[4)]

6. Buď $Y \subset \mathbb{N}$ podmnožina, která nemá nejmenší prvek. Položme $X = \{n \in \mathbb{N} \mid n < Y\}$[5)]. Platí $X \cap Y = \emptyset$. Ukážeme, že množina X je induktivní:

Jelikož 1 je nejmenší přirozené číslo (bod 3.), musí být $1 < Y$ nebo $1 \in X$. Druhý případ ovšem nenastává, jinak by totiž 1 byla nejmenším prvkem množiny Y (která nejmenší prvek nemá). Je tedy $1 < Y$, neboli $1 \in X$.

[4)]Co jsme měli dokázat?

[5)]Co znamená $n < Y$?

Nyní předpokládejme, že $n \in X$ (platí tedy $n < Y$) a podívejme se, zda $n + 1 \in X$. Mezi čísly n a $n + 1$ neleží žádný prvek množiny Y (bod 5.) a číslo $n + 1$ také není jejím prvkem — jinak by totiž bylo jejím nejmenším prvkem. Odtud ovšem plyne, že $n + 1 < Y$, neboli $n + 1 \in X$.

Tím jsme dokázali, že množina X je induktivní. Podle principu matematické indukce tedy $X = \mathbb{N}$, což znamená, že $Y = \emptyset$ (množiny X a Y jsou disjunktní). Tím jsme dokázali, že jedině prázdná podmnožina množiny $\mathbb{N}$ nemá nejmenší prvek.

7. Předpokládejme, že podmnožina všech reálných čísel x takových, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $n \le x$ je neprázdná, a označme si ji X. Máme $\mathbb{N} \le X$ a podle axiomu spojitosti existuje prvek $x \in \mathbb{R}$ takový, že $\mathbb{N} \le x \le X$. Určitě neplatí $x \in \mathbb{N}$ (to by bylo i $x + 1 \in \mathbb{N}$, což je ve sporu s $\mathbb{N} \le x$) a tedy ani $x - 1 \notin \mathbb{N}$ (to by bylo ve sporu s $x \notin \mathbb{N}$). Nyní ovšem vidíme, že $x - 1 > \mathbb{N}$ (interval $(x - 1, x)$ nepochybně žádné přirozené číslo neobsahuje; číslo o 1 větší by totiž bylo větší než x), a dostáváme se do sporu: Před chvílí jsme tvrdili, že $x \le X$, a teď nám vychází $x - 1 \in X$. Tento spor dokazuje, že množina X je prázdná.

Tím je věta dokázána.

Označení některých přirozených čísel: $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, $4 = 3 + 1$, $5 = 4 + 1$, $6 = 5 + 1$, $7 = 6 + 1$, $8 = 7 + 1$, $9 = 8 + 1$. Další přirozená čísla se dají jednoznačně vyjádřit pomocí dekadického zápisu, kterým se ovšem na tomto místě nebudeme zabývat.

Pro $n \in \mathbb{N}$ označujeme $\{1, \dots, n\} = \{m \in \mathbb{N} \mid m \le n\}$. Existuje-li bijekce mezi množinou X a touto množinou, říkáme, že množina X má *n prvků*. Množina se nazývá *konečná*, když je prázdná nebo existuje číslo $n \in \mathbb{N}$ takové, že tato množina má n prvků. Ostatní množiny se nazývají *nekonečné*.

Nyní můžeme uvést pojem *uspořádané n-tice*, který je zobecněním pojmu uspořádané dvojice. Nechť n je přirozené číslo. Předpokládejme, že pro každé číslo $i \in \{1, \dots, n\}$ máme dán objekt x_i.[6] *Uspořádaná n-tice* objektů $x_1, \dots, x_n$ je objekt onačovaný $(x_1, \dots, x_n)$ takový, že rovnost $(x_1, \dots, x_n) = (x'_1, \dots, x'_n)$ nastane, právě když pro každé číslo $i \in \{1, \dots, n\}$ platí $x_i = x'_i$.

Kartézským součinem množin $X_1, \dots, X_n$ rozumíme množinu

$$X_1 \times \ldots \times X_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in X_1, \ldots x_n \in X_n\} \tag{2.4.1}$$

Speciálně, jestliže pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ je $X_i = X$, píšeme

$$X_1 \times \ldots \times X_n = X^n \tag{2.4.2}$$

Tuto množinu nazýváme *n-tou kartézskou mocninou množiny X*.

Pro $i \in \{1, \dots, n\}$ definujeme *i-tou kartézskou projekci* $\mathrm{pr}_i : X_1 \times \ldots \times X_n \to X_i$ předpisem

$$\mathrm{pr}_i(x_1, \dots, x_n) = x_i. \tag{2.4.3}$$

Nechť X je množina. Libovolné zobrazení $a : \mathbb{N} \to X$ se nazývá *posloupnost prvků množiny X*. Pro $n \in \mathbb{N}$ označujeme $a_n = a(n)$ a posloupnost a zapisujeme (a_n), nebo $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2.5 Celá, racionální a iracionální čísla. Množinu $\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$ nazýváme *množinou celých čísel*. Množinu $\mathbb{Q} = \{p \cdot q^{-1} \mid p \in \mathbb{Z} \text{ a } q \in \mathbb{N}\}$ nazýváme *množinou racionálních čísel*. Množinu $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nazýváme *množinou iracionálních čísel*. Prvky těchto množin nazýváme (po řadě) *celá*, *racionální* a *iracionální čísla*.

Věta 2.11. *V každém otevřeném intervalu v $\mathbb{R}$ délky větší než 1 leží celé číslo.*

D ů k a z. Nechť $x, y \in \mathbb{R}$, $y - x > 1$. Hledáme celé číslo p takové, že $p \in (x, y)$.

1. Předpokládejme, že $x \ge 1$ a označme X množinu přirozených čísel větších než x. Tato množina je neprázdná (to plyne z Archimedovy vlastnosti množiny $\mathbb{N}$ — věta 2.10) a má nejmenší prvek (tatáž věta, bod 6.). Položme $p = \min X$. Platí $p - x \le 1$ (jinak by bylo $p - 1 \in X$), a tedy $p < x$.

2. Jestliže $x < 0$ a $y > 0$, pak podmínce vyhovuje 0.

3. Jestliže $y < 0$ (tím pádem i $x < 0$), pak interval $(-y, -x)$ obsahuje přirozené číslo (to jsme ukázali v prvním bodě), řekněme n. Číslo $p = -n$ leží v intervalu (x, y).

Věta 2.12. *V každém neprázdném otevřeném intervalu v $\mathbb{R}$ leží racionální číslo.*

[6] Často říkáme prostě: Mějme dány objekty $x_1, \dots, x_n$.

D ů k a z. Nechť $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Hledáme racionální číslo $p \cdot q^{-1}$ takové, že $p \cdot q^{-1} \in (x, y)$. Řešíme tedy dvojici nerovnic

$$x < p \cdot q^{-1} < y. \tag{2.5.1}$$

S těmito nerovnicemi je ekvivalentní[7)] podmínka

$$qx < p < qy. \tag{2.5.2}$$

Nyní budeme postupovat takto: Najdeme přirozené číslo q tak, aby délka intervalu (qx, qy) byla větší než 1. Pak, podle věty 2.11, bude zaručena existence celého čísla p, které v tomto intervalu leží. Bude tedy splněno (2.5.2) a tím i (2.5.1).

Podmínka, kterou musí splňovat hledané přirozené číslo q, je

$$qy - qx > 1. \tag{2.5.3}$$

Ta je ovšem ekvivalentní podmínce

$$q > \frac{1}{y - x}. \tag{2.5.4}$$

Hledané číslo q tedy existuje, vyplývá to z Archimedovy vlastnosti.

Tím je důkaz ukončen.

Podobná věta platí i pro iracionální čísla; zatím ovšem není v našich silách ji dokázat. Zatím, popravdě řečeno, ani nevíme, zda vůbec nějaké iracionální číslo existuje. (Všimli jste si?)

Příležitostně budeme používat následující pojmy, vztahující se k celým číslům: dělitelnost čísel, zbytek po dělení, soudělná a nesoudělná, sudá a lichá čísla. Věříme, že definice všech těchto pojmů, stejně jako jejich základní vlastnosti, je čtenář schopen zformulovat sám.

2.6 Funkce reálné proměnné. *Funkcí reálné proměnné* rozumíme libovolné zobrazení $f : X \to \mathbb{R}$, kde $X \subset \mathbb{R}$ (někdy píšeme $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

Funkce $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se nazývá *shora ohraničená (zdola ohraničená, ohraničená) na množině* $X' \subset X$, je-li taková množina $f(X') \subset \mathbb{R}$.

Největší hodnotou (maximem) funkce $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *na množině* $X' \subset X$ nazýváme číslo $\max f(X')$ (označení: $\max_{x \in X'} f(x)$). Řekneme, že funkce f této hodnoty *nabývá v bodě* x, jestliže $f(x) = \max f(X')$ (jestliže existuje maximum, existuje i tento bod; platí totiž $\max f(X') \in f(X')$).

Podobně: *Nejmenší hodnotou (minimem) funkce* $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *na množině* $X' \subset X$ nazýváme číslo $\min f(X')$ (označení: $\min_{x \in X'} f(x)$). Řekneme, že funkce f této hodnoty *nabývá v bodě* x, jestliže $f(x) = \min f(X')$.

Řekneme, že maximum (případně minimum) funkce f na množině $X' \subset X$ je *ostré*, jestliže existuje právě jeden bod této množiny, v němž funkce maxima (případně minima) nabývá. Je-li takových bodů víc, říkáme, že maximum (minimum) je *neostré*.

Maximum a minimum se souhrnně nazývají *extrémy*.

Jak už jsme řekli, bod, v němž funkce maxima nebo minima na dané množině nabývá, vždy existuje. To ale nemusí platit o supremu a infimu:

Supremem funkce $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *na množině* $X' \subset X$ nazýváme číslo $\sup f(X')$ (označení: $\sup_{x \in X'} f(x)$). *Infimem funkce* f *na množině* X' nazýváme číslo $\inf f(X')$ (označení: $\inf_{x \in X'} f(x)$).

Řekneme, že funkce $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je na množině $X' \subset X$ *rostoucí* (*nerostoucí*, *klesající*, *neklesající*), jestliže pro každé dva body $x, y \in X'$, $x < y$, platí $f(x) < f(y)$ ($f(x) \geq f(y)$, $f(x) > f(y)$, $f(x) \leq f(y)$). Je-li funkce f rostoucí (nerostoucí, klesající, neklesající) na celé množině X, nazývá se prostě *rostoucí* (*nerostoucí*, *klesající*, *neklesající*). Funkci, která je neklesacíci nebo nerostoucí (rostoucí nebo klesající), říkáme *monotonní* (*ryze monotonní*).

---

7) Dvojice (p, q) splňuje (2.5.1), právě když platí (2.5.2).

Řekneme, že funkce $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *konvexní* na intervalu $I \subset X$, jestliže pro každé tři body $x, y, z \in I$, $x < y < z$, platí

$$f(x)(z - y) + f(y)(x - z) + f(z)(y - x) \geq 0. \tag{2.6.1}$$

Řekneme, že funkce $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *konkávní* na intervalu $I \subset X$, jestliže pro každé tři body $x, y, z \in I$, $x < y < z$, platí

$$f(x)(z - y) + f(y)(x - z) + f(z)(y - x) \leq 0. \tag{2.6.2}$$

Funkce konvexní (konkávní) na celém svém definičním oboru se nazývá prostě *konvexní* (*konkávní*).

Funkce $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se nazývá *sudá* (*lichá*), jestliže pro každý bod $x \in X$ platí $-x \in X$ a $f(-x)x$ $(f(-x) - x)$.

Funkce $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se nazývá *periodická*, jestliže existuje číslo $p > 0$ takové, že $x \in X$, právě když $x + p \in X$ a jestliže $x \in X$, pak $f(x + p) = f(x)$. Číslo p se nazývá *perioda funkce* f.

Funkce $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taková, že množina $f(X)$ je jednoprvková, se nazývá *konstantní*. Je-li $f(X) = \{c\}$, píšeme $f = c$.[8] Konstantní funkce, stejně jako funkce $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, jsou speciálním případem afinních funkcí. Funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se nazývá *afinní*, existují-li čísla $p, q \in \mathbb{R}$ taková, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $f(x) = px + q$.

Množina $Y \subset \mathbb{R}^2$ se nazývá *přímka*, existují-li čísla $a, b \in \mathbb{R}$, ne současně rovna nule, taková, že

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0\} \tag{2.6.3}$$

Souvislost afinních funkcí s přímkami je jednoduchá:

Věta 2.13. *Funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je afinní, právě když je její graf přímka.*
D ů k a z. Důkaz si čtenář jistě rád udělá sám.

Uvedená věta neříká, že každá přímka je grafem nějaké funkce!

Afinní funkce $f(x) = px + q$ je rostoucí, právě když je $p > 0$, a klesající, právě když je $b < 0$.[9] Ukážeme první část tohoto tvrzení: Předpokládejme, že funkce f je rostoucí. Pak musí platit $f(0) < f(1)$ (podle definice rostoucí funkce), což ovšem vede k $q < p + q$, neboli $p > 0$. Naopak, nechť $p > 0$. Pak pro libovolné $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, platí $px < py$, čili $px + q < py + q$, což znamená, že $f(x) < f(y)$ a funkce f je rostoucí.

Každá afinní funkce je konvexní i konkávní. Pro libovolné tři body $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ totiž platí

$$\begin{aligned}
&f(x_1)(x_3 - x_2) + f(x_2)(x_1 - x_3) + f(x_3)(x_2 - x_1)\\
&\quad = (px_1 + q)(x_3 - x_2) + (px_2 + q)(x_1 - x_3) + (px_3 + q)(x_2 - x_1)\\
&\quad = p(x_1x_3 - x_1x_2) + q(x_3 - x_2) + p(x_2x_1 - x_2x_3) + q(x_1 - x_3) + p(x_3x_2 - x_3x_1) + q(x_2 - x_1)\\
&\quad = p(x_1x_3 - x_1x_2 + x_2x_1 - x_2x_3 + x_3x_2 - x_3x_1) + q(x_3 - x_2 + x_1 - x_3 + x_2 - x_1)\\
&\quad = 0.
\end{aligned}$$

Pokusme se nyní vyjasnit definici konvexní funkce. Označme $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, $y_3 = f(x_3)$. Podmínka 2.6.1 se dá přepsat na

$$y_2 \leq \frac{y_1(x_3 - x_2) + y_3(x_2 - x_1)}{x_3 - x_1}. \tag{2.6.4}$$

Položíme-li

$$g(x) = \frac{y_1(x_3 - x) + y_3(x - x_1)}{x_3 - x_1}, \tag{2.6.5}$$

dostaneme afinní funkci $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (to se snadno zjistí úpravou vztahu (2.6.5)), pro kterou platí $g(x_1) = y_1$, $g(x_3) = y_3$ (dosazením do (2.6.5)) a $g(x_2) \geq y_2$ z (2.6.4). Dostáváme tedy tento výsledek: funkce f je konvexní

---

[8] Například symbolem 2 tedy někdy označujeme číslo a někdy konstantní funkci!

[9] Definice funkce f, kterou jsme na tomto místě uvedli, je neúplná: neuvedli jsme ani definiční obor, ani obor hodnot této funkce. Dohodněme se, že v takových případech bude definičním oborem množina všech reálných čísel, která lze do pravé strany předpisu dosadit (v našem případě tedy $\mathbb{R}$) a oborem hodnot množina $\mathbb{R}$. V případě nejasností ovšem musíme být schopni kdykoli uvést přesnou definici!

na intervalu I, právě když pro každé tři body $x_1, x_2, x_3, x_1 < x_2 < x_3$, platí $f(x_2) \le g(x_2)$, kde g je afinní funkce, jejímž grafem je přímka, procházející body $(x_1, f(x_1))$ a $(x_3, f(x_3))$.

Nechť $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou dvě funkce. Funkci $(f + g) : X \to \mathbb{R}$, definovanou pro každé $x \in X$ předpisem $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, nazýváme *součtem funkcí* f *a* g. *Součinem* těchto funkcí nazýváme funkci $(f \cdot g) : X \to \mathbb{R}$, definovanou pro každé $x \in X$ předpisem $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$. Tím jsme definovali operace sčítání a násobení na množině $\mathbb{R}^X$.

Množina $\mathbb{R}^X$ s těmito operacemi ovšem není pole. Které podmínky z definice pole nesplňuje?

Uspořádání na množině $\mathbb{R}^X$ je definováno takto: Klademe $f \le g$, právě když pro každé $x \in X$ platí $f(x) \le g(x)$.

Ověřte, že takto definovaná relace na $\mathbb{R}^X$ je skutečně uspořádání. Je toto uspořádání úplné?

Mocninná funkce se definuje pomocí konečného počtu násobení.

Při definici mocninné funkce postupujeme takto: pro každé číslo $x \in \mathbb{R}$ položíme

$$\begin{aligned} x^1 &= x, \\ x^2 &= x \cdot x. \end{aligned} \tag{2.6.6}$$

Dostaneme funkce $\mathrm{pow}_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $\mathrm{pow}_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definované pro každé $x \in \mathbb{R}$ předpisy $\mathrm{pow}_1(x) = x$ a $\mathrm{pow}_2(x) = x^2$. Tyto definice pak zobecníme na libovolné přirozené číslo tím, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$ položíme $x^{n+1} = x^n \cdot x$ a $\mathrm{pow}_{n+1} = x^{n+1}$. Tento postup je založený na principu matematické indukce a k jeho použití nás opravňuje následující věta:

Věta 2.14. *Existuje právě jedna posloupnost funkcí* $(\mathrm{pow}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathrm{pow}_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *taková, že*

$$\mathrm{pow}_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \tag{2.6.7}$$

a pro každé $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{pow}_{n+1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \cdot \mathrm{pow}_n\,. \tag{2.6.8}$$

D ů k a z. Lze provést pomocí principu matematické indukce. (Ukáže se, že množina všech přirozených čísel m takových, že pro každé $n \in \{1, \dots, m\}$ existuje právě jedna funkce pow_n tak, že jsou splněny podmínky (2.6.7) a (2.6.8), je induktivní.)

Funkce pow_n z předchozí věty se nazývá *mocninná funkce s exponentem* n. Hodnota této funkce v bodě x se označuje x^n.

Mocninná funkce má následující základní vlastnosti:

Věta 2.15. *Pro každé* $m, n \in \mathbb{N}$ *platí:*
1. $\mathrm{pow}_m \cdot \mathrm{pow}_n = \mathrm{pow}_{m+n}$.
2. $\mathrm{pow}_m \circ \mathrm{pow}_n = \mathrm{pow}_{m\cdot n}$.
3. Je-li n *liché, je funkce* pow_n *lichá. Je-li* n *sudé, je funkce* pow_n *sudá.*
4. Funkce pow_n *je na intervalu* $(0, \infty)$ *rostoucí.*
5. Je-li $x > 1$ *a* $m > n$, *je* $x^m > x^n$. *Je-li* $0 < x < 1$ *a* $m > n$, *je* $x^m < x^n$.

D ů k a z. 1. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Ukážeme, že množina X všech čísel $m \in \mathbb{N}$, pro která platí $\mathrm{pow}_m \cdot \mathrm{pow}_n = \mathrm{pow}_{m+n}$, je induktivní. První podmínka definice induktivní množiny říká, že má platit $\mathrm{pow}_1 \cdot \mathrm{pow}_n = \mathrm{pow}_{1+n}$. Je tedy splněna (podle (2.6.7) a (2.6.8)) a máme $1 \in X$. Druhá podmínka říká, že z $\mathrm{pow}_m \cdot \mathrm{pow}_n = \mathrm{pow}_{m+n}$ musí plynout $\mathrm{pow}_{m+1} \cdot \mathrm{pow}_n = \mathrm{pow}_{m+1+n}$. To je ovšem splněno, opět díky (2.6.7) a (2.6.8).

2. Důkaz tohoto vztahu necháme na čtenáři (je třeba postupovat podobně, jako v prvním případě).

3. Nechť X je množina všech přirozených čísel, pro která tvrzení platí. Jelikož funkce $\mathrm{pow}_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ je lichá, $1 \in X$. Předpokládejme, že n je liché číslo a funkce pow_n lichá. Pak $\mathrm{pow}_{n+1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \cdot \mathrm{pow}_n$ a funkce pow_{n+1} je sudá (jako součin dvou lichých funkcí — viz cvičení 27). Podobně, je-li číslo n sudé a funkce pow_n sudá, je funkce pow_{n+1} rovna součinu liché a sudé funkce a je lichá. Celkově, $n + 1 \in X$.

4. Opět využijeme princip matematické indukce.[10)] Pro $n = 1$ je $\mathrm{pow}_n = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, což je rostoucí funkce.

[10)]Co bychom si bez něj počali?

Nyní nechť $n \in \mathbb{N}$. Je-li funkce pow_n na intervalu $(0, \infty)$ rostoucí, pak pro každé $x, y \in (0, \infty)$, $x < y$, platí

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= x \cdot x^n && \text{(definice funkce } \mathrm{pow}_{n+1}) \\ &< y \cdot x^n && \text{(jelikož } x^n > 0 \text{ a } x < y) \\ &< y \cdot y^n && (y > 0 \text{ a } \mathrm{pow}_n \text{ je rostoucí}) \\ &= y^{n+1} && \text{(definice funkce } \mathrm{pow}_{n+1}) \end{aligned}$$

a funkce pow_{n+1} je na intervalu $(0, \infty)$ rostoucí.

5. Je-li $x > 1$, je $x^{n+1} > x^n$ — to plyne z věty 2.4 tvrzení 4., s neostrou nerovností nahrazenou ostrou[11] (viz cvičení 7). Podobně, je-li $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ a $x > 1$, $x^{n+k} > x^n$, pak $x^{n+k+1} > x^n$. První část tvrzení tedy plyne z principu matematické indukce. Druhá část tvrzení se dokáže podobně.

Na závěr uvedeme ještě několik příkladů funkcí.

Absolutní hodnotou reálného čísla x nazýváme číslo $|x|$, které je rovno x, je-li $x \geq 0$, a $-x$, jestliže $x < 0$. Dostáváme funkci $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Celou částí $[x]$ reálného čísla x nazýváme největší celé číslo, které je menší nebo rovno x. Dostáváme funkci $[\cdot] : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Pro reálné číslo x klademe $\chi(x) = 0$, je-li $x \in \mathbb{I}$ a $\chi(x) = 1$, je-li $x \in \mathbb{Q}$. Dostáváme *Dirichletovu funkci* $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Riemannova funkce $\varrho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definována takto: Jestliže $x \in \mathbb{I}$, je $\varrho(x) = 0$. Jestliže $x \in \mathbb{Q}$, pak existuje celé číslo p a přirozené číslo q, která jsou nesoudělná a $x = p/q$. Klademe $\varrho(x) = 1/q$.

Příklady

1. *Rozhodněte, které z množin* $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}$ *s operacemi sčítání a násobení jsou pole a která z nich jsou spojitě uspořádaná.*
Řešení: Dokážeme, že množina $\mathbb{Z}$ s operacemi sčítání a násobení celých čísel není pole. Budeme ověřovat podmínky uvedené v definici pole. Sčítání na množině $\mathbb{Z}$ je komutativní a asociativní operace s neutrálním prvkem 0 (a to je celé číslo) taková, že každé celé číslo má vzhledem k této operaci inverzi v množině $\mathbb{Z}$ (číslo opačné). Násobení na množině $\mathbb{Z}$ je komutativní a asociativní operace s neutrálním prvkem 1, ale existuje celé číslo různé od 0 takové, že nemá v $\mathbb{Z}$ vzhledem k této operaci inverzi. $\mathbb{Z}$ s operacemi sčítání a násobení není pole. Ostatní případy necháváme na čtenáři.

Podívejme se, zda pole $\mathbb{Q}$ s operacemi sčítání a násobení je spojitě uspořádané. Zvolme libovolně číslo $z \in \mathbb{I}$ a uvažujme dvě podmnožiny X, Y množiny $\mathbb{Q}$: $X = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < z\}$ a $Y = \{r \in \mathbb{Q} \mid r > z\}$ Množiny X, Y jsou neprázdné a platí $X \leq Y$. Předpokládejme, že existuje $x \in \mathbb{Q}$ takové, že $X \leq x \leq Y$. Potom ale buď $x > z$ nebo $x < z$ (možnost $x = z$ nastat nemůže protože $z \in \mathbb{I}$ a $x \in \mathbb{Q}$). Pokud $x > z$, tak v intervalu (z, x) existuje nějaké racionální číslo (věta 2.12) a neplatí tedy $x \leq Y$. Pokud $x < z$, tak podle stejné věty existuje nějaké racionální číslo v intervalu (x, z) a neplatí tedy $X \leq x$. Z předpokladu, že existuje racionální číslo s uvedenou vlastností, jsme tedy v obou případech dostali spor. Takové racionální číslo tedy neexistuje a $\mathbb{Q}$ není spojitě uspořádané pole.[12]

2. *Uvažujme Dirichletovu funkci* χ. *Najděte funkce* χ^2, $[] \circ \chi$, $\chi(1-\chi)$, $\chi \circ \chi$, $\chi \circ []$.
Řešení: Ukážeme, že $\chi(1-\chi) = 0$. Pokud $x \in \mathbb{Q}$, tak $\chi(x) = 0$ a tedy $(\chi(1-\chi))(x) = 0(1-0) = 0$. Pokud $x \in \mathbb{I}$, tak $\chi(x) = 1$ a tedy $(\chi(1-\chi))(x) = 1(1-1) = 0$. Zbylé případy necháváme čtenáři.

3. *Dokažte, že funkce* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - |x|$ *je na intervalu* $(-\infty, 0)$ *rostoucí a na intervalu* $[0, \infty)$ *konstatní.*

---

[11] Znaménkům $\leq$ a $\geq$ se někdy říká neostrá nerovnost, znaménkům $<$ a $>$ ostrá.

[12] Tento důkaz je tedy založen na existenci alespoň jednoho iracionálního čísla. To jsme sice zatím neukázali, ale časem na to dojde.

Řešení: Buďte $x, y \in (-\infty, 0)$ taková, že $x < y$. Potom $f(x) = x - |x| = x - (-x) = x + x = 2x$, obdobně $f(y) = 2y$ tedy platí $f(x) < f(y)$. To ovšem znamená, že funkce f je na intervalu $(-\infty, 0)$ rostoucí.

Nechť $x \geq 0$. Potom $f(x) = x - |x| = x - x = 0$. To znamená, že funkce f je na intervalu $[0, \infty)$ konstantní.

4. *Uvažujme stejnou funkci, jako v předcházejícím příkladě. Dokažte, že tato funkce je na $\mathbb{R}$ konkávní.*
Řešení: Máme dokázat, že pro každé tři body x, y, z takové, že $x < y < z$, platí

$$f(x)(z-y) + f(y)(x-z) + f(z)(y-x) \leq 0$$

Nyní mohou nastat následující možnosti:
1. $x, y, z \in (-\infty, 0)$. Potom

$$\begin{aligned}
&f(x)(z-y) + f(y)(x-z) + f(z)(y-x)\\
&\quad = (x-(-x))(z-y) + (y-(-y))(x-z) + (z-(-z))(y-x)\\
&\quad = 2x(z-y) + 2y(x-z) + 2z(y-x)\\
&\quad = 2(xz - xy + yx - yz + zy - zx)\\
&\quad = 0.
\end{aligned}$$

2. $x, y \in (-\infty, 0)$ a $z \in [0, \infty)$

$$\begin{aligned}
&f(x)(z-y) + f(y)(x-z) + f(z)(y-x)\\
&\quad = (x-(-x))(z-y) + (y-(-y))(x-z) + (z-z)(y-x)\\
&\quad = 2x(z-y) + 2y(x-z) + 0(y-x)\\
&\quad = 2(xz - xy + yx - yz)\\
&\quad = 2z(x-y)\\
&\quad \leq 0.
\end{aligned}$$

3. $x \in (-\infty, 0)$ a $y, z \in [0, \infty)$. Potom

$$\begin{aligned}
&f(x)(z-y) + f(y)(x-z) + f(z)(y-x)\\
&\quad = (x-(-x))(z-y) + (y-y)(x-z) + (z-z)(y-x)\\
&\quad = 2x(z-y) + 0(x-z) + 0(y-x)\\
&\quad = 2x(z-y)\\
&\quad \leq 0.
\end{aligned}$$

4. $x, y, z \in [0, \infty)$. Potom

$$\begin{aligned}
&f(x)(z-y) + f(y)(x-z) + f(z)(y-x)\\
&\quad = (x-x)(z-y) + (y-y)(x-z) + (z-z)(y-x)\\
&\quad = 0(z-y) + 0(x-z) + 0(y-x)\\
&\quad = 0.
\end{aligned}$$

Jak je vidět, ve všech případech jsme zjistili, že $f(x)(z-y) + f(y)(x-z) + f(z)(y-x) \leq 0$. Z definice vyplývá, že uvedená funkce je konkávní.

5. *Buď* $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x}{|x|}.$$

Zjistěte, je-li funkce f sudá, lichá.
Řešení: Pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ platí

$$f(-x) = \frac{-x}{|-x|} = -\frac{x}{|x|} = -f(x).$$

To znamená, že funkce f je lichá. Zároveň ale

$$f(1) = \frac{1}{|1|} = \frac{1}{1} = 1,$$

a tedy f není sudá (proč?).

6. *Nechť* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2 + (-1)^{[x]}$. *Dokažte, že funkce* f *je periodická a určete její periodu.*
Řešení: Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $[x] \le x \le [x] + 1$ a tedy $[x] + 2 \le x + 2 \le [x] + 2 + 1$. $[x] + 2$ je tedy největší celé číslo, které není větší než $x + 2$ a tedy $[x + 2] = [x] + 2$. Dostáváme

$$\begin{aligned} f(x+2) &= 2 + (-1)^{[x+2]} \\ &= 2 + (-1)^{[x]+2} \\ &= 2 + (-1)^{[x]}(-1)^2 \\ &= 2 + (-1)^{[x]} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Funkce f je tedy periodická s periodou 2.

Cvičení

1. Je skládání zobrazení komutativní operace?
2. Uveďte příklad neasociativní binární operace.
3. Co je neutrálním prvkem operace sjednocení, průnik, rozdíl podmnožin množiny X a kompozice zobrazení z X do X?
4. Uvažujme množinu $\exp X$ s operací sjednocení. Má každý prvek $Y \in \exp X$ inverzi vzhledem k uvažované operaci?
5. Řekneme, že dvě celá čísla m, n jsou v relaci $\sim$, jestliže jejich rozdíl je celočíselný násobek trojky. Ověřte, že se jedná o ekvivalenci. Příslušnou faktorovou množinu označíme $\mathbb{Z}_3$ a jednotlivé třídy rozkladu $\bar{0} = [0]_\sim$, $\bar{1} = [1]_\sim$, $\bar{2} = [2]_\sim$. Na množině $\mathbb{Z}_3$ definujeme operaci sčítání takto: $[m]_\sim + [n]_\sim = [m + n]_\sim$. Operaci násobení definujeme stejně: $[m]_\sim \cdot [n]_\sim = [m \cdot n]_\sim$. Ověřte, že tyto operace jsou korektně definovány.[13)] Ověřte, že množina $\mathbb{Z}_3$ s takto definovanými operacemi je pole. Uvažujme na množině $\mathbb{Z}_3$ relaci $\lessdot$, jejíž graf je množina $\{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{2}), \}$. Ověřte, že se jedná o uspořádání. Zjistěte, zda je toto uspořádání slučitelné se zmíněnými operacemi sčítání a násobení.
6. Dokažte, že pro každá dvě $x, y \in \mathbb{R}$ jsou vztahy $x \le y$, $0 \le y - x$, $x - y \le 0$ a $-y \le -x$ ekvivalentní.
7. Dokažte, že pro každá tři reálná čísla $x, y, z \in \mathbb{R}$ platí:
   a) Jestliže $x \le y$, pak $x + z < y + z$. b) Jestliže $0 < x$ a $0 < y$, pak $0 < xy$.
   c) Jestliže $0 < z$, jsou vztahy $x < y$ a $xz < yz$ ekvivalentní.
8. Dokažte, že množina $\mathbb{N}$ je nekonečná.
9. Dokažte, že každá konečná pomnožina $\mathbb{R}$ má maximum a minimum.
10. Ukažte, že pro každá dvě reálná čísla x, y platí:
    a) $(-x) \cdot (-y) = xy$; b) $|-x| = |x|$;
    c) $|xy| = |x| \cdot |y|$; d) $|x + y| \le |x| + |y|$;
    e) $||x| - |y|| \le |x - y|$.
11. Ukažte, že pro každá tři reálná čísla x, y, z platí: Jestliže $x < y$ a $z < 0$, pak $xz > yz$.
12. Ukažte, že pro každá tři reálná čísla $x, y, \varepsilon, \varepsilon > 0$ platí: $|x - y| < \varepsilon$ právě tehdy, když $x \in (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$.
13. Zjistěte, zda pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí:

[13)] Ověřte, že je-li $[m]_\sim = [m']_\sim$ a $[n]_\sim = [n']_\sim$, je i $[m + n]_\sim = [m' + n']_\sim$. Podobně pro násobení.

a) $x/x = 1$; b) $x/x^2 = 1/x$;

c) $x^2/x = x$.

14. Zjistěte, pro která $x \in \mathbb{R}$ jest:

a) $x < -2x$; b) $x^2 - 5x + 6 > 0$;

c) $|x+2| + 3|x-1| - 2|x-3| > 0$; d) $\dfrac{(x-1)(x+2)(x-3)}{(x+4)(x-5)(x+6)} > 0$.

15. Najděte reálná čísla x, y taková, že

a) $x - y < x + y$; b) $xy > x/y$.

16. Rozhodněte, zda existují taková dvě reálná čísla x, y, že $xy > x$ a $xy > y$ (resp. $xy < y$ a $xy < x$).

17. Rozhodněte, zda existují taková dvě reálná čísla x, y, že $x + y < x$ (resp. $x + y < x$ a $x + y < y$).

18. Najděte supremum, infimum, maximum a minimum množin $(-3, 2)$, $\{5, 0\}$, $\{\frac{1}{7}, \frac{1}{10}\}$, $\{-4, 4\}$, $\{-7\}$, $[1, \infty)$.

19. Najděte $\sup X$ a $\inf X$, jestliže

a) $X = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$; b) $X = \{r \in \mathbb{Q} \mid r > 0\}$;

c) $X = \{(n+1)/n \mid n \in \mathbb{N}\}$; d) $X = \{1 + 1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

20. Najděte maximum, minimum, suppremum a infimum (jestliže existují) následujících množin:

a) množina všech celých záporných čísel, b) množina všech záporných čísel,

c) intervaly $(0, 1)$, $[-2, 1]$, $(0, 3]$, $[0, \infty)$, d) množina $[0, 1] \cup [2, 3]$,

e) množina všech iracionálních čísel z $(0, 1)$, f) množina všech racionálních čísel z $(0, 1)$,

g) množina $\{n + 1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$, h) množina $\{(-1)^n \cdot (n/(n+1)) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

21. Najděte maximum, minimum, suppremum a infimum (jestliže existují) funkce f na množině Y, jestliže :

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ a $Y = \{(-1)^n/n \mid n \in \mathbb{N}\}$;

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x$ a $Y = \{(-1)^n(n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$;

c) $f = \varrho$ a $Y = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

22. Platí věta o supremu (infimu) i v množinách $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, Q?

23. Předpokládejme, že množiny $X, Y \subset \mathbb{R}$ mají supremum. Nalezněte:

a) $\sup(X \cup Y)$; b) $\inf(-X)$;

c) $\inf(1/X)$ (za předpokladu $0 < X$).

24. Existuje funkce, která je zároveň sudá i lichá?

25. Ukažte, že pro každou lichou funkci f platí: Jestliže $0 \in \mathrm{Dom}\, f$, potom $f(0) = 0$.

26. Buď $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkce taková, že: Jestliže $x \in \mathrm{Dom}\, f$, potom $-x \in \mathrm{Dom}\, f$. Ukažte, že funkci f lze vyjádřit jako součet sudé a liché funkce.

Návod: $f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$.

27. Buďte $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sudé funkce, buďte $g_1, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liché funkce. Rozhodněte, které z uvedených funkcí jsou sudé (resp. liché): $f_1 + f_2$, $g_1 + g_2$, $f_1 \cdot f_2$, $g_1 \cdot g_2$, $f_1 + g_1$, $f_1 \cdot g_1$, $f_1 \circ g_1$, $g_1 \circ f_1$.

28. Zjistěte, které z následujících funkcí jsou sudé resp. liché:

a) $f(x) = x/|x|$; b) $f(x) = x^4 - 2x^2$;

c) $f(x) = (2-x)/(2+x)$; d) $f(x) = x - x^3/6 + x^5/120$;

e) $f(x) = 2$.

29. Existuje ke každé funkci funkce inverzní? Může existovat inverzní funkce k funkci periodické?

30. Ukažte, že každá z následujících funkcí je sama k sobě inverzní:

a) $f(x) = x$; b) $f(x) = -x$; c) $f(x) = 1/x$;
d) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$; e) $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x-2}$; f) $f(x) = \dfrac{ax+b}{x-a}$ $(a, b \in \mathbb{R})$.

31. Dokažte následující tvrzení: Buď $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkce rostoucí na každém intervalu $(-n, n)$, kde $n \in \mathbb{N}$. Pak je f rostoucí na $\mathbb{R}$.

32. Sestrojte rostoucí funkce f, g na intervalu (x, y) tak, aby funkce $f \cdot g$ nebyla rostoucí na (x, y).

33. Existuje funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je současně rostoucí na $\mathbb{R}$ a lichá (resp. rostoucí na $\mathbb{R}$ a sudá)?

34. Dokažte následující tvrzení: Buďte $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkce takové, že f je neklesající na $\mathbb{R}$ a $f + g$ je klesající na $\mathbb{R}$. Pak g je klesající na $\mathbb{R}$.

35. Dokažte následující tvrzení: Buď $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkce neklesající na intervalu (x, y). Pak je pro každé $z \in (x, y)$ množina $f^{-1}(z) \cap (x, y)$ prázdná nebo jednoprvková nebo interval.

36. Rozhodněte, na kterých intervalech jsou dané funkce rostoucí a na kterých klesající:

a) $f(x) = x^2$; b) $f(x) = x^3$; c) $f(x) = |x|$;
d) $f(x) = x + |x|$.

37. Je-li funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rostoucí, je nutně

a) funkce $2f$ rostoucí, b) funkce $-f$ klesající, c) funkce f^2 rostoucí?

38. Nechť funkce f i g jsou definovávy na stejném intervalu.

a) Jsou-li funkce f i g rostoucí, je funkce $f + g$ také rostoucí?

b) Najděte rostoucí funkci f a klesající funkci g tak, aby funkce $f + g$ byla rostoucí.

39. Sestrojte funkce $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tak, aby platilo $f \cdot g = 0$ a neplatilo ani $f(X) = \{0\}$ ani $g(X) = \{0\}$. Je možné nalézt takové funkce pro libovolnou neprázdnou množinu X?

40. Rozhodněte, zda platí následující tvrzení: Buď $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkce taková, že pro každý otevřený interval J platí $f(J) \subset J$. Pak $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

41. Načrtněte graf funkce f, je-li:

a) $f(x) = |x+1| + |x-1|$; b) $f(x) = |x-1|$; c) $f(x) = -x|x|$;
d) $f(x) = (x-1)/(x+1)$.

42. Nechť $p : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $p(x) = \dfrac{1}{x} - 1$. Ověřte, že platí:

a) $p + p \circ (-\mathrm{id}_{\mathbb{R}}) = -2$; b) $p \circ (2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}}) = \frac{1}{2}(p-1)$; c) $p \circ (1 - \mathrm{id}_{\mathbb{R}}) = \dfrac{1}{p}$;
d) $\dfrac{-1}{p \circ (\mathrm{id}_{\mathbb{R}} + 1)} = p + 2$; e) $\dfrac{1}{p+1} = p \circ \left(\dfrac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}\right) + 1$.

43. Známe-li graf funkce $f(x)$, jak sestrojíte grafy funkcí $f(-x)$, $-f(x)$, $f(x+c)$, $f(x)+c$, $a \cdot f(x)$, $f(a \cdot x)$?

44. Jsou dány funkce f a g. Najděte $|f|$, $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, f/g, $f \circ g$, $g \circ f$, platí-li:

a) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x$, $g(x) = 2 - x$;

b) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pro } x \le 0, \\ x, & \text{pro } x > 0, \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 0, & \text{pro } x \le 0, \\ -x^2, & \text{pro } x > 0; \end{cases}$

c) $f, g : [0, 2] \to [0, 2]$, $f(x) = \begin{cases} x, & \text{pro } x \in [0, 1], \\ 2 - x, & \text{pro } x \in (1, 2], \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x, & \text{pro } x \in \mathbb{Q}, \\ 2 - x, & \text{pro } x \in \mathbb{I}. \end{cases}$

45. Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{pro } x < 1, \\ 2x - 1, & \text{pro } x \ge 1, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & \text{pro } x < 0, \\ x + 2 & \text{pro } x \ge 0. \end{cases}$$

a) Určete, pro která x platí $f(x) = 0$, $g(x) = 0$, $f(x) = x$, $g(x) = x$, $f(x) = g(x)$, $f(g(x)) = 1$, $g(f(x)) = 1$.

b) Dokažte, že $f(x) \ge 0$ pro všechna x.

c) Dokažte, že $g(f(x)) > 0$ pro všechna x.

d) Zjistěte, zda existuje inverzní funkce k funkcím f, g.

e) Určete funkci $f \circ g$ a načrtněte její graf.

46. Buďte f periodická funkce s periodou p a n přirozené číslo. Ukažte, že číslo np je také perioda této funkce.

47. Ukažte, že každá konstantní funkce je periodická.

48. Udejte příklad nekonstantní periodické funkce, která nemá nejmenší periodu.

49. Které z následujících funkcí $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou periodické:

a) $f(x) = [x]$; b) $f(x) = x - [x]$.

50. Nechť funkce $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou periodické se stejnou periodou. Dokažte, že funkce $f + g$ a $f \cdot g$ jsou periodické.

51. Je součet dvou periodických funkcí vždy periodická funkce?

52. Určete $\sup_{x \in X} f(x)$, $\inf_{x \in X} f(x)$, $\max_{x \in X} f(x)$, $\min_{x \in X} f(x)$, je-li:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ a $X = \mathbb{R}$; b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ a $X = (-3, 2)$;

c) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$ a $X = (-\infty, 0)$.

53. Buďte $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ohraničené funkce, nechť pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $h(x) \neq 0$. Rozhodněte, zda funkce $f + g$, $f \cdot g$, $1/h$, g/h jsou ohraničené na $\mathbb{R}$.

54. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ukažte, že je f konvexní na $\mathbb{R}$ jestliže

a) $f(x) = |x| - x$; b) x^2.

3. Základy topologie

V této kapitole uvádíme nejzákladnější topologické pojmy nutné k porozumění následujícím kapitolám. Čtenář zde nalezne definice pojmů: topologie, indukovaná topologie, okolí bodu, kompaktní množina, spojité zobrazení, souvislá množina, homeomorfismus a další. Dále zde uvádíme některá základní tvrzení týkající se definovaných pojmů.

Příklady a cvičení k této kapitolce byly sloučeny s příklady a cvičení v následující kapitole, neboť se týkají pouze přirozené topologie na $\mathbb{R}$.

3.1 Topologický prostor. Na množině X je zadána *topologie*, je-li určen systém τ podmnožin X splňující podmínky (*axiomy topologie*):
1. $\emptyset, X \in \tau$;
2. jsou-li $Y, Z \in \tau$ potom $Y \cap Z \in \tau$;
3. je-li $S \subset \tau$ potom $\cup S \in \tau$.

Prvkům systému τ říkáme *otevřené* množiny, množině, na níž je zadána topologie, *topologický prostor*. Otevřené množině obsahující bod $x \in X$ budeme říkat *okolí bodu* x. Množina $Y \subset X$ se nazývá *uzavřená*, pokud $X \setminus Y$ je otevřená.

Často používaným kritériem toho, zda množina Y je otevřená, je to zda, ke každému bodu $y \in Y$ existuje jeho okolí U takové, že $U \subset Y$. Důkaz tohoto tvrzení přenecháváme čtenáři.

Druhý axiom topologie lze snadno rozšířit na libovolný konečný systém množin. Tohoto faktu budeme využívat.

Příkladem topologického prostoru je $\mathbb{R}$ s přirozenou topologií. Tomuto prostoru je věnována následující kapitola, pro ilustraci si uvedeme definici přirozené topologie již nyní. Množina $U \subset \mathbb{R}$ je nazývá *otevřená v přirozené topologii* $\mathbb{R}$, jestliže ke každému bodu $x \in U$ existuje otevřený interval I takový, že $x \in I \subset U$.

Snadno zjistíme, že interval $(0, 1)$ je otevřená množina, ale interval $[0, 1]$ ani $(0, 1]$ otevřenou množinou není.

Nechť $Y \subset X$ a τ topologie na X, položme

$$\tau_Y = \{Y \cap U \mid U \in \tau\}. \tag{3.1.1}$$

Věta 3.1. *Vztah (3.1.1) definuje topologii na množině Y.*
D ů k a z. Ověříme postupně všechny axiomy topologie.
Axiom 1: V definici (3.1.1) jednou z množin U je i množina $\emptyset$ (topologie na X přece splňuje první axiom topologie). Dostáváme, že $\emptyset \in \tau_Y$. Podobně jednou z množin U bude i X, máme tedy $Y \in \tau_Y$.
Axiom 2. Nechť $U', V' \in \tau_Y$ ze vztahu (3.1.1) plyne, že existují množiny $U, V \in \tau$ takové, že $U' = Y \cap U$ a $V' = Y \cap V$. Máme

$$\begin{aligned} U' \cap V' &= (Y \cap U) \cap (Y \cap V) \\ &= (Y \cap Y) \cap (U \cap V) && \text{(asociativita a komutativita)} \\ &= Y \cap (U \cap V) \in \tau_Y. && \text{(definice } \tau_Y\text{)} \end{aligned}$$

Axiom 3. Nechť $S \subset \tau_Y$, ukážeme, že $\cup S \in \tau_Y$. Ze vztahu (3.1.1) plyne, že existuje systém $S' \subset \tau$ takový, že $S = \{Y \cap U \mid U \in S'\}$.

$$\begin{aligned} \cup S &= \cup\{Y \cap U \mid U \in S'\} \\ &= Y \cap \big(\cup \{U \mid U \in S'\}\big) && \text{(ověřte!)} \\ &= Y \cap (\cup S') \in \tau_Y. && (\cup S' \in \tau) \end{aligned}$$

Topologii definované vztahem (3.1.1) se říká *indukovaná topologie* na Y. Množinu Y s touto topologií nazýváme *topologický podprostor* topologického prostoru X.

Nechť Y je podmnožinou X, pak prvek $x \in X$ splňuje právě jednu z následujících podmínek:
1. existuje okolí U bodu x takové, že $U \subset Y$;
2. existuje okolí U bodu x takové, že $U \subset X \setminus Y$;
3. pro každé okolí U bodu x je splněno $U \cap Y \neq \emptyset$ a $U \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset$.

Bod splňující první (resp. druhou, resp. třetí) podmínku se nazývá *vnitřním* (resp. *vnějším*, resp.*hraničním*) *bodem množiny* Y. Množinu všech vnitřních bodů množiny Y nazýváme *vnitřek* množiny Y a značíme $\operatorname{int} Y$. (Obdobně definujeme *vnějšek* množiny Y, který značíme $\operatorname{ext} Y$, a *hranici* množiny Y označovanou $\operatorname{fr} Y$.) Množinu $\operatorname{cl} Y = Y \cup \operatorname{fr} Y$ nazveme *uzávěrem* množiny Y. Množina $Y \subset X$ je *hustá* v X, pokud $\operatorname{cl} Y = X$. Bod x je *hromadný bod množiny* Y, jestliže v každém okolí x leží bod množiny Y různý od x.

Jako lehké cvičení si zkuste dokázat, že pro každou uzavřenou množinu Y platí $\operatorname{cl} Y = Y$.

To, že pro každý prvek $x \in X$ platí právě jedna z podmínek 1–3, vede k závěru, že máme-li libovolnou množinu $Y \subset X$ potom $\operatorname{int} Y \cup \operatorname{fr} Y \cup \operatorname{ext} Y = X$ a že množiny $\operatorname{int} Y$, $\operatorname{fr} Y$, $\operatorname{ext} Y$ jsou po dvou disjunktní.

Z toho, jak jsou definovány, je vidět že množiny $\operatorname{int} Y$ a $\operatorname{ext} Y$ jsou otevřené a přidáme-li fakt, že sjednocení vnitřku vnějšku a hranice je celý prostor, dostaneme, že hranice je uzavřená množina.

Topologický prostor X je *nesouvislý*, pokud existují neprázdné otevřené disjunktní množiny U, V takové, že $U \cup V = X$. Topologický prostor je *souvislý*, není-li nesouvislý. Podmnožina Y topologického prostoru X se nazývá *souvislá*, je-li souvislý topologický prostor Y s indukovanou topologií. Podobně pro nesouvislost.

Například množina $X = (0, 1) \cup \{3\}$ je v $\mathbb{R}$ nesouvislá. (Množinami U a V jsou zde $U = (0, 1)$, $V = \{3\}$[1)])

Topologický prostor X se nazývá *Hausdorffův*, jestliže pro každé dva různé body $x, y \in X$ existuje okolí U bodu x a okolí V bodu y takové, že $U \cap V = \emptyset$.

Řekneme, že systém S podmnožin X *pokrývá* množinu (je *pokrytím* množiny) $A \subset X$, jestliže $\cup S \supset A$. Pokrytí se nazývá *konečné*, jestliže systém S je konečný.[2)] Pokrytí je *otevřené*, jestliže všechny množiny z S jsou otevřené. Libovolnou podmnožinu $S' \subset S$ nazveme *podpokrytím* pokrytí S množiny A, jestliže S' je pokrytím A.

Podmnožina A topologického prostoru X se nazývá *kompaktní*, jestliže ke každému otevřenému pokrytí množiny A existuje jeho konečné podpokrytí množiny A.

Věta 3.2. *V Hausdorffově topologickém prostoru je každá kompaktní množina uzavřená.*
D ů k a z. Buďte X Hausdorffův topologický prostor, A jeho kompaktní podmnožina. Pokud $X \setminus A = \emptyset$, což je otevřená množina, je A uzavřená. Předpokládejme, že $X \setminus A \neq \emptyset$, zvolme libovolné $x \in X \setminus A$, ke každému bodu $a \in A$ existuje okolí U_a bodu x a okolí V_a bodu a takové, že $U_a \cap V_a = \emptyset$.[3)] Systém $\{V_a \mid a \in A\}$ je otevřeným pokrytím A, existuje tedy jeho konečné podpokrytí $S = \{V_{a_1}, \dots, V_{a_n}\}$. Položíme $U = U_{a_1} \cap \dots \cap U_{a_n}$, že se jedná o okolí bodu x je zřejmé, navíc U je disjunktní s $\cup S$, což je nadmnožina A. Tedy U je disjunktní s A a proto $U \subset X \setminus A$. Dokázali jsme, že ke každému prvku $x \in X \setminus A$ existuje okolí U takové, že $U \subset X \setminus A$. To stačí, porovnej s poznámkou za definicí topologie, k tomu aby $X \setminus A$ byla otevřená.

Věta 3.3. *Uzavřená podmnožina kompaktní množiny je kompaktní.*
D ů k a z. Nechť A je uzavřená podmnožina kompaktní množiny Y topologického prostoru X. Zvolme libovolné otevřené pokrytí S množiny A a pokusme se najít konečné podpokrytí A. Množina $X \setminus A$ je otevřená (doplněk uzavřené množiny) a systém $S' = S \cup \{X \setminus A\}$ je otevřeným pokrytím Y. Protože Y je kompaktní, existuje jeho konečné podpokrytí $T' \subset S'$ množiny Y, pokrytí $T = T' \setminus \{X \setminus A\}$ je konečným podpokrytím S množiny A.

Buďte X, Y topologické prostory, řekneme, že zobrazení $f : X \to Y$ je *spojité v bodě* $x \in X$, jestliže pro každé okolí U bodu $f(x)$ existuje okolí V bodu x takové, že $f(V) \subset U$. Zobrazení f je *spojité*, je-li spojité v každém bodě $x \in X$. Zobrazení f je *nespojité v bodě* $x \in X$, není-li v něm spojité. Zobrazení je *nespojité*, pokud není spojité v každém bodě $x \in X$.

Pokud budeme někdy hovořit o spojitosti zobrazení $f : X \to Y$ na množině $X' \subset X$, budeme tím mít na mysli spojitost zobrazení $f|_{X'}$ vzhledem k indukované topologii na X'.

---

1) Ano správně, množina $V = \{2\}$ je v indukované topologii na X otevřená, protože $V = (2, 4) \cap X$.

2) To znamená, že počet prvků množiny S je konečný.

3) Jsme přece v Hausdorfově prostoru, ne?

Věta 3.4. *Zobrazení $f : X \to Y$ je spojité právě když, vzorem každé otevřené množiny v Y je otevřená množina v X.*
D ů k a z. Budiž f spojité a U otevřená množina v Y, ukážeme, že $f^{-1}(U)$ je otevřená v X. Podle poznámky za definicí topologie stačí ukázat, že ke každému bodu $x \in f^{-1}(U)$ existuje jeho okolí V takové, že $V \subset U$. Množina U je otevřená a obsahuje bod $f(x)$, je to tedy okolí $f(x)$, k němu ze spojitosti f v bodě x existuje okolí U bodu x takové, že $f(U) \subset V$, to znamená, že $U \subset f^{-1}(V)$.

Předpokládejme nyní, že vzorem každé otevřené množiny je otevřená množina. Zvolme libovolný bod $x \in X$ a dokažme, že f je v něm spojité. Zvolme okolí U bodu $f(x)$ libovolně, U je otevřená množina a podle předpokladu je její vzor $V = f^{-1}(U)$ otevřená množina. Protože $x \in V$ a $f(f^{-1}(U)) \subset U$ [4] našli jsme okolí V bodu x takové, že $f(V) \subset U$.

Obdobně lze dokázat, že pro spojité zobrazení platí, že vzor každé uzavřené množiny je uzavřená množina.

Věta 3.5. *Budťe $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ spojitá zobrazení pak $g \circ f$ je spojité zobrazení.*
D ů k a z. Podle věty 3.4 stačí ukázat, že vzor libovolné otevřené množiny je otevřená množina. Nechť $V \subset Z$ je otevřená potom $(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$ (ověřte!), ale $U = g^{-1}(V)$ je podle věty 3.4 otevřená a podle stejné věty je otevřená i $f^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(V))$.

Věta 3.6. *Spojitý obraz kompaktní množiny je kompaktní množina.*
D ů k a z. Nechť $f : X \to Y$ je spojité zobrazení topologických prostorů, $A \subset X$ kompaktní podmnožina. Ověříme, že $f(A)$ je kompaktní podmnožina. Nechť S je otevřené pokrytí množiny $f(A)$, uvažujme systém $T = \{f^{-1}(U) \mid U \in S\}$, to je otevřené pokrytí A. (Že se jedná o pokrytí plyne z faktu, že pokud $f(A) \subset B$, potom $A \subset f^{-1}(B)$. Ověřte pro $B = \cup S$! Otevřenost množin $f^{-1}(U)$ plyne z věty 3.4.) Pokrytí T má konečné podpokrytí $\{f^{-1}(U_1), \ldots, f^{-1}(U_n)\}$ množiny A. Hledaným podpokrytím S množiny $f(A)$ je $\{U_1, \ldots, U_n\}$. [5]

Věta 3.7. *Spojitý obraz souvislé množiny je souvislá množina.*
D ů k a z. Předpokládejme, že při spojitém zobrazení $f : X \to Y$ by obrazem souvislé množiny $A \subset X$ byla nesouvislá množina $B = f(A)$. Pak musí existovat disjunktní otevřené množiny $U, V \subset Y$ takové, že ani jedna z množin $U \cap f(A)$ a $V \cap f(A)$ není prázdná a $(U \cap f(A)) \cup (V \cap f(A)) = f(A)$.[6] Všimněme si množin $f^{-1}(U) \cap A$ a $f^{-1}(V) \cap A$, jsou to otevřené množiny v indukované topologii na A (množiny $f^{-1}(U)$, $f^{-1}(V)$ otevřené množiny v X jako vzory otevřených množin při spojitém zobrazení věta 3.4). Dále, jsou to disjunktní množiny, protože U a V jsou disjunktní; jsou neprázdné, protože $U \cap f(A) \neq \emptyset$ a $V \cap f(A) \neq \emptyset$. Nakonec: $(f^{-1}(U) \cap A) \cup (f^{-1}(V) \cap A) \subset A$ a současně

$$
\begin{aligned}
&(f^{-1}(U) \cap A) \cup (f^{-1}(V) \cap A) && \\
&\quad = A \cap (f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)) && \text{(distributivita)} \\
&\quad = A \cap f^{-1}(U \cup V) && \text{(cvičení 1.14.b))} \\
&\quad \supset A \cap f^{-1}(f(A)) && \text{(protože } U \cup V \supset f(A)) \\
&\quad = A. && \text{(proč?)}
\end{aligned}
$$

To znamená, že $(f^{-1}(U) \cap A) \cup (f^{-1}(V) \cap A) = A$ a proto je A nesouvislá. To je spor, A má být podle předpokladu souvislá.

Bijektivní zobrazení $f : X \to Y$ topologických prostorů nazveme *homeomorfismus*, pokud f i f^{-1} jsou spojitá. Existuje-li mezi dvěma topologickými prostory homeomorfismus, říkáme, že jsou *homeomorfní*.

Užitím vět 3.6 a 3.7 dostáváme, že se souvislým (resp. kompaktním) prostorem může být homeomorfní pouze souvislý (resp. kompaktní) prostor. Například $[0, 1]$ a $[0, 1) \cup 2$ nemohou být homeomorfní.

Věta 3.8. *Kompozice dvou homeomorfismů je homeomorfismus.*

---

[4] Ověřte!

[5] Zde jsme využili toho faktu, že máme-li $f : X \to Y$ a $X_1, \ldots, X_n \subset X$ potom $f(X_1 \cup \ldots \cup X_n) = f(X_1) \cup \ldots \cup f(X_n)$ (viz. příklad 1.2) a že pokud $Y' \subset f(X)$, potom $f(f^{-1}(Y')) = Y'$.

[6] Indukovaná topologie na $f(A)$!

D ů k a z. Plyne (jak?) z toho, že složení dvou bijekcí je bijekce (Kapitola 1) a složení dvou spojitých zobrazení je spojité (věta 3.5).

4. Topologické vlastnosti množiny reálných čísel

V této kapitole definujeme přirozenou topologii na množině reálných čísel a uvádíme její základní vlastnosti: charakterizujeme souvislé a kompaktní množiny v $\mathbb{R}$ uvádíme (jako důsledek obecných topologických tvrzení z předchozí kapitoly) Bolzanovu a Weierstrassovu větu.

Dále se zabýváme základními vlastnostmi spojitých funkcí reálné proměnné a definujeme pojem limity.

Na konec kapitoly byla naplánována obecná definice mocninné, exponenciální a logaritmické funkce (pomocí výsledků této kapitoly); v této verzi textu ji tam ale bohužel nenajdete.

4.1 Přirozená topologie na $\mathbb{R}$. Množina $U \subset \mathbb{R}$ se nazývá *otevřená*, jestliže ke každému bodu $x \in U$ existuje otevřený interval I takový, že $x \in I \subset U$.

Věta 4.1. *Systém všech otevřených množin $U \subset \mathbb{R}$ je topologie na $\mathbb{R}$.*
D ů k a z. Pro prázdnou množinu a celé $\mathbb{R}$ definice platí první axiom topologie je tedy splněn.

Nechť U, V jsou otevřené, pak pro bod $x \in U \cap V$ existují otevřené intervaly I, J takové, že $x \in I \subset U$ a $x \in J \subset V$. Ovšem $I \cap J$ je otevřený interval a platí $x \in I \cap J \subset U \cap V$, to znamená, že $U \cap J$ je otevřená a je splněn druhý axiom topologie.

Nechť S je systém otevřených množin, zvolme libovolný prvek $x \in \cup S$. Potom existuje $U \in S$ tak, že $x \in U$. Protože U je otevřená, existuje otevřený interval I tak, že $x \in I \subset U$. Z definice sjednocení systému víme, že $x \in I \subset U \subset \cup S$. To dokazuje platnost třetího axiomu topologie.

Nebude-li uvedeno jinak, budeme vždy množinu $\mathbb{R}$ uvažovat s přirozenou topologií.

Snadno se lze přesvědčit, že $\mathbb{R}$ s přirozenou topologií je Hausdorffův topologický prostor.

Podívejme se, jak vypadají souvislé a kompaktní množiny v $\mathbb{R}$. Nejprve uvedeme jednoduché pomocné tvrzení:

Lemma 4.2. *Nechť $X \subset \mathbb{R}$ je množina taková, že pro každé $x, y \in X$, $x < y$, platí $[x, y] \subset X$. Pak X je interval.*[1)]
D ů k a z. Přenecháme čtenáři.

Věta 4.3. *Nechť X je neprázdná podmnožina. Následující dvě podmínky jsou ekvivalentní:*
1. X je souvislá,
2. X je interval.
D ů k a z. Předpokládejme, že množina X není interval. Podle předchozího lemmatu tedy existují body x, y, z takové, že $x < z < y$, $x, y \in X$ a $z \notin X$. Pak ale množiny $(-\infty, z) \cap X$ a $(z, \infty) \cap X$ jsou neprázdné, otevřené v X a tvoří rozklad množiny X. To ovšem znamená, že X není souvislá množina. Dokázali jsme tedy, že každá neprázdná souvislá množina je interval.

Nechť X je interval a předpokládejme, že je nesouvislý. Existují tedy množiny U, V otevřené v $\mathbb{R}$ takové, že $U \cap X$ a $V \cap X$ jsou neprázdné a $X = (U \cap X) \cup (V \cap X)$. Zvolme tedy $x \in U \cap X$ a $y \in V \cap X$, můžeme předpokládat, že $x < y$. Protože X je interval, platí $[x, y] \subset X$. Položme $z = \sup(U \cap (x, y))$, to určitě existuje a platí pro něj, že $x < z < y$ ($z \neq y$, protože V je otevřená množina a existoval by interval J tak, aby $y \in J \subset V$). Bod z leží v $(x, y) \subset X$ leží tedy v jedné z množin $(x, y) \cap U$, $(x, y) \cap V$. V množině $(x, y) \cap U$ ale ležet nemůže, protože by existoval otevřený interval $I \ni z$ tak, že $I \subset (x, y) \cap U$ a z by nebylo horní závora $\sup(U \cap [x, y])$. V množině $(x, y) \cap V$ ležet také nemůže, protože by existoval otevřený interval $J \ni z$ tak, že $J \subset (x, y) \cap V$ a z by nebylo nejmenší horní závora $\sup(U \cap [x, y])$. To je ale ve sporu s $X = (U \cap X) \cup (V \cap X)$.

[1)] Množina $\mathbb{R}$ je ovšem taky interval (poopravte si definici uvedenou dříve).

Důsledek 4.4 (Bolzano). *Je-li $I \subset \mathbb{R}$ interval a $f : I \to \mathbb{R}$ spojitá funkce, pak $f(I)$ je interval.*
D ů k a z. Plyne z předchozí věty a z věty 3.7.

Lemma 4.5 (Heine-Borel). *Každý interval $[x, y] \subset \mathbb{R}$ je kompaktní množina.*
D ů k a z. Nechť S je otevřené pokrytí intervalu $[x, y]$. Označme A množinu všech $z \in [x, y]$ takových, že existuje konečné podpokrytí $T \subset S$ intervalu $[x, z]$. Jistě $x \in A$ a $y \geq A$. Existuje tedy $z_0 = \sup A$. Nyní ověříme dvě věci: 1. $z_0 \in A$, 2. $z_0 = y$. Tím bude náhle tvrzení dokázáno.

1. Předpokládejme, že $z_0 \notin A$ a zvolme $U \in S$ tak, že $z_0 \in U$. Jelikož $z_0 = \sup A$, jistě existuje prvek $z \in A$, který leží v nějakém otevřeném intervalu, obsahujícím z_0. Nechť $T \subset S$ je konečné pokrytí intervalu $[x, z]$. Pak $T \cup \{U\} \subset S$ je konečné pokrytí intervalu $[x, z_0]$, $z_0 \in A$ a dostáváme spor.

2. Předpokládejme, že $z_0 < y$ a označme $T \subset S$ konečné podpokrytí intervalu $[x, z_0]$. Množina $U \in T$, která obsahuje bod z_0, obsahuje i nějaký otevřený interval $I \subset [x, y]$ takový, že $z_0 \in I$. Pro libovolný bod $z \in I$, $z > z_0$, nyní T pokrývá interval $[x, z]$. To znamená, že $z \in A$ a dostáváme spor s tím, že $z_0 = \sup A$.

Věta 4.6. *Nechť $X \subset \mathbb{R}$ je neprázdná podmnožina. Následující dvě podmínky jsou ekvivalentní:*
1. X je kompaktní,
2. X je uzavřená a ohraničená.
D ů k a z. Předpokládejme, že množina X je kompaktní. Podle věty 3.2 je X uzavřená. Předpokládejme, že množina X není ohraničená. Pak systém $\{(-n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ je její otevřené pokrytí, které nemá konečné podpokrytí. To ale znamená, že je ohraničená.

Předpokládejme, že množina X je uzavřená a ohraničená. Pak existuje uzavřený interval $[x, y] \subset \mathbb{R}$ takový, že $X \subset [x, y]$. Tento interval je kompaktní (podle předchozího lemmatu), X je jeho uzavřená podmnožina a podle věty 3.3 je tedy kompaktní.

Důsledek 4.7. *Každá neprázdná kompaktní podmnožina $\mathbb{R}$ má maximum a minimum.*
D ů k a z. Plyne z předchozí věty a z toho, že každá neprázdná uzavřená ohraničená množina v $\mathbb{R}$ má maximum a minimum (proč?).

Důsledek 4.8 (Weierstrass). *Každá spojitá funkce, definovaná na neprázdné kompaktní podmnožině $\mathbb{R}$ má maximum a minimum.*
D ů k a z. Plyne z toho, že spojitý obraz kompaktní množiny je kompaktní množina (věta 3.6), z věty 4.6 a předchozího důsledku.

4.2 Vlastnosti spojitých funkcí v $\mathbb{R}$. Funkce $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se nazývá *spojitá zleva* (případně *zprava*) v bodě $x_0 \in X$, je-li v tomto bodě spojité její zúžení na množinu $X \cap (-\infty, x_0]$ (případně $[x_0, \infty)$). Veškeré výsledky o spojitosti funkce v bodě, které uvedeme, se dají snadno převést na spojitost zprava a zleva. Následující tvrzení je jednoduchým důsledkem definic:

Věta 4.9. *Funkce $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá v bodě $x_0 \in X$, právě když je v tomto bodě spojitá zleva i zprava.*

Věta 4.10. *Funkce $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá v bodě $x_0 \in X$, právě když ke každému otevřenému intervalu J se středem v bodě $f(x_0)$ existuje otevřený interval I se středem v bodě x_0 tak, že $f(I \cap X) \subset J$.*
D ů k a z. Nechť f je spojitá v x_0. Pak k otevřenému intervalu J se středem v bodě $f(x_0)$ existuje okolí U bodu x_0 v topologii $\mathbb{R}$ tak, že $f(U \cap X) \subset J$ (to plyne z definic indukované topologie a spojitosti). Podle definice přirozené topologie toto okolí ovšem obsahuje nějaký otevřený interval I se středem v x_0. Platí $f(I \cap X) \subset J$.

Zvolme nyní naopak libovolné okolí V bodu $f(x_0)$. Podle definice přirozené topologie toto okolí obsahuje nějaký otevřený interval J se středem v $f(x_0)$. K němu ovšem podle předpokladu najdeme otevřený interval I se středem v bodě x_0 tak, že $f(I \cap X) \subset J \subset V$. Tím je dokázána spojitost funkce f v bodě x_0.

Důsledek 4.11. *Funkce $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá v bodě x_0, právě když ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in X$, které splňuje $|x - x_0| < \delta$, platí $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.*
D ů k a z. Stačí si uvědomit, že množina všech $x \in \mathbb{R}$ takových, že $|x - x_0| < \delta$, je interval $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ a množina $\{y \in \mathbb{R} \mid |y - f(x_0)| < \varepsilon\}$, interval $(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$.

Dokažme spojitost funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Zvolme $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ a položme $\varepsilon = \delta$. Nyní pro každé $x \in \mathbb{R}$, pro které platí $|x - x_0| < \delta$, máme

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= \big||x| - |x_0|\big| \\ &\le |x - x_0| && \text{(cvičení 2.10 e))} \\ &< \delta = \varepsilon. \end{aligned}$$

Definujme funkci signum sgn : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{jestliže } x < 0, \\ 0, & \text{jestliže } x = 0, \\ 1, & \text{jestliže } x > 0. \end{cases}$$

Dokažme nespojitost funkce signum v bodě 0. Musíme najít okolí U bodu $\operatorname{sgn}(0) = 0$ tak, že pro každé okolí V bodu 0 neplatí $f(V) \subset U$. Položme $U = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, zvolme nyní libovolné okolí V bodu 0 a ukažme, že V obsahuje bod x takový, že $f(x) \notin (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, protože V je otevřená obsahuje interval I se středem v 0 zvolme $x \in I$, $x > 0$. Platí $\operatorname{sgn}(x) = 1 \notin (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Věta 4.12. *Funkce $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$ je spojitá.*
D ů k a z. Nechť $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. K číslu $\varepsilon > 0$ zvolme δ tak, aby

$$\delta < \min\left\{\frac{|x_0|}{2}, \frac{\varepsilon x_0^2}{2}\right\} \tag{4.2.1}$$

Nyní ze vztahu $|x - x_0| < \delta$ plyne jednak

$$\begin{aligned} \delta > |x - x_0| &= |x_0 - x| \\ &\ge \big||x_0| - |x|\big| && \text{(cvičení 2.10 e))} \\ &\ge |x_0| - |x|, \end{aligned}$$

což znamená, že

$$|x| > |x_0| - \delta, \tag{4.2.2}$$

dále

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| &= \left|\frac{x_0 - x}{x x_0}\right| = \frac{|x_0 - x|}{|x||x_0|} < \frac{|x_0 - x|}{(|x_0| - \delta)|x_0|} < \frac{\delta}{(|x_0| - \delta)|x_0|} < \frac{\delta}{\left(|x_0| - \frac{|x_0|}{2}\right)|x_0|} \\ &= \frac{2\delta}{x_0^2} = \frac{2\delta}{\varepsilon x_0^2}\varepsilon < \frac{\delta}{\delta}\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Věta 4.13. *Nechť $f, g, h : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou funkce spojité v bodě x_0, $0 \notin h(X)$. Pak následující funkce jsou rovněž spojité v bodě x_0:*
1. $f + g$,
2. $f \cdot g$,
3. f/h.
D ů k a z. 1. Zvolme $\varepsilon > 0$. Jelikož funkce f a g jsou spojité v x_0, existují čísla $\delta_1, \delta_2 > 0$ taková, že pro $x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ je $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/2$ a pro $x \in (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2)$ je $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon/2$. Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ nyní máme

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)| &\le |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

2. Zvolme $\varepsilon > 0$. Jelikož funkce f a g jsou spojité v x_0, existují čísla $\delta_1, \delta_2, M > 0$ taková, že pro $x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ je $|f(x)| < M$ (každá funkce spojitá v bodě x_0 je na nějakém jeho okolí ohraničená

— viz. cvičení 32), $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/2|g(x_0)|$ a pro $x \in (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2)$ je $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon/2M$. Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ máme

$$\begin{aligned}&|f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)|\\ &\quad = |f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)|\\ &\quad \le |f(x)||g(x) - g(x_0)| + |g(x_0)||f(x) - f(x_0)|\\ &\quad < M\frac{\varepsilon}{2M} + |g(x_0)|\frac{\varepsilon}{2|g(x_0)|} = \varepsilon.\end{aligned}$$

3. Plyne (jak?) z důsledku 4.11, z věty 3.5, věty 4.12 a z bodu 2. této věty.

Důsledek 4.14. *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je funkce* pow_n *spojitá.*
D ů k a z. Plyne matematickou indukcí ze spojitosti funkce $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ (příklad 1) a z bodu 2.

Důsledek 4.15. *Nechť $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce, $a, b \in \mathbb{R}$. Pak funkce $af + bg$ je spojitá.*
D ů k a z. Plyne ze spojitosti konstantní funkce a z bodů 1. a 2.

Důsledek 4.16. *Každá afinní funkce je spojitá.*
D ů k a z. Plyne ze spojitosti funkce $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ (příklad 1) a předchozího důsledku.

Věta 4.17. *Nechť $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce. Pak*
1. Množina všech $x \in X$ takových, že $f(x) = g(x)$, je uzavřená v X.
2. Množina všech $x \in X$ takových, že $f(x) \le g(x)$, je uzavřená v X.
D ů k a z. Podle věty 4.13 je funkce $h = f - g$ spojitá. První množina je rovna $h^{-1}\{0\}$, druhá $h^{-1}(-\infty, 0]$. Jsou to tedy vzory uzavřených množin při spojitém zobrazení.

Důsledek 4.18. *Nechť $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce, $A \subset X$ množina hustá v X. Pak z $f|_A = g|_A$ plyne $f = g$.*
D ů k a z. Podle předchozí věty je množina B všech $x \in X$, pro něž $f(x) = g(x)$, uzavřená v X. Platí $X = \mathrm{cl}\, A \subset \mathrm{cl}\, B = B$, neboli $B = X$.

Důsledek 4.19. *Nechť $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce, $A \subset X$ množina hustá v X. Pak z $f|_A \le g|_A$ plyne $f \le g$.*
D ů k a z. Stejný jako důkaz předchozího důsledku.

Věta 4.20. *Libovolný otevřený interval v $\mathbb{R}$ je homeomorfní s $\mathbb{R}$.*
D ů k a z. Mějme dva otevřené intervaly (a_1, b_1) a (a_2, b_2). Funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x - b_1}{a_1 - b_1}a_2 + \frac{x - a_1}{b_1 - a_1}b_2$$

je afinní. Funkce f^{-1} existuje (jak se lze snadno přesvědčit) a je rovněž afinní. f je tedy homeomorfismus. Navíc, $f(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$. Příslušným zúžením tedy dostaneme homeomorfismus intervalů (a_1, b_1) a (a_2, b_2).

Definujme nyní zobrazení $g : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ předpisem

$$g(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

(ověřte, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ je $f(x) \in (-1, 1)$). Toto zobrazení má inverzi:

$$g^{-1}(x) = \frac{x}{1 - |x|}$$

(ověřte, že se jedná o inverzi). Zobrazení g i g^{-1} jsou spojitá (to plyne z věty 4.13 a spojitosti absolutní hodnoty) a g je homeomorfismus. Množina $\mathbb{R}$ je tedy homeomorfní s intervalem $(-1, 1)$ a tedy, podle toho, co jsme dokázali před chvílí, i s libovolným jiným ohraničeným otevřeným intervalem (kompozice dvou homeomorfismů je homeomorfismus! Věta 3.8).

Konečně, pro intervaly $(-\infty, a)$ a (b, ∞) platí $g(-\infty, a) = (-1, a/(1+|a|))$ a $g(b, \infty) = (b/(1+|b|), 1)$.

Tím je celá věta dokázána.

Věta 4.21. *Nechť I je interval. Libovolná rostoucí nebo klesající spojitá funkce f intervalu I je homeomorfismus I a $f(I)$. Libovolná prostá spojitá funkce f intervalu I je rostoucí nebo klesající.*
D ů k a z. 1. Předpokládejme například, že funkce f je spojitá a, řekněme, rostoucí. Pak f je bijekce mezi množinami I a $f(I)$ a stačí dokázat, že zobrazení $f^{-1} : f(I) \to I$[2] je spojité. Obrazem libovolného intervalu $[a, b] \subset I$ je podle důsledku 4.4 nějaký interval; jelikož funkce f je rostoucí, musí to být interval $[f(a), f(b)]$. Podobný výsledek získáme pro polootevřené a otevřené intervaly. Nyní již první část tvrzení (pro rostoucí funkci) plyne z důsledku 4.11. Pro klesající funkci lze tvrzení dokázat podobně.

2. Předpokládejme, že funkce f je spojitá a prostá a zvolme libovolně body $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$. Snadno se vidí, že platí $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$, nebo $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$. Kdyby totiž bylo například $f(x_1) < f(x_2)$ a $f(x_3) < f(x_2)$, pak by podle důsledku 4.11 existoval bod $y \in f(x_1, x_2) \cap f(x_2, x_3)$, který by měl vzor jak v intervalu (x_1, x_2), tak v intervalu (x_2, x_3). To by byl spor s injektivností funkce f.

Zvolme nyní libovolné dva body $a, b \in I$, $a < b$, a předpokládejme, že $f(a) < f(b)$. Z tohoto předpokladu odvodíme, že funkce f je rostoucí (z předpokladu $f(a) > f(b)$ se dá stejným postupem odvodit, že je klesající). Připusťme, že funkce f není rostoucí, čili, že existují body $c, d \in I$, $c < d$, s vlastností $f(c) > f(d)$. Nyní se snadno vidí, že ať je vzájemná poloha bodů a, b, c, d jakákoli, vždy z nich lze vybrat trojici $x_1 < x_2 < x_3$, která nesplňuje $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$ ani $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$.

Důkaz je hotov.

4.3 Limita. Mějme topologický prostor X, Hausdorffův topologický prostor Y, zobrazení $f : A \subset X \to Y$ a bod $x_0 \in \operatorname{cl} A$. *Limitou zobrazení f v bodě x_0*azýváme prvek $y_0 \in Y$ takový, že
1. jestliže $x_0 \in A$, pak zobrazení f je spojité v x_0 a $f(x_0) = y_0$,
2. jestliže $x_0 \notin A$, pak zobrazení $\bar{f} : A \cup \{x_0\} \to Y$, definované předpisem

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{jestliže } x \neq x_0, \\ y_0, & \text{jestliže } x = x_0, \end{cases} \tag{4.3.1}$$

je spojité v x_0.

Je-li y_0 limitou zobrazení f v bodě x_0, píšeme $y_0 = \lim_{x \to x_0} f(x)$.

Často budeme pracovat s limitou zobrazení f, zúženém na nějakou podmnožinu $A \cap B$, kde $B \subset A$. V takovém případě používáme tuto symboliku:

$$\lim_{x \to x_0} f|_{A \cap B}(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in B}} f(x). \tag{4.3.2}$$

Věta 4.22. *Nechť $f : A \subset X \to Y$. Pak $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) = y_0$, právě když ke každému okolí V bodu y_0 existuje okolí U bodu x_0 tak, že $f(U \cap A) \subset V$.*
D ů k a z. Věta je přímým důsledkem definic limity spojitého zobrazení a indukované topologie.

Věta 4.23. *Každé zobrazení má v daném bodě nejvýše jednu limitu.*
D ů k a z. Nechť y_1, y_2 jsou dvě různé limity zobrazení $f : A \subset X \to Y$ v bodě $x_0 \in X$, V_1 a V_2 taková okolí bodů y_1 a y_2, že $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ (tato okolí existují — prostor Y je Hausdorffův). Podle věty 4.22 existují okolí U_1 a U_2 bodu x_0 taková, že $f(U_1 \cap A) \subset V_1$ a $f(U_2 \cap A) \subset V_2$. Jelikož x_0 je bod uzávěru množiny A, existuje bod $x \in A$, který leží současně v množinách U_1 a U_2. Pro tento bod ale platí $f(x) \in V_1 \cap V_2$, což je spor.

---

[2] Přesně řečeno, udělali jsme tohle: vzali jsme funkci $\bar{f} : I \to f(I)$, definovanou stejným předpisem, jako funkce f (zúžení oboru hodnot) a zjistili, že je to bijekce. Našli jsme inverzní funkci $\bar{f}^{-1}$ a označili ji f^{-1}. Je to určitá nepřesnost; proto je třeba, abys byl, milý čtenáři, při věci.

Věta 4.24 (limita složeného zobrazení). *Budiž X, Y, Z topologické prostory, x_0 bod uzávěru množiny $A \subset X$. Dále budiž $f : A \to Y$ zobrazení, které má limitu $y_0 = \lim_{x \to x_0} f(x)$, a $g : Y \to Z$ zobrazení spojité v y_0. Pak zobrazení $g \circ f$ má limitu v bodě x_0 a platí*

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = g(y_0). \tag{4.3.3}$$

D ů k a z. Plyne přímo z definice limity a věty 3.5.

Než aplikujeme pojem limity na funkce reálné proměnné, zavedeme následující pomocný pojem: *Rozšířenou množinou reálných čísel* nazýváme množinu $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, kde $-\infty$ a ∞ jsou libovolné dva různé prvky, tzv. nevlastní body, které nejsou reálnými čísly.[3)]

Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ klademe $-\infty < x$ a $x < \infty$. Tím jsme rozšířili uspořádání na $\mathbb{R}$ na množinu $\overline{\mathbb{R}}$.

Ověřte, že jsme na $\overline{\mathbb{R}}$ opravdu definovali uspořádání.

Věta 4.25 (zobecněná věta o supremu a infimu). *Každá množina $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ má v $\overline{\mathbb{R}}$ supremum a infimum.*
D ů k a z. Je-li množina X neohraničená shora (případně zdola), je $\sup X = \infty$ (případně $\inf X = -\infty$). Je-li $X = \emptyset$, je $\sup X = -\infty$ a $\inf X = \infty$.[4)] Pro ostatní množiny plyne existence suprema z věty 2.5 a infima z věty 2.6.

Topologii na $\overline{\mathbb{R}}$ definujeme pomocí topologie na $\mathbb{R}$ takto: Množina $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ je otevřená, jestliže následující podmínky
1. množina $X \cap \mathbb{R}$ je otevřená v $\mathbb{R}$,
2. jestliže $-\infty \in X$, pak pro nějaké $x \in \mathbb{R}$ platí $[-\infty, x) \subset X$,
3. jestliže $\infty \in X$, pak pro nějaké $x \in \mathbb{R}$ platí $(x, \infty] \subset X$.[5)]

Limity funkcí reálné proměnné vždy uvažujeme v množině $\overline{\mathbb{R}}$. V limitě $\lim_{x \to x_0} f(x)$ tedy může být $x_0 = -\infty$ nebo $x_0 = \infty$ (pokud je $-\infty$ nebo ∞ hromadným bodem definičního oboru funkce f) a může také vyjít $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ nebo $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$. V prvním případě pak hovoříme o *limitě v nevlastním bodě*, ve druhém o *nevlastní limitě*.

Věta 4.26. *Buď $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotonní funkce. Je-li x_0 bod uzávěru množiny $(-\infty, x_0) \cap X$, pak existuje limita*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x). \tag{4.3.4}$$

Je-li x_0 bod uzávěru množiny $(x_0, \infty) \cap X$, pak existuje limita

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x). \tag{4.3.5}$$

D ů k a z. Dokážeme existenci limity $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ pro případ, že funkce f je neklesající. Označme $y_0 = \sup_{x < x_0} f(x)$[6)] a zvolme libovolné okolí V bodu y_0. Jistě pro každý bod $x \in X$, $x < x_0$, platí $f(x) \le y_0$ a jistě existuje bod $x_1 \in X$, $x_1 < x_0$, takový, že $f(x_1) \in V$ (obojí plyne z věty 2.7). Pak ale $f((x_1, x_0) \cap X) \subset V$. Tím je tvrzení dokázáno. Kde jsme využili, že funkce f je neklesající?

Limity

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) \text{ a } \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$$

nazýváme *limitou zleva* a *limita zprava*. Značíme je $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ a $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$.

[3)]Prvkům ∞ a $-\infty$ není třeba přikládat nějaký zvláštní význam. Jsou to prostě pomocné prvky.

[4)]Proč? Porovnejte vyslovená tvrzení s definicemi suprema, infima horní a dolní závory.

[5)]Intervaly $[-\infty, x)$ a $(x, \infty]$ definujeme, jak čtenář předpokládá.

[6)]Tím máme samozřejmě na mysli supremum funkce f, zúžené na množinu $(-\infty, x_0)$. Podobnou symboliku používáme i dále.

Věta 4.27. *Nechť $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce, $x_0 \in \mathbb{R}$ bod uzávěru množiny $(-\infty, x_0] \cap X$ i množiny $[x_0, \infty) \cap X$. Pak limita $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existuje, právě když existují limity $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ a $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ a jsou si rovny. Platí*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) \tag{4.3.6}$$

D ů k a z. Důkaz přenecháme čtenáři.

V následující větě výjimečně předpokládáme, že funkce f, g, h mohou nabývat i nevlastních hodnot.

Věta 4.28 (o třech limitách). *Buďte $f, g, h : X \subset \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ funkce, $f \le g \le h$, $x_0 \in \mathrm{cl}\, X$. Existují-li limity $\lim_{x\to x_0} f(x)$ a $\lim_{x\to x_0} h(x)$ a platí-li*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = y_0, \tag{4.3.7}$$

pak existuje i limita $\lim_{x\to x_0} g(x)$ a je rovna y_0.
D ů k a z. Nechť V je okolí bodu y_0, $J \subset V$ interval, obsahující bod y_0. Z existence limit funkcí f a h plyne, že existuje okolí U bodu x_0 takové, že $f(U \cap X) \subset J$ a také $h(U \cap X) \subset J$. Z předpokladu $f \le g \le h$ ovšem plyne, že i $g(U \cap X) \subset J$.

Nyní uvedeme několik základních pravidel pro počítání s limitami.

Věta 4.29. *Nechť $f_1, f_2 : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathrm{cl}\, X$. Platí:*
1. Jestliže $\lim_{x\to x_0} f_1(x) = y_1 \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x\to x_0} f_2(x) = y_2$, pak $\lim_{x\to x_0}(f_1 + f_2)(x) = y_1 + y_2$.
2. Jestliže $\lim_{x\to x_0} f_1(x) = \infty$ a funkce f_2 je zdola ohraničená, pak $\lim_{x\to x_0}(f_1 + f_2)(x) = \infty$.
3. Jestliže $\lim_{x\to x_0} f_1(x) = -\infty$ a funkce f_2 je shora ohraničená, pak $\lim_{x\to x_0}(f_1 + f_2)(x) = -\infty$.
D ů k a z. 1. Jestliže $x_0 \in X$, pak funkce f_1 a f_2 jsou spojité v x_0 a $f_1(x_0) = y_1$, $f_2(x_0) = y_1$. To ale znamená, že funkce $f_1 + f_2$ je v tomto bodě také spojitá (věta 4.13.1.) a $(f_1 + f_2)(x_0) = y_1 + y_2$. V případě, že $x_0 \notin X$ použijeme tutéž argumentaci na funkce $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$ z definice limity.
2. Nechť m je dolní závora funkce f_2. Buď M libovolné číslo a U takové okolí bodu x_0, že $f_1(U) > M - m$. Pak pro každé $x \in U$ platí $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) > (M - m) + m = M$.
3. Dokáže se podobně jako 2.

Věta 4.30. *Nechť $f_1, f_2 : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathrm{cl}\, X$, $m \in \mathbb{R}$. Platí:*
1. Jestliže $\lim_{x\to x_0} f_1(x) = y_1 \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x\to x_0} f_2(x) = y_2 \in \mathbb{R}$, pak $\lim_{x\to x_0}(f_1 \cdot f_2)(x) = y_1 y_2$.
2. Jestliže $\lim_{x\to x_0} f_1(x) = \infty$ a $f_2 > m > 0$, pak $\lim_{x\to x_0}(f_1 \cdot f_2)(x) = \infty$.
3. Jestliže $\lim_{x\to x_0} f_1(x) = \infty$ a $f_2 < m < 0$, pak $\lim_{x\to x_0}(f_1 \cdot f_2)(x) = -\infty$.
4. Jestliže $\lim_{x\to x_0} f_1(x) = -\infty$ a $f_2 > m > 0$, pak $\lim_{x\to x_0}(f_1 \cdot f_2)(x) = -\infty$.
5. Jestliže $\lim_{x\to x_0} f_1(x) = -\infty$ a $f_2 < m < 0$, pak $\lim_{x\to x_0}(f_1 \cdot f_2)(x) = \infty$.
6. Jestliže $\lim_{x\to x_0} f_1(x) = 0$ a $|f_2| < m$, pak $\lim_{x\to x_0}(f_1 \cdot f_2)(x) = 0$.
D ů k a z. 1. Plyne z věty 4.13.2.
2. Buď M libovolné číslo a U takové okolí bodu x_0, že $f_1(U) > M/m$. Pak pro každé $x \in U$ platí $(f_1 \cdot f_2)(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) > (M/m) \cdot m = M$.
Body 3, 4, 5 se dokáží podobně jako bod 2.
6. Dokažte sami (viz cvičení).

Příklady

1. *Ukažte, že $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ je spojité zobrazení.*
Řešení: Je nutné ukázat, že $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ je spojité a že jeho inverze je spojitá. Vzhledem k tomu, že inverze k identitě je identita, stačí ukázat, že $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ je spojitá. Musíme tedy ukázat, že je spojitá v každém bodě. Zvolme $x \in \mathbb{R}$ a ukážeme, že $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ je v něm spojitá. Zvolme libovolné okolí U bodu $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(x)$ a za okolí V bodu x vezměme $V = U$. Snadno vidíme, že $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(V) = V = U \subset U$. Tím je důkaz ukončen.

2. *Ukažte, že neexistuje homeomorfismus mezi množinami* (a, b) *a* $(c, d]$.
Řešení: Předpokládáme, že existuje homeomorfismus $h : (c, d] \to (a, b)$ potom ale $h(d) = r \in (a, b)$. Protože h je homeomorfismus, platí $h(c, d) = (a, b) \setminus \{r\}$. To znamená, že spojitým zobrazením h je souvislá množina zobrazena na nesouvislou, a to je spor s větou 3.7. Tím je důkaz ukončen.

3. *Vypočítejte*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + 5x - 15}{3x^2 + 5}.$$

Řešení: Čitatel i jmenovatel podělíme nejvyšší mocninou, která se ve zlomku vyskytuje, a využijeme pravidel pro počítání s limitami:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + 5x - 15}{3x^2 + 5} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 + 5/x - 15/x^2}{3 + 5/x^2}$$
$$= \frac{\lim_{x\to\infty} 2 + \lim_{x\to\infty} 5/x - \lim_{x\to\infty} 15/x^2}{\lim_{x\to\infty} 3 + \lim_{x\to\infty} 5/x^2} = \frac{2 + 0 - 0}{3 + 0} = \frac{3}{2}.$$

4. *Vypočítejte*

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 7x + 12}.$$

Řešení: Protože se jedná o limitu typu $\frac{0}{0}$, můžeme čitatele i jmenovatele upravit na součin kořenových činitelů a potom krátit a dále použít pravidla pro počítání s limitami. Tedy

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 7x + 12} = \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)^2}{(x-4)(x-3)} = \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{x-3} = \frac{\lim_{x\to 4} x - 4}{\lim_{x\to 4} x - 3} = \frac{0}{1} = 0.$$

5. *Buďte* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a* $x_0 \in \mathbb{R}$ *takové, že* $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ *a funkce* g *je ohraničená. Ukažte, že potom* $\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = 0$.
Řešení: Protože g je ohraničená, existuje číslo M takové, že $|g(x)| < M$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Ověříme, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pokud $|x - x_0| < \delta$, potom $|f(x)g(x) - 0| < \varepsilon$. Zvolme tedy $\varepsilon > 0$. Položíme $\varepsilon' = \varepsilon/M$, a z toho že $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pokud $|x - x_0| < \delta$ potom $|f(x) - 0| < \varepsilon'$. Je třeba ověřit, že $|f(x)g(x) - 0| < \varepsilon$ pro všechna x taková, že $|x - x_0|$. Tedy $|f(x)g(x) - 0| = |f(x)||g(x)| < M\varepsilon' = \varepsilon$. Tím je důkaz ukončen.

Cvičení

1. Dokažte: Buďte $A, B \subset X$, pokud $A \subset B$, potom $\mathrm{cl}\, A \subset \mathrm{cl}\, B$.

2. Dokažte: Nechť $f : X \to Z$ je spojité zobrazení a $Y \subset X$ potom zobrazení $f|_Y$ je také spojité.

3. Uveďte příklad nekonečného systému otevřených množin v $\mathbb{R}$ tak, aby jeho průnik nebyla otevřená množina.

4. Uveďte příklad nekonečného systému uzavřených množin v $\mathbb{R}$ tak, aby jeho sjednocení nebyla otevřená množina.

5. Je sjednocení (průnik) dvou souvislých množin v $\mathbb{R}$ opět souvislá množina?

6. Je sjednocení (průnik) dvou kompaktních v $\mathbb{R}$ množin opět kompaktní množina?

7. Nalezněte vnitřek, vnějšek, hranici, uzávěr a množinu hromadných bodů v $\mathbb{R}$ množin

a) (a, b); b) $(a, b]$; c) $\mathbb{Q}$;

d) $\mathbb{N}$; e) $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$; f) $[a, b) \cup (b, c]$;

g) $(a, b) \cap \mathbb{Q}$; h) $\{n/(n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$; i) $[a, \infty)$.

8. Uvažujme $\mathbb{R}$ s přirozenou topologií, rozhodněte, zda

a) systém $S = \{(-5, 1), (0, 3), [0, 1], (2, 5), (3, 9)\}$ je otevřeným pokrytím množiny $\{1, 2, 3\}$;

b) systém $S = \{(n-1, n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$ je otevřeným pokrytím množiny $\{1\} \cup (2, 5]$ a najděte konečné podpokrytí.

9. Dokažte, že systém $S = \{(1/n, 1) \mid n \in \mathbb{N}\}$ je otevřené pokrytí intervalu $(0, 1)$, a že z něj nelze vybrat konečné podpokrytí.

10. Které z následujících podmnožin $\mathbb{R}$ jsou kompaktní a proč:

a) $\{0\}$; b) $\{1, \dots, n\}$; c) $(0, 1)$;

d) $(0, 1])$; e) $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$; f) $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

11. Ukažte, že množina $\overline{\mathbb{R}}$ je kompaktní.

12. Které z následujících podmnožin $\mathbb{R}$ jsou souvislé a proč:

a) $\{1, 2\}$; b) $(0, 1)$; c) $[1, 2]$;

d) $(0, 1) \cup (1, 2]$; e) $\mathbb{R}$; f) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;

g) $\mathbb{Q}$; h) $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

13. Ukažte, že zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5x$ je spojité.

14. Ukažte, že zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ je spojité.

15. Dokažte, že

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 7x$ je spojitá v 7; b) χ je nespojitá v každém bodě;

c) $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \cdot \chi$ je spojitá pouze v nule; d) $\chi \circ \chi$ je spojitá;

e) ϱ je spojitá pouze v iracionálních číslech;

f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{4} \operatorname{sgn}(x - \frac{43}{28})$ je nespojitá v $\frac{43}{28}$.

16. Zjistěte, kde jsou následující funkce spojité:

a) $7x$; b) $3x^2$;

c) $x \cdot \operatorname{sgn}(x)$.

17. Buďte $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojité funkce a $a \in \mathbb{R}$. Dokažte, že potom $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ a $a \cdot f$ jsou spojité funkce.

18. Uveďte příklad nespojitých funkcí tak, aby jejich součet (rozdíl) byl spojitá funkce.

19. Uveďte příklad spojité funkce tak, aby její inverze byla nespojitá.

20. Uveďte příklad nespojité funkce, která nenabývá na $[a, b]$ maxima ani minima.

21. Uveďte příklad spojité funkce, která nenabývá maxima (ani minima) na intervalu (a, b).

22. Ukažte, že zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x$ (resp. $f(x) = -x$) je homeomorfismus.

23. Ukažte, že jsou-li f, g spojité funkce na $\mathbb{R}$, pak množina $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq g(x)\}$ (resp. $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < g(x)\}$) je otevřená.

24. Vyvraťte následující tvrzení: Buď A hustá množina v $\mathbb{R}$, f, g spojité funkce na $\mathbb{R}$ takové, že $f|_A < g|_A$. Potom $f < g$.

25. Najděte nějaký homeomorfismus intervalů (a, b) a , (c, d), kde $(a, b), (c, d) \subset \mathbb{R}$.

26. Ukažte, že neexistuje homeomorfismus mezi množinami:

a) (a, b) a $[c, d]$; b) $(a, b) \cup (c, d)$ a (r, s), kde $b \leq c$.

27. Uveďte příklad funkcí $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tak, aby

a) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$ a $\lim_{x\to 0} f(x)/g(x) = 256$;

b) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = \infty$ a $\lim_{x\to 0} f(x)/g(x) = 0$;

c) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = \infty$ a $\lim_{x\to 0} f(x) - g(x) = \infty$;

d) $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 0} g(x) = \infty$ a $\lim_{x\to 0} f(x) - g(x) = \mathrm{e}^{13}$.

28. Nechť $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$ a $\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = 1$. Vypočtěte $\lim_{x\to 0} g(x)$. Nechť $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ a $\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = 1$. Co platí pro limitu $\lim_{x\to 0} g(x)$?

29. Pomocí definice limity vypočtěte

a) $\lim_{x\to -\infty} 1/x$; b) $\lim_{x\to \infty} 1/x$; c) $\lim_{x\to 0^-} 1/x$;

d) $\lim_{x\to 0^+} 1/x$; e) $\lim_{x\to 0} x \cdot \chi(x)$.

30. Vypočítejte

a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{-3x^2 + 2x^2 + x}{17x^3 - x^2 + 10}$; b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + 6x + 125}{-6x^3 + 4}$; c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2 + 6x}{-6x^3}$;

d) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}$; e) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + 2x + 4}{x - 2}$; f) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2 + x} - \sqrt{2}}{x}$;

g) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{x^3}{x - 1}}$; h) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$; i) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x^3 + 6x}{5x^3 + x^2} + |x+2|$;

j) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x + 1}}$; k) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$; l) $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn}(x)$;

m) $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{2x - 1}{|x - 1|}$; n) $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{2x - 1}{|x - 1|}$; o) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x + 1} - 1}{\sqrt{x + 1} + 1}$;

p) $\lim_{x\to 2} \dfrac{2x^2 - 10x + 12}{x^2 + 5x - 14}$; q) $\lim_{x\to 4} \dfrac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 7x + 12}$; r) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + 7x - 44}{x^2 - 6x + 8}$;

s) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{x^3}{x - 1}} - x$; t) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt[5]{x^2 - 1}}{\sqrt[3]{x^3 + 1} - \sqrt[4]{x^3 - 1}}$.

31. Vypočítejte následující limity, jestliže $a > 0$:

a) $\lim_{x\to\infty} 2^{-x}$; b) $\lim_{x\to 0} 2^{-x}$; c) $\lim_{x\to 1} 2^{(x-1)/(x+2)}$;

d) $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\log_a x} - \dfrac{1}{x - 1}\right)$; e) $\lim_{x\to\infty} (\log_a(2x + 1) - \log_a(x + 2))$;

f) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\log_a^2 x}{x}$; g) $\lim_{x\to\infty} \log_a x - \log_a(3x + 2)$.

32. Dokažte, že pokud existuje konečná limita funkce v nějakém bodě, potom existuje jeho okolí, na kterém je tato funkce ohraničená.

5. Posloupnosti a řady

5.1 Limita a hromadné hodnoty. Mějme posloupnost (x_n) prvků Hausdorffova topologického prostoru X. Jelikož ∞ je prvkem uzávěru množiny $\mathbb{N}$, můžeme uvažovat limitu $\lim_{n\to\infty} x_n$. Pokud nedojde k mýlce, budeme tuto limitu označovat prostě $\lim x_n$.

Následující kritérium pro limitu posloupnosti je přímým důsledkem definice limity:

Věta 5.1. *Posloupnost (x_n) prvků topologického prostoru X má limitu x_0, právě když pro každé okolí U bodu x_0 existuje přirozené číslo n_0 takové, že pro každé přirozené číslo $n \geq n_0$ platí $x_n \in U$.*

Prvek x_0 se nazývá *hromadná hodnota posloupnosti* (x_n), jestliže ke každému jeho okolí U existuje nekonečně mnoho přirozených čísel k takových, že $x_k \in U$.

Věta 5.2. *Množina hromadných hodnot libovolné posloupnosti je uzavřená.*
D ů k a z. Označme A množinu hromadných hodnot posloupnosti (x_n). Zvolme libovolný prvek $x \in X \setminus A$. Jelikož x není hromadnou hodnotou, musí mít okolí U, které obsahuje pouze konečně mnoho členů posloupnosti (x_n). Pak ale každý prvek okolí U má tutéž vlastnost a $U \subset X \setminus A$. Tím jsme dokázali, že množina $X \setminus A$ je otevřená.

Věta 5.3. *Předpokládejme, že topologický prostor X je kompaktní a uvažujme posloupnost (x_n) prvků X.*
1. (x_n) má hromadnou hodnotu.
2. Má-li posloupnost (x_n) jedinou hromadnou hodnotu x_0, pak $\lim x_n = x_0$.
D ů k a z. 1. Předpokládejme, že žádný prvek množiny X není hromadnou hodnotou posloupnosti (x_n). Pak každý prvek $x \in X$ má okolí U_x, které obsahuje pouze konečně mnoho členů posloupnosti (x_n). Systém $S = \{U_x \mid x \in X\}$ je otevřené pokrytí množiny X a má konečné podpokrytí $T \subset S$. Nyní je zřejmé, že ve sjednocení systému T leží jen konečně mnoho členů posloupnosti (x_n). Ovšem $\cup T \subset X$ a máme co? A máme spor.

2. Kdyby neplatilo $\lim x_n = x_0$, pak existuje okolí U prvku x_0 takové, že v množině $X \setminus U$ leží nekonečně mnoho členů posloupnosti (x_n). Tyto prvky tvoří posloupnost v kompaktním topologickém prostoru $X \setminus U$,[1)] která má podle bodu 1. hromadnou hodnotu, různou od x_0. To je spor.

5.2 Posloupnosti reálných čísel. Pravíme, že posloupnost reálných čísel je *konvergentní*, má-li limitu v $\mathbb{R}$. Je-li limitou této posloupnosti ∞ nebo $-\infty$, říkáme, že je *divergentní*. Posloupnost, která není ani konvergentní, ani divergentní, se nazývá *oscilující*.

Ze cvičení 11 k předchozí kapitole víme, že množina $\overline{\mathbb{R}}$ je kompaktní. Podle věty 5.3 má tedy každá posloupnost reálných čísel v $\overline{\mathbb{R}}$ hromadnou hodnotu — množina hromadných hodnot je neprázdná. Podle věty 5.2 je tato množina navíc uzavřená, což ovšem dohromady znamená, že má nejmenší a největší prvek. Můžeme tedy zformulovat následující výsledek:

Věta 5.4. *1. Každá posloupnost reálných čísel má v $\overline{\mathbb{R}}$ největší a nejmenší hromadnou hodnotu.*
2. Je-li tato posloupnost navíc ohraničená, jsou tyto hromadné hodnoty reálná čísla.
D ů k a z. Bod 1. jsme dokázali v předchozím odstavci, bod 2. je zřejmý.

Největší hromadná hodnota posloupnosti reálných čísel (x_n) se nazývá *limes superior posloupnosti* (x_n) a označuje $\limsup_{n\to\infty} x_n$ nebo $\limsup x_n$. Nejmenší hromadná hodnota této posloupnosti se nazývá *limes inferior posloupnosti* (x_n) a označuje $\liminf_{n\to\infty} x_n$ nebo $\liminf x_n$.

Je-li σ rostoucí posloupnost přirozených čísel, pak posloupnost (x_{σ_n}) se *nazývá posloupnost vybraná z posloupnosti* (x_n) nebo *podposloupnost posloupnosti* (x_n).

---

1) Jak víme, že je kompaktní?

Věta 5.5. *Buď (x_n) posloupnost reálných čísel. Pak bod $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ je hromadnou hodnotou této posloupnosti, právě když existuje vybraná posloupnost x_{σ_n} taková, že* $\lim x_{\sigma_n} = x_0$.

D ů k a z. Buď U okolí bodu x_0. Předpokládejme, že existuje vybraná posloupnost x_{σ_n} taková, že $\lim x_{\sigma_n} = x_0$. Označme n_0 přirozené číslo takové, že pro každé $n \geq n_0$ je $x_{\sigma_n} \in U$ (věta 5.1). Hledanými čísly k jsou čísla $\sigma_{n_0}, \sigma_{n_0+1}, \sigma_{n_0+2}, \dots$

Nyní dokážeme opačné tvrzení pro $x_0 \in \mathbb{R}$ (pro $x_0 \in \{\infty, -\infty\}$ přenecháme důkaz čtenáři). Označme I_n interval $(x_0 - 1/n, x_0 + 1/n)$. Pomocí principu matematické indukce zkonstruujeme vybranou posloupnost (x_{σ_n}) takovou, že pro každé n je $x_n \in I_n$. Označme σ_1 nejmenší přirozené číslo, pro které $x_{\sigma_1} \in I_1$ (takových přirozených čísel je podle předpokladu nekonečně mnoho). Podobně, označme σ_2 nejmenší přirozené číslo větší než σ_1, pro které $x_{\sigma_2} \in I_2$ (přirozených čísel $k > \sigma_1$, pro která $x_k \in I_2$ je nekonečně mnoho). Předpokládejme nyní, že již máme čísla $\sigma_1 < \dots < \sigma_n$, která naši podmínku splňují. Pak σ_{n+1} budiž nejmenší přirozené číslo, pro které $\sigma_{n+1} > \sigma_n$ a $x_{\sigma_{n+1}} \in I_{n+1}$. Tím je hledaná vybraná posloupnost (x_{σ_n}) zkonstruována a věta dokázána.

Posloupnost (x_n) prvků množiny $\mathbb{R}$ se nazývá *cauchyovská*, jestliže ke každému reálnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje přirozené číslo n_0 takové, že pro každé $n_1, n_2 > n_0$ platí

$$|x_{n_1} - x_{n_2}| < \varepsilon \tag{5.2.1}$$

Věta 5.6. *Každá konvergentní posloupnost reálných čísel je cauchyovská. Každá cauchyovská posloupnost reálných čísel je konvergentní.*

D ů k a z. Buď (x_n) konvergentní posloupnost reálných čísel, x_0 její limita. Zvolme libovolné číslo $\varepsilon > 0$ a označme n_0 přirozené číslo takové, že pro každé $n > n_0$ je $|x_n - x_0| < \varepsilon/2$. Buďte nyní $n_1, n_2 > n_0$. Máme

$$|x_{n_1} - x_{n_2}| = |x_{n_1} - x_0 + x_0 - x_{n_2}| \leq |x_{n_1} - x_0| + |x_0 - x_{n_2}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Každá konvergentní posloupnost je tedy cauchyovská.

Mějme nyní cauchyovskou posloupnost (x_n) a označme n_0 přirozené číslo takové, že pro každé $n_1, n_2 \geq n_0$ je $|x_{n_1} - x_{n_2}| < 1$. Dále označme

$$M = \max\{x_1, x_2, \dots x_{n_0}\} + 1,$$
$$m = \min\{x_1, x_2, \dots x_{n_0}\} - 1.$$

Nyní pro libovolné $n \in \{1, 2, \dots, n_0 - 1\}$ platí $x_n < M$ a pro $n \geq n_0$ je $|x_n - x_{n_0}| < 1$, což znamená, že $x_n < x_{n_0} + 1 \leq M$. Posloupnost (x_n) je tedy shora ohraničená číslem M. Stejným způsobem se dokáže, že posloupnost (x_n) je také zdola ohraničená číslem m. Položme $a = \liminf x_n$ a $b = \limsup x_n$. Máme $a, b \in \mathbb{R}$ (věta 5.4).

Předpokládejme, že $a < b$ a položme $\varepsilon = \frac{1}{3}(b - a)$. Pak existuje přirozené číslo n_0 takové, že pro každé $n_1, n_2 > n_0$ je $|x_{n_1} - x_{n_2}| < \varepsilon$. Zvolme nyní $k, l \geq n_0$ tak, aby $|x_k - a| < \varepsilon$ a $|x_l - b| < \varepsilon$ (čísla k, l existují, jelikož a a b jsou hromadné hodnoty — věta 5.5). Dostáváme $x_l > b - \varepsilon$, $x_k < a + \varepsilon$, čili

$$x_l - x_k > b - \varepsilon - a - \varepsilon = 3\varepsilon - 2\varepsilon = \varepsilon$$

a to je spor, jelikož podle předpokladu, $x_l - x_k < \varepsilon$.

Dostáváme tedy $a = b$ a tvrzení plyne z věty 5.3.

5.3 Posloupnosti funkcí. Nechť $Y \subset X \subset \mathbb{R}$. Uvažujme posloupnost (f_n) funkcí $f_n : X \to \mathbb{R}$. Říkáme, že tato posloupnost *konverguje bodově k funkci* $f : Y \to \mathbb{R}$ *na množině* Y, jestliže pro každé $x \in Y$ platí $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Funkce f se nazývá *limita* posloupnosti (f_n) a označuje $\lim f_n$. Říkáme, že posloupnost (f_n) *konverguje k funkci* f *na množině* Y *stejnoměrně*, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ a $x \in Y$ platí $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Z uvedených definic ihned plyne: Jestliže posloupnost (f_n) konverguje k funkci f na množině Y stejnoměrně, pak k této funkci na této množině konverguje i bodově. Tuto implikaci lze obrátit například jsou-li funkce f_n konstantní.

Obsahuje-li množina Y všechna čísla $x \in X$, pro něž existuje $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, nazývá se *obor konvergence posloupnosti* (f_n).

Nechť $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x}{n}.$$

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$; oborem konvergence této posloupnosti je tedy množina $\mathbb{R}$. Předpokládejme nyní, že množina $Y \subset \mathbb{R}$ je ohraničená a $-M < Y < M$. K libovolnému $\varepsilon > 0$ zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby $M/n_0 < \varepsilon$. Pak pro každé $n \geq n_0$ a $x \in Y$ platí $|f_n(x)| = |x/n| \leq |x/n_0| \leq M/n_0 < \varepsilon$. Posloupnost (f_n) tedy konverguje stejnoměrně k nule na Y. Není-li ovšem množina Y ohraničená, najdeme ke každému $\varepsilon > 0$ a $n \in \mathbb{N}$ číslo $x \in Y$ takové, že $|x| > n\varepsilon$, neboli $|x/n| = |f_n(x)| > \varepsilon$. V tomto případě tedy posloupnost (f_n) na Y stejnoměrně nekonverguje.

Věta 5.7. *Jestliže k posloupnosti (f_n) funkcí $f_n : X \to \mathbb{R}$ a funkci $f : Y \to \mathbb{R}$ existuje posloupnost (y_n) taková, že $\lim y_n = 0$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x \in Y$ je $|f_n(x) - f(x)| < y_n$, pak posloupnost (f_n) konverguje stejnoměrně k funkci f na množině Y.*
D ů k a z. Zvolme $\varepsilon > 0$ a označme n_0 takové číslo, že pro každé $n > n_0$ platí $y_n < \varepsilon$. Pak pro každé $x \in Y$ platí $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ a tvrzení je dokázáno.

Následující tvrzení budeme často používat.

Věta 5.8. *Posloupnost (f_n) konverguje stejnoměrně na Y, právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje číslo n_0 takové, že pro každé $n_1, n_2 > n_0$ a $x \in Y$ platí $|f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x)| < \varepsilon$.*
D ů k a z. Jestliže posloupnost (f_n) konverguje stejnoměrně na Y k funkci f, pak k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje číslo n_0 takové, že pro každé $x \in Y$ a $n_1, n_2 > n_0$ platí

$$\begin{aligned} |f_{n_1}(x) - f(x)| &< \frac{\varepsilon}{2}, \\ |f_{n_2}(x) - f(x)| &< \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

Máme tedy

$$\begin{aligned} |f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x)| &= |f_{n_1}(x) - f(x) + f(x) - f_{n_2}(x)| \\ &\leq |f_{n_1}(x) - f(x)| + |f_{n_2}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Předpokládejme nyní naopak, že je splněna druhá podmínka tvrzení. Zvolme $\varepsilon > 0$ a označme n_0 číslo takové, že pro každé $n_1, n_2 > n_0$ a $x \in Y$ platí

$$|f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.3.2}$$

Podle předpokladu je posloupnost $(f_n(x))$ cauchyovská a existuje tedy číslo $f(x)$ takové, že $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Máme tedy

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \tag{5.3.3}$$

tvrzení je dokázáno.

Věta 5.9. *Nechť posloupnost (f_n) funkcí spojitých v bodě $x_0 \in Y$ stejnoměrně konverguje na množině Y k funkci f. Pak funkce f je spojitá v bodě x_0.*
D ů k a z. Položme $y_n = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$ a zvolme $\varepsilon > 0$. Pak existuje číslo n_1 takové, že pro každé $x \in Y$ a $n > n_1$ platí

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{5.3.4}$$

a číslo n_2 takové, že pro každé $n > n_2$,

$$|f_n(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5.3.5}$$

Položme $n = \max\{n_1, n_2\}$. Funkce f_n je spojitá v bodě x_0, existuje tedy okolí U tohoto bodu, tak, že pro každé $x \in Y \cap U$ platí

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5.3.6}$$

Pro libovolný bod $x \in Y \cap U$ (a pro *pevné n*, které jsme si před chvílí vybrali) tedy platí

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &< |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,\end{aligned}$$

což dokazuje spojitost funkce f v bodě x_0.

Uvažme funkce $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$. Snadno zjistíme, že pro $x < 1$ je $\lim f_n(x) = 0$, ale $\lim f_n(1) = 1$. Limitou posloupnosti (f_n) je tedy nespojitá funkce $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1, \\ 1 & x = 1. \end{cases}$$

Podle uvedené věty není konvergence posloupnosti (f_n) stejnoměrná. Vskutku, ke každému číslu $\varepsilon > 0$, $0 < \varepsilon < 1$, najdeme číslo $x \in [0, 1)$ tak, že $f_n(x) > \varepsilon$.

Důsledek 5.10. *Nechť posloupnost (f_n) stejnoměrně konverguje na množině Z k funkci f a nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje limita $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = a_n$. Pak existují i limity $\lim a_n$ a $\lim_{x\to x_0} f(x)$ a platí*

$$\lim a_n = \lim_{x\to x_0} f(x). \tag{5.3.7}$$

5.4 Řady. Mějme posloupnost (x_n) reálných čísel. *Nekonečnou řadou, určenou posloupností* (x_n), rozumíme symbol $\sum x_n$. Posloupnost (s_n), jejíž členy jsou dány předpisem $s_n = x_1 + \ldots + x_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, nazýváme *posloupnost částečných součtů řady* $\sum x_n$.

Jestliže posloupnost částečných součtů řady $\sum x_n$ konverguje, hovoříme o *konvergentní řadě* a číslo $\lim s_n$ nazýváme jejím *součtem*. V opačném případě hovoříme o *divergentní řadě*.

Součet nekonečné řady $\sum x_n$ obvykle rovněž označujeme symbolem $\sum x_n$ (pokaždé je přitom jasné, v jakém významu jsme tento symbol zrovna použili). Tvrzení $\sum x_n = s$ znamená: „Řada $\sum x_n$ konverguje a její součet je s“. Kromě tohoto zápisu používáme i zápis $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Zápis $\sum_{n=k}^{\infty} x_n$ znamená $\sum_{n=1}^{\infty} x_{n+k-1}$. V takovém případě budeme používat následující značení pro posloupnost částečných součtů: $s_n = x_k + x_{k+1} + \ldots + x_n$.

Nechť $q \in \mathbb{R}$. Řada $\sum q^{n-1}$ se nazývá *geometrická řada s kvocientem* q.e-li $q \neq 1$, pak pro n-tý člen s_n její posloupnosti částečných součtů platí

$$s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q}{1-q}(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}) = \frac{1-q^n}{1-q}. \tag{5.4.1}$$

Je-li $q = 1$, platí

$$s_n = n, \tag{5.4.2}$$

Vidíme tedy, že $\lim s_n$ existuje, právě když $|q| < 1$, a je rovna $1/(1-q)$. Uvedená řada tedy konverguje, právě když $|q| < 1$, a v tom případě platí $\sum q^{n-1} = 1/(1-q)$. Geometrická řada s $q = -1$ se nazývá *Grandiho řada*.

Řada $\sum 1/n$ se nazývá *harmonická řada*. Pro posloupnost (s_n) jejích částečných součtů platí

$$
\begin{aligned}
s_1 &= 1\\
s_2 &= 1 + \frac{1}{2}\\
s_4 &= s_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = s_2 + \frac{1}{2}\\
&\vdots\\
s_{2^{n+1}} &= s_{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}} > s_{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}} = s_{2^n} + \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Harmonická řada tedy diverguje.

Nechť

$$x_n = \frac{1}{n^2 - 1}. \tag{5.4.3}$$

Pro n-tý člen s_n posloupnosti částečných součtů řady $\sum_{n=2}^{\infty} x_n$ platí

$$
\begin{aligned}
s_n &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \ldots + \frac{1}{n-3} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).
\end{aligned}
$$

Je tedy $\sum_{n=2}^{\infty} x_n = \lim s_n = \frac{3}{4}$.

Věta 5.11 (Cauchyho-Bolzanovo kritérium). *Řada $\sum x_n$ konverguje, právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje číslo n_0 takové, že pro každé $n_1, n_2 > n_0$ platí*

$$|x_{n_1} + \ldots + x_{n_2}| < \varepsilon. \tag{5.4.4}$$

D ů k a z. Je-li s_n posloupnost částečných součtů řady $\sum x_n$ a $n_2 \geq n_1$, platí

$$|x_{n_1} + \ldots + x_{n_2}| = |s_{n_2} - s_{n_1-1}|. \tag{5.4.5}$$

Cauchyho-Bolzanovo kritérium tedy plyne z věty 5.6.

Jestliže v (5.4.5) položíme $n_1 = n_2$, dostaneme:

Důsledek 5.12 (nutná podmínka konvergence řady). *Konverguje-li řada $\sum x_n$, pak platí* $\lim x_n = 0$.

Aplikujte toto tvrzení na geometrickou a harmonickou řadu!

Důsledek 5.13. *Jestliže řada $\sum x_n$ konverguje, pak platí* $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} x_k = 0$.

Věta 5.14. *Mějme dvě posloupnosti reálných čísel (x_n), (y_n) a číslo c. Jestliže řady $\sum x_n$ a $\sum y_n$ konvergují, pak konvergují i řady $\sum(x_n + y_n)$ a $\sum c x_n$ a platí*

$$
\begin{aligned}
\sum(x_n + y_n) &= \sum x_n + \sum y_n,\\
\sum c x_n &= c \sum x_n.
\end{aligned}
\tag{5.4.6}
$$

D ů k a z. Platí

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}(x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + \ldots + x_n + y_n)\\
&\quad = \lim_{n\to\infty}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + \lim_{n\to\infty}(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) = \sum x_n + \sum y_n,
\end{aligned}
$$

$$\lim_{n\to\infty}(cx_1 + cx_2 + \ldots + cx_n) = c\lim(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = c\sum x_n.$$

Z uvedeného tvrzení ihned plyne (jak?), že jestliže řada $\sum x_n$ konverguje a řada $\sum y_n$ diverguje, pak řada $\sum x_n + y_n$ diverguje. Jestliže první dvě řady divergují, nelze o konvergenci třetí říci nic (uveďte příklady).

Věta 5.15. *Jestliže pro posloupnosti (x_n) a (y_n) existuje číslo n_0 takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $x_n = y_n$, pak $\sum x_n$ konverguje, právě když konverguje $\sum y_n$.*
D ů k a z. Za daných předpokladů konverguje řada $\sum(x_n - y_n)$. Dále viz větu 5.14.

Věta 5.16. *Nechť k je nezáporné celé číslo. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje, právě když konverguje řada $\sum_{n=k}^{\infty} x_n$.*
D ů k a z. Nechť $y_n = 0$ pro $n < k$ a $y_n = x_n$ pro $n \geq k$ Řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje, právě když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ (liší se konečným počtem členů — viz větu 5.15) a řada $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ konverguje, právě když konverguje řada $\sum_{n=k}^{\infty} x_n$ (porovnejte jejich posloupnosti částečných součtů).

Věta 5.17. *Nechť (k_n) je rostoucí posloupnost nezáporných celých čísel, $k_1 = 1$. Jestliže $\sum x_n = s$, pak pro posloupnost $(y_n) = (x_{k_n} + x_{k_n+1} + \ldots + x_{k_{n+1}-1})$ platí $\sum y_n = s$.*
D ů k a z. Stačí si uvědomit, že posloupnost částečných součtů řady $\sum y_n$ je vybraná z posloupnosti částečných součtů řady $\sum x_n$.

Opačné tvrzení neplatí; vyzkoušejte na Grandiho řadě, pro (k_n) posloupnost lichých čísel.

5.5 Řady s nezápornými členy. Nechť $(x_n) \geq 0$. Posloupnost částečných součtů řady $\sum x_n$ je neklesající. Konverguje tedy, právě když je ohraničená a právě když konverguje nějaká její podposloupnost. Jinak diverguje k $+\infty$.

Věta 5.18 (srovnávací kritérium). *Nechť $\sum x_n$ a $\sum y_n$ jsou řady s nezápornými členy a nechť existuje číslo n_0 takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí*

$$x_n \leq y_n \tag{5.5.1}$$

Potom z konvergence řady $\sum y_n$ plyne konvergence řady $\sum x_n$.
D ů k a z. Nechť řada $\sum y_n$ konverguje. Položme

$$\overline{x}_n = \begin{cases} 0 & \text{pro } n < n_0 \\ x & \text{pro } n \geq n_0. \end{cases}$$

Pro posloupnosti $(\overline{s}_n)$ a (t_n) částečných součtů řad $\sum \overline{x}_n$ a $\sum y_n$ platí $(\overline{s}_n) \leq (t_n)$. Posloupnost (t_n) ohraničená. Je tedy ohraničená i posloupnost $(\overline{s}_n)$ a řada $\sum \overline{x}_n$ konverguje. Podle věty 5.16 z konvergence řady $\sum \overline{x}_n$ plyne konvergence řady $\sum x_n$.

Řada $\sum y_n$ z předchozí věty se nazývá *majoranta* řady $\sum x_n$. Řada $\sum x_n$ se nazývá *minoranta* řady $\sum y_n$.

Věta 5.19 (limitní srovnávací kritérium). *Nechť $\sum x_n$ a $\sum y_n$ jsou řady s nezápornými členy a nechť existuje konečné*

$$\limsup \frac{x_n}{y_n}. \tag{5.5.2}$$

Potom z konvergence řady y_n plyne konvergence řady x_n.
D ů k a z. Z definice limes superior posloupnosti plyne, že posloupnost (x_n/y_n) je shora ohraničená. Existuje tedy číslo M takové, že pro každé n platí $x_n/y_n < M$, neboli $x_n < My_n$. Z věty 5.14 a konvergence řady $\sum y_n$ plyne konvergence řady $\sum My_n$. Z ní a ze srovnávacího kritéria plyne konvergence řady $\sum x_n$.

Ekvivalentní tvrzení k tvrzení srovnávacího kritéria (limitního i nelimitního) je: *Důsledkem divergence řady $\sum x_n$ je divergence řady $\sum y_n$.*

Věta 5.20 (d'Alembertovo podílové kritérium). *Buď $\sum x_n$ řada s kladnými členy. Existují-li čísla $q < 1$ a n_0 taková, že pro každé $n \geq n_0$ je*

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq q, \tag{5.5.3}$$

řada konverguje. Existuje-li číslo n_0 takové, že pro každé $n \geq n_0$ je

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1, \tag{5.5.4}$$

řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence.

D ů k a z. Dokážeme první tvrzení. Nechť $y_n = x_n$ pro $n < n_0$ a $y_n = q^{n-n_0} x_{n_0}$ pro $n \geq n_0$ Řada $\sum y_n$ konverguje (to plyne z konvergence geometrické řady a věty 5.18). Dále

$$\begin{aligned}
&x_{n_0+1} \leq q x_{n_0},\\
&x_{n_0+2} \leq q x_{n_0+1} \leq q^2 x_{n_0},\\
&\quad\vdots\\
&x_{n_0+p} \leq q x_{n_0+p-1} \leq \dots \leq q^{p-1} x_{n_0+1} \leq q^p x_{n_0}.
\end{aligned}$$

Řada $\sum y_n$ je tedy majoranta naší řady a první tvrzení plyne ze srovnávacího kritéria. Důkaz druhého tvrzení je zřejmý.

Věta 5.21 (limitní podílové kritérium). *Jestliže pro řadu $\sum x_n$ s kladnými členy je*

$$\limsup \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1, \tag{5.5.5}$$

pak konverguje. Je-li

$$\liminf \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1, \tag{5.5.6}$$

řada nesplňuje nutnou podmínku konveregence.

D ů k a z. Označme $a = \limsup x_{n+1}/x_n$, $b = \liminf x_{n+1}/x_n$. Nechť $a < q < 1$. Podle definice limes superior posloupnosti existuje číslo n_0 takové, že pro každé $n \geq n_0$ je $x_{n+1}/x_n \leq q$. První tvrzení tedy plyne z podílového kritéria. Jestliže $b > 1$, pak existuje číslo n_0 takové, že pro $n \geq n_0$ je $x_{n+1}/x_n > 1$, a druhé tvrzení plyne rovněž z podílového kritéria.

Věta 5.22 (Cauchyho odmocninové kritérium). *Buď $\sum x_n$ řada s nezápornými členy. Existují-li čísla $q < 1$ a n_0 taková, že pro každé $n \geq n_0$ je*

$$\sqrt[n]{x_n} \leq q, \tag{5.5.7}$$

řada konverguje. Existuje-li číslo n_0 takové, že pro každé $n \geq n_0$ je

$$\sqrt[n]{x_n} \geq 1, \tag{5.5.8}$$

řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence.

D ů k a z. Je podobný důkazu podílového kritéria a přenecháváme jej čtenáři jako užitečné cvičení.

Věta 5.23 (limitní odmocninové kritérium). *Jestliže pro řadu $\sum x_n$ s nezápornými členy je*

$$\limsup \sqrt[n]{x_n} < 1, \tag{5.5.9}$$

pak konverguje. Je-li

$$\limsup \sqrt[n]{x_n} > 1 \tag{5.5.10}$$

řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence.
D ů k a z. Postupujeme podobně, jako v důkazu limitního podílového kritéria.

5.6 Alternující řady. Řekneme, že řada $\sum x_n$ je *alternující*, jestliže pro každý člen x_n má člen x_{n+1} opačné znaménko.

Věta 5.24 (Leibnitzovo kritérium pro alternující řady). *Buď $\sum x_n$ alternující řada splňující podmínky $\lim x_n = 0$ a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > n_0$ je $|x_{n+1}|/|x| < 1$, pak řada konverguje.*
D ů k a z. S ohledem na větu 5.15 můžeme předpokládat, že $x_n \geq 0$ pro lichá n a $x_n \leq 0$ pro sudá n a že podmínka $|x_{n+1}|/|x_n| < 1$ platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Označme (s_n) posloupnost částečných součtů řady $\sum x_n$. Máme

$$\begin{aligned} s_{2n+2} &= s_{2n} + x_{2n+1} + x_{2n+2} \geq s_{2n}, && \text{(neboť } |x_{2n+1}| \geq |x_{2n+2}|) \\ s_{2n+1} &= s_{2n-1} + x_{2n} + x_{2n+1} \leq s_{2n-1}. && \text{(neboť } |x_{2n}| \geq |x_{2n+1}| \end{aligned}$$

Odtud plyne

$$s_2 \leq s_4 \leq s_6 \leq \ldots \tag{5.6.1}$$
$$s_1 \geq s_3 \geq s_5 \geq \ldots \tag{5.6.2}$$
$$s_{2n} = s_{2n-1} + x_{2n} \leq s_{2n-1}. \qquad \text{(protože } x_{2n} \leq 0) \tag{5.6.3}$$

Posloupnost (s_{2n}) je neklesající a shora ohraničená, neboť $s_{2n} \leq s_{2n-1} \leq s_1$, existuje tedy $\lim s_{2n} = s$. Podle (5.6.3) také $\lim s_{2n-1} = \lim s_{2n} - \lim x_{2n} = s$.

Zvolme $\varepsilon > 0$ podle předchozího odstavce existují přirozená čísla n_1, n_2 taková, že pro $n > n_1$ je $|s_{2n} - s| < \varepsilon$ a pro $n > n_2$ je $|s_{2n-1} - s| < \varepsilon$. Položme $m_0 = \max\{2n_1, 2n_2 - 1\}$, je-li $m > m_0$ přirozené číslo, potom pokud m je sudé a $m = 2n \geq 2n_1$ tedy $|s_m - s| = |s_{2n} - s| < \varepsilon$; nebo je m liché a $m = 2n - 1 \geq 2n_2 - 1$ a opět $|s_m - s| = |s_{2n-1} - s| < \varepsilon$. Což dokazuje konvergenci posloupnosti (s_n).

5.7 Absolutně konvergentní řady. K definici absolutně konvergentní řady musíme nejprve dokázat následující pomocné tvrzení:

Věta 5.25. *Konverguje-li řada $\sum |x_n|$, konverguje i řada $\sum x_n$ a platí $\left|\sum x_n\right| \leq \sum |x_n|$.*
D ů k a z. Pro libovolná čísla $n_1 \leq n_2$ platí

$$|x_{n_1} + \ldots + x_{n_2}| \leq |x_{n_1}| + \ldots + x_{n_2}.$$

Je-li tedy podmínka Cauchyho–Bolzanova kritéria splněna pro řadu $\sum |x_n|$, je splněna i pro řadu $\sum x_n$.

Položíme-li $n_1 = 1$, dostaneme nerovnost pro posloupnosti částečných součtů zkoumaných řad, ze které vyplývá nerovnost z tvrzení.

Řada $\sum x_n$, pro kterou konverguje řada $\sum |x_n|$, se nazývá *absolutně konvergentní*. Z předchozí věty plyne, že absolutně konvergentní řada je konvergentní. Konvergentní řada, která není absolutně konvergentní, se nazývá *neabsolutně konvergentní*.

Věta 5.26. *Mějme dvě posloupnosti reálných čísel (x_n), (y_n) a číslo $c \in \mathbb{R}$. Jestliže řady $\sum x_n$ a $\sum y_n$ absolutně konvergují, pak absolutně konvergují i řady $\sum(x_n + y_n)$ a $\sum cx_n$ a platí*

$$\begin{aligned} \sum(x_n + y_n) &= \sum x_n + \sum y_n, \\ \sum cx_n &= c \sum y_n. \end{aligned} \tag{5.7.1}$$

D ů k a z. Řada $\sum(|x_n| + |y_n|)$ konverguje podle věty 5.14. Dále pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|x_n + y_n| \leq$

$|x_n| + |y_n|$. Řada $\sum |x_n + y_n|$ tedy konverguje podle srovnávacího kritéria a řada $\sum x_n + y_n$ konverguje absolutně.

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|cx_n| = |c||x_n|$. Řada $\sum |cx_n|$ tedy konverguje podle věty 5.14 a řada $\sum cx_n$ konverguje absolutně.

Rovnosti z tvrzení plynou ze stejných rovností z věty 5.14.

Věta 5.27. *Budiž $\sum x_n$ absolutně konvergentní řada a $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekce. Řada $\sum y_n$, kde $y_n = x_{\sigma(n)}$, je absolutně konvergentní a platí $\sum x_n = \sum y_n$.*

D ů k a z. Označme $(\overline{s}_n)$ a $(\overline{t}_n)$ posloupnosti částečných součtů řad $\sum |x_n|$ a $\sum |y_n|$, $m_\sigma(n)$ největší prvek množiny $\{1, \ldots, n\}$. Posloupnost (m_σ) je neklesající a neohraničená, má tedy rostoucí podposloupnost $(k_\sigma(n))$. Posloupnost $(\overline{s}_{k_\sigma(n)})$ je tedy vybraná z posloupnosti $\overline{s}_n$. Navíc platí $(\overline{t}_n) \leq (s_{k_\sigma(n)})$. Z konvergence řady $\sum |x_n|$ tedy plyne konvergence řady $\sum y_n$ ($\sum |x_n|$ konverguje, $(\overline{s}_n)$ je tedy ohraničená, $(\overline{t}_n)$ je tedy rovněž ohraničená a $\sum |y_n|$ konverguje). Řada $\sum y_n$ je tedy absolutně konvergentní.

Označme nyní (s_n) a (t_n) posloupnosti částečných součtů řad $\sum x_n$ a $\sum y_n$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $s_{k_\sigma(n)} - t_n$ rovno součtu konečně mnoha členů posloupnosti $(y_k)_{k=n+1}^{\infty}$. Přitom podle důsledku 5.13. Cauchyho–Bolzanova kriteria z konvergence řady $\sum |y_n|$ plyne, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{k=n+1}^{\infty} |y_k| < \varepsilon$. Máme tedy

$$|s_{k_\sigma(n)} - t_n| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |y_k| < \varepsilon$$

a $s_{k_\sigma(n)} = \lim t_n$ (že tyto limity existují již víme), čili i $\lim s_n = \lim t_n$.

Řadě $\sum y_n$ říkáme *přerovnání řady* $\sum x_n$.

5.8 Neabsolutně konvergentní řady. Nechť řada $\sum x_n$ je neabsolutně konvergentní. Položme $x_n^+ = \max\{x_n, 0\}$, $x_n^- = -\min\{x_n, 0\}$. Posloupnosti x_n^+ a x_n^- jsou tedy nezáporné a platí $(x_n) = (x_n^+ - x_n^-)$.

Lemma 5.28. *Posloupnosti (x_n^+) a x_n^- obsahují nekonečně mnoho kladných členů.*

D ů k a z. Existuje-li číslo $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $x_n \geq 0$, řada $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$, a tedy i řada $\sum x_n$ konverguje absolutně, což je spor. Podobně z existence čísla n_0 takového, že pro každé $n \geq n_0$ platí $x_n \leq 0$ plyne absolutní konvergence řady $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$ (je totiž $|x_n| = -x_n$), a tedy i řady $\sum x_n$.

Lemma 5.29. *Řady $\sum x_n^+$ a $\sum x_n^-$ jsou divergentní.*

D ů k a z. Podle věty 5.14 řady $\sum x_n^+$ a $\sum x_n^-$ buď obě divergují, nebo obě konvergují. Jestliže obě konvergují, konvergují absolutně (jsou to řady s nezápornými členy) a řada $\sum x_n$ podle věty 5.26 konverguje absolutně. Musejí tedy být divergentní.

Nyní ukážeme, že pro neabsolutně konvergentní řady neplatí tvrzení podobné větě 5.27.

Věta 5.30 (Riemannova přerovnávací věta). *Nechť řada $\sum x_n$ neabsolutně konverguje. Pak k libovolnému $x \in \mathbb{R}$ existuje bijekce $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že $\sum_{\sigma(n)} x_n = x$.*

D ů k a z. Bude doplněn později...

Příklady

1. *Nechť $x \in \mathbb{R}$. Dokažte, že* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$.

Řešení: V případě, že $x = 1$, je tvrzení zřejmé.

Pokud $x > 1$, pak také $\sqrt[n]{x} > 1$. Nechť tedy $\sqrt[n]{x} > 1 + h_n$, kde $h_n > 0$. Platí $x = (1 + h_n)^n > 1 + nh_n > nh_n$ (využili jsme tvrzení binomické věty[2)]), pro $n > 1$, a tedy $0 < h_n < x/n$. Jelikož $\lim_{n\to\infty} x/n = x \lim 1/n = 0$, pak také $\lim h_n = 0$ a tedy $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$.

[2)]Binomická věta: Pro každé $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ platí $(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$, kde

Jestliže $0 < x < 1$, položme $y = 1/x$, tedy $y > 1$. Jelikož $\sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{1} = 1$, máme $\sqrt[n]{x} = 1/\sqrt[n]{y}$. Nyní, když využijeme to, co už víme o limitě z minulého tématu, dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{y}} = \frac{1}{1} = 1.$$

2. *Vypočtěte* $\lim(\sqrt{n^2+5n+6} - \sqrt{n^2+3n+1})$.
Řešení: Výraz v limitě rozšíříme výrazem $\sqrt{n^2+5n+6} + \sqrt{n^2+3n+1}$ a dostaneme

$$\begin{aligned}
&\lim(\sqrt{n^2+5n+6} - \sqrt{n^2+3n+1})\\
&\quad= \lim \frac{(\sqrt{n^2+5n+6} - \sqrt{n^2+3n+1})(\sqrt{n^2+5n+6} + \sqrt{n^2+3n+1})}{\sqrt{n^2+5n+6} + \sqrt{n^2+3n+1}}\\
&\quad= \lim \frac{n^2+5n+6-n^2-3n-1}{\sqrt{n^2+5n+6} + \sqrt{n^2+3n+1}}\\
&\quad= \lim \frac{2n+5}{\sqrt{n^2+5n+6} + \sqrt{n^2+3n+1}}.
\end{aligned}$$

Výraz v poslední limitě rozšíříme $1/n$ a dostaneme

$$\begin{aligned}
&\lim \frac{2n+5}{\sqrt{n^2+5n+6} + \sqrt{n^2+3n+1}}\\
&\quad= \lim \frac{2+5/n}{\sqrt{1+5/n+6/n^2} + \sqrt{1+3/n+1/n^2}}\\
&\quad= \frac{2}{1+1} = 1.
\end{aligned}$$

3. *Dokažte, že posloupnost* a_n*, kde* $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$*, je konvergentní.*

Řešení: Položme $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Pokusíme se dokázat, že posloupnost $(b)_n$ je klesající. Chceme tedy dokázat, že

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} > \left(\frac{n+2}{n}\right)^{n+2} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}.$$

To je ale splněno, právě když

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2} > \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}\frac{n+1}{n} && \text{tj.}\\
&\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2} > 1+\frac{1}{n} && \text{tj.}\\
&\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} > 1+\frac{1}{n}, && \text{jelikož } (n+1)^2 = n(n+2)+1.
\end{aligned}$$

Pro $h > 0$, $k > 1$, k celé je $(1+h)^k$. Levá strana poslední nerovnosti je tedy větší než

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$. Čtenář si jistě toto tvrzení dokáže za pomocí principu matematické indukce.

$$1+(n+2)\frac{1}{n(n+2)}=1+\frac{1}{n}.$$

Tím je poslední nerovnost dokázána a posloupnost (b_n) je klesající. Ona je ovšem také zdola ohraničená (neboť $b_n > 0$), existuje tedy $\lim b_n$ a my ji označíme e.[3] Nyní

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\mathrm{e}.$$

4. *Dokažte tvrzení (Princip vnořených intervalů): Buď (I_n) posloupnost uzavřených intervalů s koncovými body a_n, b_n tak, že*
1. pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $I_{n+1} \subset I_n$,
2. $\lim(a_n - b_n) = 0$.
Pak $\cap\{I_n, n \in \mathbb{N}\}$ je jednoprvková množina.

Řešení: Z první podmínky vyplývá, že posloupnost (a_n) je neklesající. Podle věty 4.26 tedy má limitu $a = \lim a_n$. Dále, posloupnost (a_n) je shora ohraničená každým z čísel b_k ($k \in \mathbb{N}$), a tedy $a \leq b_n$, pro každé $n \in \mathbb{N}$ (viz poznámku za důkazem). Navíc, jelikož posloupnost (a_n) je neklesající, je pro každé $k \in \mathbb{N}$, $a_k \leq a$ (proč?). Celkově: pro každé $k \in \mathbb{N}$, $a \in I_k$.

Předpokládejme nyní, že existuje jiné číslo $\overline{a}$, které také leží v každém z intervalů I_k. Jestliže $\overline{a} < a$, pak podle definice limity existuje číslo n_0 tak, že pro každé $n \geq n_0$ je $a_n > \overline{a}$, což ovšem znamená, že $\overline{a} \notin I_n$, a to je spor.

Jestliže $\overline{a} > a$, pak k tomu, aby $\overline{a}$ leželo v každém z intervalů I_n, je nutné, aby pro každé $n \in \mathbb{N}$ bylo $\overline{a} - a \leq b_n - a_n$. To ovšem znamená, že

$$\overline{a} - a \leq \lim(b_n - a_n) = 0.$$

(viz poznámku za důkazem), neboli $\overline{a} = a$, to je spor. Tím je tvrzení dokázáno.

Poznámka: V uvedeném důkazu jsme na dvou místech využili následující tvrzení, které je jednoduchým důsledkem definice limity: *Jestliže pro funkce $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ platí $f \leq g$ a existují-li limity $\lim_{x\to x_0} f(x)$ a $\lim_{x\to x_0} g(x)$, pak $\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x)$.*

5. *Rozhodněte o stejnoměrné konvergenci posloupnosti funkcí (f_n) na intervalech $(0, a)$ a $[a, \infty)$, kde $a > 0$, když $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$,*

$$f_n(x)=\frac{1}{1+nx}.$$

Řešení: Jestliže je $x > 0$, pak je $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Posloupnost (f_n) tedy bodově konverguje k nulové funkci na $(0, \infty)$.

Pro $x > a$ je

$$0 < f_n(x) \leq \frac{1}{1+na} \leq \frac{1}{na}.$$

Je-li $\varepsilon > 0$, stačí za n_0 zvolit celé číslo větší než $1/a\varepsilon$. Pro každé $n \geq n_0$ a pro každé $x \geq a$ potom platí

$$|f_n(x) - 0| = f_n(x) < \frac{1}{na} \leq \frac{1}{n_0 a} < \varepsilon.$$

Na intervalu $[a, \infty)$ se tedy jedná o stejnoměrnou konvergenci.

[3] Číslo e se nazývá *Eulerovo číslo*. Budeme se s ním často setkávat.

Podívejme se, jak to vypadá na intervalu $(0, a)$. Platí $f_n(1/n) = \frac{1}{2}$. Jestliže tedy zvolíme $\varepsilon < \frac{1}{2}$, neexistuje k němu žádné $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby z podmínky $x \in (0, a)$, $n \geq n_0$ plynulo $|f_n - 0| \leq \varepsilon$. Ať si totiž zvolíme n_0 jakkoliv velké, lze vždy najít přirozené n tak, že $n \geq n_0$ a $1/n < a$. Položíme-li $x = 1/n$, je splněno $n \geq n_0$ a $x \in (0, a)$, ale zároveň $|f_n(x) - 0| = f(1/n) = \frac{1}{2} > \varepsilon$. Na intervalu $(0, a)$ se tedy o stejnoměrnou konvergenci nejedná.

Cvičení

1. Sestrojte posloupnost reálných čísel (a_n) tak, aby $\lim a_n = \infty$ a aby byla splněna podmínka

   a) $\lim(a_{n+1} - a_n) = \infty$; b) $\lim(a_{n+1} - a_n) = 1$; c) $\lim(a_{n+1} - a_n) = 0$.

2. Uveďte příklad posloupností (a_n), (b_n), pro něž je $\lim a_n = \infty$, $\lim b_n = \infty$ a přitom:

   a) $\lim(a_n - b_n) = \infty$; b) $\lim(a_n - b_n) = -\infty$; c) $\lim(a_n - b_n) = a \in \mathbb{R}$;

   d) $\lim(a_n - b_n)$ neexistuje.

3. Uveďte příklad posloupností (a_n), (b_n), pro něž je $\lim a_n = \infty$, $\lim b_n = 0$ a přitom:

   a) $\lim(a_n b_n) = \infty$; b) $\lim(a_n b_n) = 0$; c) $\lim(a_n b_n) = -\infty$;

   d) $\lim(a_n b_n) = a > 0$, $a \in \mathbb{R}$; e) $\lim(a_n b_n) = a < 0$, $a \in \mathbb{R}$; f) $\lim(a_n b_n)$ neexistuje.

4. Rozhodněte, zda pro každou konvergentní posloupnost (a_n) existuje

   a) $\min\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$; b) $\max\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$; c) $\inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$;

   d) $\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

5. Nechť $\lim a_n = \infty$. Dokažte, že posloupnost (a_n) je zdola ohraničená.

6. Nechť $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$. Dokažte, že $\lim a_{\sigma(n)}$ pro každé rostoucí zobrazení $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

7. Buď $a_n > 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, nechť $\lim a_n = 0$. Dokažte, že z posloupnosti (a_n) lze vybrat klesající podposloupnost, ale nelze vybrat neklesající podposloupnost.

8. Dokažte, že ke každému $a \in \mathbb{R}$ existuje posloupnost reálných čísel konvergující k a.

9. Uveďte příklad posloupnosti reálných čísel která

   a) nemá v $\mathbb{R}$ žádnou hromadnou hodnotu;

   b) má v $\mathbb{R}$ jedinou hromadnou hodnotu;

   c) má v $\mathbb{R}$ jedinou hromadnou hodnotu, ale nemá limitu;

   d) má v $\mathbb{R}$ právě dvě hromadné hodnoty;

   e) má v $\mathbb{R}$ právě n hromadných hodnot ($n \in \mathbb{N}$);

   f) má v $\mathbb{R}$ nekonečně mnoho hromadných hodnot.

10. Dokažte: Jestliže ohraničená posloupnost není konvergentní, pak má alespoň dvě různé hromadné hodnoty.

11. Pomocí definice limity dokažte, že

    a) $\lim \dfrac{1}{n^2 + 1} = 0$; b) $\lim \sqrt[n]{3} = 1$; c) $\lim \sqrt[n]{\frac{1}{2}} = 1$.

12. Pomocí definice limity dokažte, že posloupnost (a_n), kde $a_n = (-1)^n$ nemá limitu.

13. Zjistěte, zda konverguje posloupnost (a_n), když

    a) $a_n = \dfrac{2 + (-1)^n}{n}$; b) $a_n = 1 + n(-1)^n$.

14. Určete limitu $a = \lim_{n\to\infty} n^k x^n$ v závislosti na parametrech $k, x \in \mathbb{R}$.

15. Vypočtete $\lim a_n$, kde

    a) $a_n = \dfrac{n^2 - 2n + 3}{2n^2 + n + 1}$; b) $a_n = \dfrac{2n^2 + n - 1}{n^3 - 2n}$; c) $a_n = \dfrac{n^4 + n + 1}{n^3 + n + 1}$.

16. Vypočtěte limitu posloupnosti (a_n), kde

a) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;
b) $a_n = \sqrt{n^2+5n+6} - \sqrt{n^2+3n+1}$;
c) $a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$;
d) $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

17. Spočtěte limitu $\lim \dfrac{2^n+3}{1-4\cdot 2^n}$.

18. Buď $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Spočtěte:

a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{1+a^n}$;
b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}}$.

19. Dokažte, že pro každou posloupnost (a_n) platí $\liminf a_n = \lim \min\{a_1, a_2, \dots a_n\}$.

20. Vypočtěte $\limsup a_n$, $\liminf a_n$, kde:

a) $a_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$;
b) $a_n = \dfrac{(2+(-1)^n)^n}{2^n}$.

Nalezněte všechny hromadné hodnoty těchto posloupností.

21. Dokažte, že posloupnost (a_n) je monotonní a ohraničená a najděte její limitu, když:

a) $a_n = 2 - \dfrac{5}{2n}$;
b) $a_n = \sqrt[n]{2+\frac{1}{n}}$;
c) $a_n = \dfrac{n^2+2}{4n^2+1}$.

22. Spočtěte limitu posloupnosti (a_n), když

a) $a_n = 3 + \dfrac{4}{3n}$;
b) $a_n = \sqrt[n]{4} - 16$;
c) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}$;
d) $a_n = \left(2+\frac{3}{n}\right)^3$;
e) $a_n = \dfrac{(n+1)(n+3)(n+2)}{n^4+1}$.

23. Dokažte, že uvedené divergentní posloupnosti nemají vlastní limitu a najděte k nim vybranou posloupnost, která má vlastní nebo nevlastní limitu:

a) $((-2)^n + 2^n)$;
b) $((-1)^n n)$;
c) $(n^{(-1)^n})$.

24. Vypočtěte limitu posloupnosti (a_n), kde:

a) $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$;
b) $a_n = \left(\dfrac{2n+1}{n-1}\right)^n$.

25. Na příkladech ukažte, že všechny předpoklady Principu vnořených intervalů jsou nutné.

26. Dokažte, že z Principu vnořených intervalů vyplývá axiom spojitosti.

27. Najděte obor konvergence a limitu posloupnosti funkcí (f_n), jestliže

a) $f_n(x) = \dfrac{n^2x - 5n}{2n^2 + nx}$;
b) $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

28. Rozhodněte, zda posloupnost (f_n) konverguje stejnoměrně na I, jestliže

a) $f_n(x) = \dfrac{nx^2+1}{n}$, $I = \mathbb{R}$;
b) $f_{n(x)} = 2^{-nx^2}$, $I = (0, \infty)$;
c) $f_n(x) = \dfrac{\chi(x)}{n}$, $I = \mathbb{R}$.

29. Rozhodněte o konvergenci následujících řad. U konvergentních se pokuste najít součet.

a) $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}$;
b) $\sum \dfrac{5\cdot 4^n + (-3)^{n+1}}{5^{n+2}}$;
c) $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^3 - n}$;
d) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \dfrac{n^3-1}{n^3+1}$;
e) $\sum(\sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2})$.

30. Rozhodněte o konvergenci následujících řad

a) $\sum \dfrac{1}{n+1}$;
b) $\sum \dfrac{1}{2^n - n^2}$;
c) $\sum \dfrac{1}{n2^n}$;
d) $\sum \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$;
e) $\sum \dfrac{2^{n-1}}{n^n}$;
f) $\sum \dfrac{1}{n!}$;
g) $\sum \left(\dfrac{3n-1}{3n+2}\right)$;
h) $\sum \left(\dfrac{3n}{3n+1}\right)^n$;
i) $\sum \dfrac{2^n}{(5+(-1)^n)^n}$;
j) $\sum \dfrac{2^n n!}{n^n}$.

31. Uveďte příklad konvergentní řady $\sum a_n$ s kladnými členy, pro kterou uplatí $\limsup a_{n+1}/a_n > 1$.

Existuje konvergentní řada $\sum a_n$ s kladnými členy, pro kterou platí $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$?
32. Najděte součet řady $\sum a_n$, kde

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{3^{n/2}}, & \text{je-li } n \text{ sudé,} \\ \dfrac{1}{2 \cdot 3^{(n-2)/2}}, & \text{je-li } n \text{ liché.} \end{cases}$$

33. Najděte součet řady $\sum a_n$, jestliže
a) $a_n = (-1)^{n(n+1)/2} 2^{-n}$;

b) $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{(-2)^{2n/3}}, & \text{je-li } n \text{ dělitelné 3;} \\ \dfrac{1}{(-2)^{n+(n-1)/3}}, & \text{je-li zbytek čísla } n \text{ po dělení 3 roven 1;} \\ \dfrac{1}{(-2)^{n+(n+1)/3}}, & \text{je-li zbytek čísla } n \text{ po dělení 3 roven 2.} \end{cases}$

34. Rozhodněte o neabsolutní konvergenci řady

$$\sum \frac{(-1)^n}{(n+1)\log_2(n+1)}.$$

35. Rozhodněte o absolutní a neabsolutní konvergenci řad:
a) $\sum (-1)^n \left(1 + \frac{1}{10^n}\right)$; b) $\sum \frac{(-1)^n}{n+3}$; c) $\sum (-1)^{n+1} \frac{\log_2(10+1/n)}{n}$.

Výsledky

2. a) $a_n = 2n, b_n = n$; **b)** $a_n = n, b_n = 2n$; **c)** $a_n = n + a, b_n = n$ **d)** $a_n = n + (-1)^n, b_n = n$. **3. a)** $a_n = n^2, b_n = 1/n$ **b)** $a_n = 1/n, b_n = n^2$ **c)** $a_n = n^2, b_n = -1/n$; **d)** $a_n = n, b_n = a/n$; **e)** $a_n = n, b_n = a/n$; **f)** $a_n = n, b_n = (-1)^n/n$. **4. a)** Nemusí (například $(1/n)$); **b)** nemusí (například $(-1/n)$); **c)** existuje; **d)** existuje. **9. a)** $a_n = n$; **b)** $a_n = 1/n$; **c)** $a_n = n$, pro n lichá, $a_n = 1/n$, pro n sudá; **d)** $(-1)^n$; **e)** $(a_n) = (1, 2, \ldots, n, 1, 2, \ldots, n, \ldots)$; **f)** $(a_n) = (1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \ldots)$. **13. a)** Ano, $\lim a_n = 0$; **b)** ne. **14.** pro $x, k > 0$, $a = \infty$, pro $x < 0, k > 0$, $a = -\infty$, pro $x > 0, k < 0$, $a = 0$ a pro $x, k < 0$, $a = 0$. **15. a)** $\frac{1}{2}$; **b)** 0; **c)** ∞. **16. a)** 0; **b)** 1; **c)** 0; **d)** $\frac{1}{2}$. **21. a)** 2; **b)** 1; **c)** $\frac{1}{4}$. **22. a)** 3; **b)** -15; **c)** 1; **d)** 8; **e)** 0. **29. a)** Diverguje; **b)** konverguje $\frac{169}{200}$; **c)** konverguje $\frac{1}{4}$; **d)** konverguje $\ln \frac{2}{3}$; **e)** konverguje $1 - \sqrt{2}$. **30. a)** Diverguje; **b)** konverguje; **c)** konverguje; **d)** diverguje; **e)** konverguje; **f)** konverguje; **g)** diverguje; **h)** diverguje; **i)** konverguje; **j)** konverguje. **32.** $\frac{5}{4}$. **33. a)** $-\frac{3}{5}$; **35. a)** Diverguje; **b)** konverguje neabsolutně; **c)** konverguje neabsolutně.

6. Nekonečné řady funkcí

V šesté kapitole pokračujeme ve studiu nekonečných řad. Nejprve odvozujeme základní tvrzení o součinech řad (která později využijeme při odvozování základních vlastností exponenciální a goniometrických funkcí). Poté zavádíme pojmy nekonečné řady funkcí a její bodové a stejnoměrné konvergence.

V dalším odstavci probíráme mocninné řady, které jsou základním příkladem nekonečných řad funkcí. Pomocí mocninných řad pak v posledním odstavci definujeme některé elementární funkce: exponenciální a logaritmickou funkci a goniometrické funkce.

6.1 Násobení řad. Podívejme se neprve na násobení mnohočlenů $x = x_1 + \ldots + x_n$ a $y = y_1 + \ldots + y_n$. Podle distributivního zákona máme pro

$$\begin{aligned} n = 1 \quad & xy = x_1y_1, \\ n = 2 \quad & xy = (x_1y_1) + (x_1y_2 + x_2y_2 + x_2y_1) \end{aligned}$$

(oproti předchozímu součinu přibyl součet $x_1y_2 + x_2y_2 + x_2y_1$). Pro dva trojčleny dostaneme

$$n = 3 \quad xy = (x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_2 + x_2y_1) + (x_1y_3 + x_2y_3 + x_3y_3 + x_3y_2 + x_3y_2)$$

(tedy oproti násobení dvojčlenů přibyl součet $x_1y_3 + x_2y_3 + x_3y_3 + x_3y_2 + x_3y_2$). Jistě bychom nyní byli schopni napsat které členy přibudou násobíme-li dva n-členy, toho za chvíli využijeme.

Obdobně postupujeme i v případě součinu nekonečných řad. Uvažme dvě řady $\sum x_n$ a $\sum y_n$ s posloupnostmi částečných součtů (s_n) a (t_n). Máme

$$\begin{aligned} s_nt_n &= (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) \\ &= x_1y_1 + \\ &\quad + x_1y_2 + x_2y_2 + x_2y_1 \\ &\quad + x_1y_3 + x_2y_3 + x_3y_3 + x_3y_2 + x_3y_1 \\ &\quad \vdots \\ &\quad + x_1y_n + x_2y_n + \ldots + x_{n-1}y_n + x_ny_n + \ldots + x_ny_{n-1} + x_ny_{n-2} + \ldots + x_ny_1. \end{aligned} \tag{6.1.1}$$

Posloupnost $(u_n) = (s_nt_n)$ je tedy posloupností částečných součtů řady $\sum z_n$, kde

$$\begin{aligned} z_n &= x_1y_n + x_2y_n + \ldots + x_{n-1}y_n + x_ny_n + \\ &\quad \ldots + x_ny_{n-1} + x_ny_{n-2} + \ldots + x_ny_1. \end{aligned} \tag{6.1.2}$$

Jestliže nyní existují limity $s = \lim s_n$ a $t = \lim t_n$, pak existuje i limita $\lim u_n$ a je rovna st. Dokázali jsme tedy

Věta 6.1. *Nechť členy řady $\sum z_n$ jsou určeny předpisem (6.1.2). Konvergují-li řady $\sum x_n$ a $\sum y_n$, pak konverguje i řada $\sum z_n$ a platí*

$$\sum z_n = \sum x_n \cdot \sum y_n. \tag{6.1.3}$$

Řada $\sum z_n$ z předchozí věty se nazývá *(obyčejný) součin řad* $\sum x_n$ *a* $\sum y_n$.

Věta 6.2. *Nechť řada $\sum \overline{z}$, je tvořena součiny x_iy_j, $i, j \in \mathbb{N}$ uspořádanými v libovolném pořadí. Pak jestliže řady $\sum x_n$ a $\sum y_n$ absolutně konvergují, konverguje absolutně i řada $\sum \overline{z}_n$ a platí*

$$\sum \overline{z} = \sum x_n \cdot \sum y_n. \tag{6.1.4}$$

D ů k a z. Tvrzení, že řada $\sum \overline{z}$ konverguje při libovolném uspořádání členů $x_i y_i$ plyne z absolutní konvergence řad $\sum x_n$, $\sum y_n$ a věty 5.27.

Zbývá tedy dokázat vztah (6.1.4). Protože, jak už víme, uspořádání členů řady $\sum \overline{z}_n$ její součet nezmění, předpokládejme, že členy posloupnosti $(\overline{z}_n)$ jsou uspořádány takto:

$$\begin{aligned}(z_n) = (&x_1y_1,\\ &x_1y_2, x_2y_2, x_2y_1,\\ &x_1y_3, x_2y_3, x_3y_3, x_3, y_2, x_3y_1,\\ &\ldots).\end{aligned}$$

Jelikož řady $\sum x_n$ a $\sum y_n$ konvergují absolutně, pak podle věty 6.1 konverguje i řada $\sum z_n$, tvořená členy

$$\begin{aligned}z_n = {} & |x_1||y_n| + |x_2||y_n| + \ldots + |x_{n-1}||y_n| + |x_n||y_n|\\ & + \ldots + |x_n||y_{n-1}| + |x_n||y_{n-2}| + \ldots + |x_n||y_1|\end{aligned}$$

Posloupnost částečných součtů této řady je vybranou posloupností z posloupnosti částečných součtů řady $\sum |\overline{z}_n|$, která má nezáporné členy a konverguje. Řada $\sum \overline{z}_n$ tedy konverguje absolutně. Tím je věta dokázána.

Důsledek 6.3. *Jestliže řady $\sum x_n$ a $\sum y_n$ absolutně konvergují, pak absolutně konverguje i řada $\sum z_n$, kde $z_n = x_1y_n + x_2y_{n-1} + \ldots + x_ny_1$ a platí $\sum z_n = \sum x_n \cdot \sum y_n$.*

Řada $\sum z_n$ z předchozího tvrzení se nazývá *Cauchyho součin řad* $\sum x_n$ a $\sum y_n$.

Uvažujme dvě geometrické řady $\sum p^n$ a $\sum q^n$, Cauchyho součin řad snadněji pochopíme uspořádáme-li si všechny součiny p^iq^j kde $i, j \in \mathbb{N}$ do nekonečně velké „tabulky“

$$\begin{array}{lllll} pq & p^2q & p^3q & p^4q & \ldots\\ pq^2 & p^2q^2 & p^2q^3 & \ldots & \\ pq^3 & p^3q^2 & \ldots & & \\ pq^4 & \ldots & & & \\ \vdots & & & & \end{array}$$

Cauchyho součin $\sum q^n \sum p^n$, porovnej s definicí, je řada $\sum z_n$ jejíž členy jsou $z_1 = pq$ (člen v levém horním rohu), $z_2 = p^2q + pq^2$ (druhá diagonála zprava do leva), dále $z_3 = p^3q + p^2q + pq^3$ (třetí diagonála), až obecně $z_n = p^nq + \ldots + pq^n$.

To může být velmi výhodné, jak uvidíme u mocninných řad. Ale již nyní, pokud by $p = q$, dostaneme $z_n = np^{n+1}$.

6.2 Nekonečné řady funkcí. Nechť $Y \subset X \subset \mathbb{R}$. Uvažujeme posloupnost (f_n) funkcí $f_n : X \to \mathbb{R}$. Symbol $\sum f_n$ nazýváme *nekonečnou řadou funkcí, určenou posloupností* (f_n). Posloupnost (h_n) funkcí $h_n : X \to \mathbb{R}$, definovanou předpisem

$$h_n = f_1 + f_2 + \ldots + f_n,$$

nazýváme *posloupností částečných součtů řady* $\sum f_n$. Jestliže je posloupnost částečných součtů (h_n) na množině Y bodově konvergentní, nazýváme řadu $\sum f_n$ *bodově konvergentní na množině* Y. Obor konvergence posloupnosti (h_n) nazýváme *oborem konvergence řady* $\sum f_n$. Je-li $Z \subset X$ obor konvergence řady $\sum f_n$, pak funkci $f : Z \to \mathbb{R}$ takovou, že pro každé $x \in Z$ platí $f(x) = \sum f_n(x)$ nazýváme *součtem řady* $\sum f_n$. Je-li posloupnost (h_n) na množině Y stejnoměrně konvergentní, nazýváme řadu $\sum f_n$ *stejnoměrně konvergentní na množině* Y.

Nechť $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a $f_n : X \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = n/x^n$. Najděme obor konvergence řady $\sum f_n$. Nechť $x \in X$. Použijeme podílové kritérium (věta 5.21) na řadu $\sum n/|x|^n$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)|x|^n}{|x|^{n+1}n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n|x|} = \frac{1}{x}.$$

Je-li tedy $1/|x| < 1$, řada $\sum n/|x|^n$ konverguje, a tedy řada $\sum n/x^n$ konverguje absolutně. Je-li $1/|x| > 1$ řada $\sum n/|x|^n$, a tedy ani řada $\sum n/x^n$ nesplňuje nutnou podmínku konvergence. Řady $\sum n/1^n$ a $\sum n/(-1)^n$ divergují. Oborem konvergence řady $\sum f_n$ je tedy množina $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Stejného výsledku lze dosáhnout pomocí odmocninového kritéria.

Věta 6.4 (Cauchy-Bolzanovo kritérium). *Řada $\sum f_n$ konverguje stejnoměrně na množině Y, právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje číslo n_0 takové, že pro každé $n_2 \geq n_1 \geq n_0$ a $x \in Y$ platí*

$$|f_{n_1} + \ldots + f_{n_2}| < \varepsilon. \tag{6.2.1}$$

D ů k a z. Stačí použít větu 5.8 na posloupnost částečných součtů řady $\sum f_n$.

Jestliže v (6.2.1) položíme $n_1 = n_2$, dostaneme

Důsledek 6.5 (nutná podmínka stejnoměrné konvergence řady funkcí). *Jestliže řada $\sum f_n$ konverguje stejnoměrně na Y, pak posloupnost (f_n) konverguje stejnoměrně k nule na Y.*

Důsledek 6.6. *Jestliže řada $\sum f_n$ konverguje stejnoměrně na Y, pak posloupnost $(\sum_{k=n}^{\infty} f_k)$ konverguje stejnoměrně k nule na Y.*

Věta 6.7. *Jestliže řada $\sum |f_n|$ konverguje na Y, pak i řada $\sum f_n$ konverguje na Y a platí $|\sum f_n| \leq \sum |f_n|$.*

D ů k a z. Pro každé $n_1 \geq n_2$ a $x \in Y$ platí

$$|f_{n_1}(x) + \ldots + f_{n_2}(x)| \leq |f_{n_1}(x)| + \ldots + |f_{n_2}(x)|$$

První část tvrzení je tedy důsledkem věty 6.4. Druhou část dokazuje následující výpočet:

$$\begin{aligned} \left|\sum f_n(x)\right| &= |\lim_{n\to\infty}(f_1(x) + \ldots + f_n(x))| \\ &\leq \lim_{n\to\infty}(|f_1(x)| + \ldots + |f_n(x)|) = \sum |f_n(x)|. \end{aligned}$$

Jestliže řada $\sum |f_n|$ konverguje stejnoměrně na Y (což podle věty 6.7 znamená, že řada $\sum f_n$ na Y rovněž stejnoměrně konverguje) říkáme, že řada na Y konverguje *absolutně stejnoměrně*.

Věta 6.8. *Nechť (f_n) a (g_n) jsou posloupnosti reálných funkcí na X. Jestliže $(|f_n|) \leq (g_n)$ a řada g_n konverguje stejnoměrně na Y, pak řada f_n konverguje absolutně stejnoměrně na Y.*

D ů k a z. Řada $\sum g_n$ splňuje na Y podmínku Cauchyho-Bolzanova kritéria (věta 6.4). Ke každému $\varepsilon > 0$ tedy existuje číslo n_0 takové, že pro každé $n_2 \geq n_1 \geq n_0$ platí $|g_{n_1}| + \ldots + |g_{n_2}| < \varepsilon$. Jelikož $(|f_n|) \leq (g_n)$, řada $\sum f_n$ rovněž na Y splňuje podmínku Cauchyho-Bolzanova kritéria . Řada $\sum f_n$ tedy na Y konverguje absolutně stejnoměrně.

Jsou-li funkce g_n konstantní, plyne stejnoměrná konvergence řady $\sum |g_n|$ z její bodové konvergence (ověřte!). V tomto případě je použití uvedené věty velmi výhodné (porovnej s příkladem 2).

Následující důležité tvrzení je bezprostředním důsledkem věty 5.9.

Věta 6.9. *Nechť funkce f_n jsou spojité na množině Y a řada $\sum f_n$ stejnoměrně konverguje k funkci f na Y. Pak funkce f je na množině Y spojitá.*

D ů k a z. Stačí aplikovat větu 5.9 na posloupnost částečných funkcí řady $\sum f_n$ (jak?).

Důsledek 6.10. *Nechť řada $\sum f_n$ stejnoměrně konverguje na množině Y k funkci f a nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje limita $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = a_n$. Pak řada $\sum a_n$ konverguje, limita $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existuje a platí*

$$\sum a_n = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

6.3 Mocninné řady. Výsledky předchozího odstavce aplikujeme na důležitý typ řad funkcí, na mocninné řady.

Nechť $X = \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ a (a_n) je posloupnost reálných čísel. Definujme posloupnost funkcí $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\begin{aligned} f_1 &= a_1, \\ f_n &= a_n(x - x_0)^{n-1}, \text{ pro } n > 1. \end{aligned} \tag{6.3.1}$$

Řada $\sum f_n$ se nazývá *mocninná řada*, číslo x_0 její *střed*, posloupnost a_n její *posloupnost koeficientů*.

Pro $n = 1$ a $x = x_0$ výraz $a_n(x - x_0)^{n-1}$ nemá smysl (číslo 0^0 není definováno). Proto bylo nutné funkci f_1 definovat zvlášť. Na druhou stranu, abychom se napříště vyhnuli nepříjemnostem s definováním nadvakrát, domluvíme se takto: kdykoli napíšeme mocninnou řadu $\sum a_n(x - x_0)^{n-1}$, budeme mít na mysli řadu, jejíž první člen je konstantní funkce a_1.

Věta 6.11. *Obor konvergence mocninné řady $\sum a_n(x - x_0)^{n-1}$ je neprázdný interval konečné délky se středem v x_0 nebo množina $\mathbb{R}$. V prvním případě je poloměr intervalu roven číslu $1/p$, kde*

$$p = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}, \tag{6.3.2}$$

ve druhém případě je $p = 0$.

V každém vnitřním bodě svého oboru konvergence mocninná řada konverguje absolutně.

D ů k a z. Zvolme $x \in \mathbb{R}$. Je-li $x = x_0$, řada $\sum a_n(x - x_0)^{n-1}$ absolutně konverguje. Předpokládejme, že $x \neq x_0$ a označme $p = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Z limitního odmocninového kritéria (věta 5.23) plyne, že je-li

$$|x - x_0|p < 1,$$

řada $\sum a_n(x - x_0)^{n-1}$ absolutně konverguje a je-li

$$|x - x_0|p > 1,$$

pak tato řada diverguje. Odtud plyne, že oborem konvergence řady $\sum a_n(x - x_0)^{n-1}$ je interval se středem v x_0 a poloměrem $1/p$ (jestliže $0 < p < \infty$) nebo interval $(-\infty, \infty)$ (je-li $p = 0$) nebo interval $[x_0, x_0]$ (je-li $p = \infty$). Konvergence v koncových bodech (tedy kdy $|x - x_0|p = 1$) je pro tvrzení nepodstatná.[1)]

Obor konvergence mocninné řady $\sum a_n(x - x_0)^{n-1}$ se nazývá *interval konvergence* této řady a jeho poloměr *poloměr konvergence* této řady (je-li intervalem konvergence množina $\mathbb{R}$, je tedy poloměr konvergence řady roven ∞).

Uvažujme řadu

$$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x + 1)^{n+1}. \tag{6.3.3}$$

Najdeme interval konvergence této řady. Pro $x \in \mathbb{R}$ aplikujeme odmocninové kritérium na řadu

$$\sum \frac{|x + 1|^{n+1}}{n} \qquad \text{(řada absolutních hodnot z (6.3.3))}$$

(je to řada nezáporných reálných čísel). Platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x + 1|^{n+1}}{n}} = \lim_{n\to\infty} |x + 1| \sqrt[n]{\frac{|x + 1|}{n}} = |x + 1|.$$

Naše řada tedy konverguje absolutně pro $|x + 1| < 1$, tedy pro $x \in (-2, 0)$ a diverguje pro $|x + 1| > 1$, tedy pro $x \in (-\infty, -2) \cup (0, \infty)$. Poloměr konvergence této řady je tedy 1. Zbývá vyšetřit konvergenci řady pro $x = -2$ a

[1)] To znamená, že se může stát, že oborem konvergence bude z jedné strany otevřený a z druhé strany uzavřený interval (porovnej s příkladem za následujícím odstavcem).

$x = 0$. V prvním případě se jedná o harmonickou řadu, která diverguje, ve druhém o alternující řadu, o níž snadno pomocí Leibnizova kritéria zjistíme, že konverguje. Intervalem konvergence naší mocninné řady je tedy interval $(-2, 0]$. Stejného výsledku lze dosáhnout i pomocí podílového kritéria.

Věta 6.12. *Mocninná řada* $\sum a_n(x - x_0)^{n-1}$ *s poloměrem konvergence* r *konverguje stejnoměrně na intervalu* $[x_0 - p, x_0 + p]$ *pro každé kladné* $p < r$.
D ů k a z. Podle věty 6.11 řada $\sum a_n p^{n-1}$ konverguje absolutně. Navíc pro každý prvek $x \in [x_0 - p, x_0 + p]$ platí $|a_n||x - x_0|^{n-1} \le |a_n|p^{n-1}$. Tvrzení tedy plyne z věty 6.8.[2)]

Důsledek 6.13. *Součet mocninné řady* $\sum a_n(x - x_0)^{n-1}$ *je funkce spojitá ve všech vnitřních bodech jejího intervalu konvergence.*
D ů k a z. Plyne z předchozí věty a z věty 6.9.

6.4 Exponenciální funkce a logaritmus. Uvažujme mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$. Pomocí podílového kritéria snadno zjistíme (viz. příklad 5), že oborem konvergence této řady je $\mathbb{R}$. Můžeme tedy definovat funkci $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$[3)] předpisem

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{6.4.1}$$

Tato funkce se jmenuje *exponenciální funkce*. Klademe $\mathrm{e} = \exp(1)$. Číslo e nazýváme *Eulerovo číslo*.[4)]

Je-li $\mathrm{e} = \exp(1)$, jen pouhým využitím definice funkce exp dostaneme, že $\sum_{n=0}^{\infty} 1/n! = \mathrm{e}$.

Následující tvrzení shrnuje základní vlastnosti funkce exp.

Věta 6.14. *1. Funkce* exp *je spojitá.*
2. Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$, *platí* $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$.
3. Funkce exp *je rostoucí.*
4. $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$ *a* $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$.
D ů k a z. 1. Plyne z důsledku 6.13.

2. Máme

$$\begin{aligned}
\exp(x) \cdot \exp(y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{y^n}{n!} + \frac{xy^{n-1}}{1!(n-1)!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \right) && \text{(důsledek 6.3 součet po diagonálách)} \\
&= \sum \frac{1}{n!} \left(\binom{n}{0} y^n + \binom{n}{1} xy^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n} x^n \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x + y)^n && \text{(binomická věta)} \\
&= \exp(x + y).
\end{aligned}$$

3. Jestliže $x < y$, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $x^n/n! < y^n/n!$. Řady pro $\exp(x)$ a $\exp(y)$ přitom mají nezáporné členy, což znamená, že $\exp(x) < \exp(y)$. Tím jsme dokázali, že funkce exp je rostoucí na intervalu $[0, \infty)$. Ze vztahu $\exp(x) \cdot \exp(-x) = 1$ (který plyne z bodu 2.) nyní snadno odvodíme (jak?), že funkce exp je rostoucí i na intervalu $(-\infty, 0]$.

4. Podle bodu 3. je $\exp(1) > \exp(0)$, neboli $\mathrm{e} > 1$. Podle bodu 2. je $\exp(n) = \mathrm{e}^n$. Odtud plyne, že $\lim_{n\to\infty} \exp(n) = \infty$. Z bodu 3. ovšem plyne, že také $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$. Hodnota druhé limity plyne z toho, že $\exp(-x) = 1/\exp(x)$.

[2)] Zde je vidět, jak je výhodné ohraničení konstantními funkcemi (jsou to funkce $a_n p^{n-1}$).

[3)] To, že jsme mohli vzít za obor hodnot interval $(0, \infty)$ ukáže následující věta.

[4)] Časem se ukáže, že $\sum_{n=0}^{\infty} 1/n! = \lim(1 + 1/n)^n$. Tím bude odstraněna nestrovnalost, vzniklá dvojím definováním čísla e.

Důsledek 6.15. *1. Pro každé celé číslo k platí* $\exp(k) = \mathrm{e}^k$.
2. $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$.
3. Funkce exp *je homeomorfismus.*
D ů k a z. 1. Plyne ihned z bodu 2. předchozí věty.
2. Plyne z bodů 3. a 4. předchozí věty.
3. Plyne z bodů 1. a 3. předchozí věty, z věty 4.21 a z bodu 2. tohoto důsledku.

Inverzní funkci k funkci exp nazýváme *přirozený logaritmus* a označujeme symbolem ln. Následující tvrzení je jednoduchým důsledkem vlastností exponenciální funkce.

Věta 6.16. *1. Funkce* ln *je spojitá.*
2. Pro každé $x_1, x_2 \in (0, \infty)$ je $\ln(x_1 x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$.
3. Funkce ln *je rostoucí.*
4. $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ *a* $\lim_{x \to \infty} \ln(x) = \infty$.
D ů k a z. 1. Plyne z bodu 3. důsledku 6.15.
2. Označme $y_1 = \ln(x_1)$, $y_2 = \ln(x_2)$. Máme

$$\ln(x_1 x_2) = \ln(\mathrm{e}^{y_1} \mathrm{e}^{y_2}) = \ln(\mathrm{e}^{y_1 + y_2}) = y_1 + y_2 = \ln(x_1) + \ln(x_2).$$

3. Inverzní funkce k roustoucí funkci je vždy rostoucí (proč?).
4. Z věty 4.26 vyplývá že tyto limity existují (v $\overline{\mathbb{R}}$). Označíme-li $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = a$ a $\lim_{x \to \infty} \ln(x) = b$, máme podle věty 4.24

$$\lim_{x \to a} \mathrm{e}^x = \lim_{y \to 0^+} \mathrm{e}^{\ln(y)} = \lim_{y \to 0^+} \ln(y) = 0$$

což znamená, že $a = -\infty$. Podobně, z

$$\lim_{x \to b} \mathrm{e}^x = \lim_{y \to \infty} \mathrm{e}^{\ln(y)} = \lim_{y \to \infty} y = \infty$$

plyne, že $b = \infty$.

Nyní můžeme definovat exponenciální a logaritmickou funkci o libovolném základu. Pro libovolné číslo $a > 0$ definujeme funkci $\exp_a : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ předpisem

$$\exp_a(x) = \mathrm{e}^{x \ln(a)}. \tag{6.4.2}$$

Funkce $\exp_a$ se nazývá *exponenciální funkce o základu a*. Následující věta shrnuje její základní vlastnosti (všechny snadno vyplývají z vlastností funkcí exp a ln; proto necháme její důkaz na čtenáři).

Věta 6.17. *1. Funkce* $\exp_a$ *je spojitá.*
2. Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí $\exp_a(x + y) = \exp_a(x) \cdot \exp_a(y)$.
3. Je-li $a \in (0, 1)$, je funkce $\exp_a$ *klesající. Pro $a = 1$ je konstantní a pro $a > 1$ rostoucí.*
4. Je-li $a \in (0, 1)$, je $\lim_{x \to \infty} \exp_a(x) = 0$ *a* $\lim_{x \to -\infty} \exp_a(x) = \infty$, *je-li $a > 1$ je* $\lim_{x \to \infty} \exp_a(x) = \infty$ *a* $\lim_{x \to -\infty} \exp_a(x) = \infty$

Důsledek 6.18. *1. Pro každé celé číslo k platí* $\exp_a(k) = a^k$.
2. Pro $a \neq 1$ je $\exp_a(\mathbb{R}) = (0, \infty)$.
3. Pro $a \neq 1$ je $\exp_a$ *homeomorfismus.*

Vzhledem k bodu 1. uvedeného důsledku je přirozené zavést označení $\exp_a(x) = a^x$ pro libovolné reálné číslo a. Ihned dostáváme

$$(a^x)^y = a^{xy}.$$

Nechť $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$. Inverzní funkce k funkci $\exp_a$ se nazývá *logaritmus o základu a* a označuje $\ln_a$. Základní vlastnosti této funkce si milý čtenář již snadno odvodí sám.

6.5 Goniometrické funkce. Podobně jako exponenciální funkce se definují i funkce goniometrické. Funkce *sinus* $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ a *kosinus* $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ jsou definovány předpisem

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \tag{6.5.1}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \tag{6.5.2}$$

(opět lze zjistit, že řady na pravé straně konvergují pro každé $x \in \mathbb{R}$, což nás opravňuje vzít za definiční obor $\mathbb{R}$; později se ukáže, že maximum a minimu těchto funkcí je -1 a 1, proto oborem hodnot může být interval $[-1, 1]$).

Základní vlastnosti goniometrických uvádí následující věta.

Věta 6.19. *1. Funkce* sin *a* cos *jsou spojité.*
2. Funkce sin *je lichá, funkce* cos *je sudá.*
3. Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ *platí*

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \qquad \textit{(součtový vzorec pro sinus)}$$

a

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y). \qquad \textit{(součtový vzorec pro kosinus)}$$

D ů k a z. 1. Plyne z důsledku 6.13.

2. Plyne z tvrzení 3. věty 2.15.

3. Dokážeme nejprve součtový vzorec pro sinus. Vyjádřeme si výrazy $\sin(x)\cos(y)$ a $\cos(x)\sin(y)$ jako cauchyovy součiny řad z (6.5.1) a (6.5.2) (tedy použijeme důsledek 6.3, můžeme, řady jsou přece absolutně konvergentní (ověřte!)). Máme

$$\begin{array}{ccccc}
\multicolumn{5}{c}{\sin(x)\cos(y)} \\
x & -\frac{x^3}{3!} & \frac{x^5}{5!} & \frac{x^7}{7!} & \dots \\
-\frac{xy^2}{2!} & \frac{x^3y^2}{3!2!} & -\frac{x^5y^2}{5!2!} & \dots & \\
\frac{xy^4}{4!} & -\frac{x^3y^4}{3!4!} & \dots & & \\
-\frac{xy^6}{6!} & \dots & & & \\
\vdots & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
\multicolumn{5}{c}{\sin(y)\cos(x)} \\
y & -\frac{y^3}{3!} & \frac{y^5}{5!} & -\frac{y^7}{7!} & \dots \\
-\frac{x^2y}{2!} & \frac{x^2y^3}{2!3!} & -\frac{x^2y^5}{2!5!} & \dots & \\
\frac{x^4y}{4!} & -\frac{x^4y^3}{4!3!} & \dots & & \\
-\frac{x^6y}{2!} & \dots & & & \\
\vdots & & & &
\end{array}$$

Vezmeme-li postupně z obou těchto tabulek nejprve první diagonály a sečteme je potom druhé a tak dále (to přece můžeme, jsou to absolutně konvergentní řady, porovnej s větou 5.27), dostaneme řadu

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a_n &= (x+y) - \left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x^2y}{2!} + \frac{xy^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} \right) + \\
&\quad + \left(\frac{x^5}{5!} + \frac{x^4y}{4!} + \frac{x^3y^2}{3!2!} + \frac{x^2y^3}{2!3!} + \frac{xy^4}{4!} + \frac{y^5}{5!} \right) - \dots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{x^{2n+1-k}y^k}{(2n+1-k)!k!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} x^{2n+1-k} y^k
\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+y)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin(x+y)$$

Obdobným způsobem lze dokázat i součtový vzorec pro kosinus ten ale přenecháváme tobě čtenáři.

Důsledek 6.20. *1. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí* $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ *a* $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.
2. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.
D ů k a z. 1. Plyne ze součtových vzorců sinu a kosinu.

2. V součtovém vzorci pro kosinus položíme $y = -x$, využijeme bodu 2. předchozí věty a toho, že $\cos(0) = 1$. Potom tedy dostáváme

$$1 = \cos(x - x) = \cos(x)\cos(-x) - \sin(x)\sin(-x) = \cos^2(x) + \sin^2(x).$$

Lze dokázat, ale zatím to není v našich silách, že takto definované funkce sin a cos mají téže vlastnosti, s nimiž se čitatel v předchozím studiu setkal. Zopakujme pouze, že funkce sin a cos jsou periodické a polovinu jejich periody budeme značit π.[5] Další vlastnosti goniometrických funkcí zde již nezmiňujeme, spoléháme se na čtenářovy dřívější znalosti, o dalších goniometrických funkcích se zde již jen zmíníme.

Definujeme funkci $\tan : \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, tak že položíme $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$, tuto funkci nazveme *tangens*. Obdobně definujeme funkci *kotangens* $\mathrm{cotan} : \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{cotan}(x) = \cos(x)/\sin(x)$.

6.6 Cyklometrické funkce.

Inverzní funkce ke zúženým funkcím $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$, $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$, $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ a $\mathrm{cotan} : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ nazýváme *arkus sinus, arkus kosinus, arkus tangens* a *arkus kotangens*, značíme je arcsin, arccos, arctan a arccotan.

Vlastnosti těchto funkcí laskavě ponecháváme k prozkoumání čtenáři.

Příklady

1. *Najděte obor konvergence řady $\sum f_n$, jestliže $f_n(x) = (x-2)^n/n$.*
Řešení: Použijeme odmocninové kritérium na řadu $\sum |f_n|$

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x-2|^n}{n}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{|x-2|^n}}{\sqrt[n]{n}} = \frac{|x-2|}{1}.$$

Z odmocninového kritéria dostáváme, že pro $|x-2| < 1$ řada $\sum |f_n|$ konverguje a podle věty 5.25 konverguje i $\sum f_n$. Pro $|x-2| > 1$ řada $\sum |f_n|$ a tudíž i $\sum f_n$ nesplňuje nutnou podmínku konvergence. Zbývá nám ověřit případy $x = 3$ a $x = 1$. Pro $x = 3$ jde o řadu $\sum 1/n$, tedy o harmonickou řadu, která, jak jistě víme, nekonverguje. Pro $x = 1$ jde o řadu $\sum n(-1)^n/n$, tato řada je konvergentní. Lze se o tom přesvědčit Leibnitzovým kritériem. Celkově, oborem konvergence naší řady je interval $[1, 3)$.

2. *Dokažte, že řada $\sum f_n$ stejnoměrně konverguje na I, jestliže $f_n(x) = \dfrac{1}{e^{nx} n}$ a $I = [1, \infty)$.*

Řešení: Pokusíme se k řadě $\sum |f_n|$ najít stejnoměrně konvergentní majorantu. Nejlépe se pro tento účel hodí řada konstantních funkcí (pro ty přece stejnoměrná konvergence plyne z konvergence, proč?). Každou funkci $|f_n|$ shora ohraničíme konstantní funkcí $g_n(x) = \sup_{x\in[1,\infty)} |f_n(x)|$. Protože každá z funkcí $|f_n|$ je na intervalu $[1, \infty)$ klesající (opravdu $|f_n|(x) = f_{n(x)} = 1/n \cdot 1/e^{nx}$, funkce $1/n$ je

[5] Známé Ludolfovo číslo. Pomocí součtu nekonečné řady jej lze definovat $\pi = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

konstantní a e^{nx} rostoucí), nabývá f_n svého maxima v bodě 1. Proto $g_n(x) = f_n(1) = 1/ne^n$, řada $\sum 1/ne^n$ je konvergentní (ověřte odmocninovým kritériem!) a řada $\sum g_n$, tudíž i $\sum f_n$, je stejnoměrně konvergentní.

3. *Ukažte, že součet řady funkcí $\sum f_n$, kde $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{5x^2}{n^2}$ je spojitá funkce.*

Řešení: Je jasné, že každá z funkcí f_n je spojitá, pokud se nám podaří ukázat, že řada $\sum f_n$ konverguje stejnoměrně na $[0, 1]$, pak i její součet bude nutně spojitá funkce. Stejně jako v předchozím příkladě se pokusíme funkce f_n shora ohraničit konstantními funkcemi. Jelikož $f_n \geq 0$ a pro každé $x \in [0, 1]$ platí $5x^2 \leq 5$, vezmeme posloupnost (g_n) konstantních funkcí, $g_n(x) = 5/n^2$, pro které platí $f_n \leq g_n$ a protože $\sum g_n = \sum 5/n^2$ konverguje (ověřte podílovým kritériem!), podařilo se nám řadu funkcí $\sum f_n$ shora ohraničit stejnoměrně konvergentní řadou funkcí $\sum g_n$.

4. *Najděte obor konvergence mocninné řady se středem v x_0 a posloupností koeficientů (a_n), jestliže $x_0 = 0$ a $a_n = n5^n$.*

Řešení: Počítejme poloměr konvergence $r = 1/p$, kde $p = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n5^n|}$. Tedy

$$p = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n5^n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{5^n} = 1 \cdot 5.$$

Víme, že řada konverguje pro $x \in (x_0 - r, x_0 + r) = (-\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$, jak je tomu v koncových bodech musíme prozkoumat zvlášť. Pro $x = -\frac{1}{5}$, jde o řadu $\sum n5^n(-\frac{1}{5})^n = \sum(-1)^n$, která ale nesplňuje nutnou podmínku konvergence. Obdobně je tomu i pro $x = \frac{1}{5}$. Celkově dostáváme, že intervalem konvergence této řady je $(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$.

5. *Najděte obor konvergence řady $\sum \dfrac{x^n}{n!}$.*

Řešení: Využijeme limitního podílového kritéria. Počítejme

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{x^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0,$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$. Tedy oborem konvergence je $\mathbb{R}$.

Cvičení

1. Najděte obor konvergence řady $\sum f_n$, jestliže
   a) $f_n(x) = (3 - x)^n$;
   b) $f_n(x) = \dfrac{x(x+n)}{n}$;
   c) $f_n(x) = \dfrac{n!}{(x^2+1)(x^2+2)\dots(x^2+n)}$;
   d) $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{|x|}{x}\right)^n$;
   e) $f_n(x) = \ln^n(3x)$;
   f) $f_n(x) = \dfrac{\cos(x)}{e^{nx}}$.
2. Dokažte následující tvrzení: Je-li $\sum f_n$ konvergentní řada konstantních funkcí $f : X \to \mathbb{R}$, pak tato řada konverguje na X stejnoměrně.
3. Dokažte, že řada $\sum_{n=2}^{\infty} f_n$ stejnoměrně konverguje na I, jestliže
   a) $f_n(x) = \dfrac{1}{x^4 + n^2}$, $\quad I = \mathbb{R}$;
   b) $f_n(x) = x^2 e^{-nx}$, $\quad I = [0, \infty)$;
   c) $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + n^4x^2}$, $\quad I = [0, \infty)$;
   d) $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2 + e^{2x}}$, $\quad I = \mathbb{R}$;

e) $f_n(x) = \dfrac{\cos(nx)}{2^n}, \quad I = \mathbb{R};$ f) $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n\sqrt{n}}, \quad I = \mathbb{R};$

g) $f_n(x) = \ln\left(1 + \dfrac{x}{n\ln^2(n)}\right), I = (-1, 1);$ h) $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n + \sin(x)}, \quad I = [0, 2\pi];$

i) $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x + n}, \quad I = (0, \infty);$ j) $f_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-n^2x^2}}{n^3}, \quad I = \mathbb{R}.$

4. Dokažte, že součet řady $\sum f_n$ je spojitá funkce, kde

a) $f_n(x) = \dfrac{\cos(nx)}{n(n+1)};$ b) $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n(n+1)};$ c) $f_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{n(n^2+1)}.$

5. Najděte obor konvergence mocninné řady se středem x_0 a posloupností koeficientů (a_n), jestliže

a) $x_0 = 0, \quad a_n = n5^n;$ b) $x_0 = 0, \quad a_n = n!;$

c) $x_0 = 0, \quad a_n = \dfrac{3^n}{\sqrt{2^n}};$ d) $x_0 = 0, \quad a_n = 3 + (-1)^n;$

e) $x_0 = 2, \quad a_n = \dfrac{(-1)^n}{n + \sqrt{n}};$ f) $x_0 = 2, \quad a_n = \dfrac{n!}{n^n}.$

6. Najděte obor konvergence řady $\sum f_n$, jestliže

a) $f_n(x) = \dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!(2n-1)};$ b) $f_n(x) = 3^{n^2}x^{n^2};$

c) $f_n(x) = n!x^{n^2};$ d) $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{2^n};$

e) $f_n(x) = (n-1)5^{n-1}n^{n-1};$ f) $f_n(x) = 10^{2n}(2x-3)^n.$

7. Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí následující rovnosti

a) $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y);$

b) $\exp(1 - 1) = 1.$

8. Buď

$$a = \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Dokažte, že Cauchyho součin řad $a \cdot a$ nekonverguje. Obyčejný součin řad $a \cdot a$ ale konverguje (proč?). Jak je to možné?

9. Pomocí Cauchyho součinu spočtěte druhou mocninu řady $\sum(-\frac{1}{5})^{n-1}$.

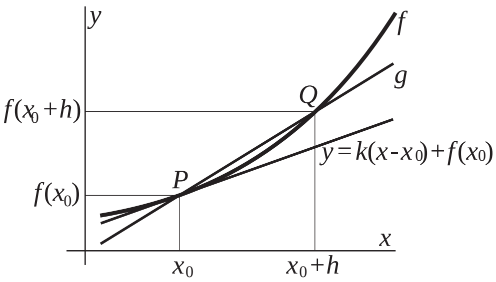
Výsledky

1. a) $(2, 4)$; **b)** $\emptyset$; **c)** $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; **d)** $(-\infty, 0)$; **e)** $(1/3\mathrm{e}, \mathrm{e}/3)$; **f)** $\{-\pi/2 - \pi n \mid n = 0, 1, 2, \dots\} \cup (0, \infty)$. **3. a)** Stejnoměrně konvergentní majoranta na I: $g_n(x) = 1/n^2$; **b)** $g_n(x) = \mathrm{e}^{-n}$; **c)** $g_n(x) = 1/2n^2$; **e)** $g_n(x) = 2^n$; **f)** $g_n(x) = n^{-3/2}$; **h)** $g_n(x) = (-1)^n/n$; **i)** $g_n(x) = (-1)^n/n$; **j)** $g_n(x) = 1/n^3$. **4. a)** Stejnoměrně konvergentní majoranta: $g_n(x) = 1/(n(n+1))$; **b)** $g_n(x) = 1/(n(n+1))$; **c)** $g_n(x) = 1/(n(n^2+1))$. **5. a)** $(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$; **b)** $\{0\}$; **c)** $(-\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2})$; **e)** $(1, 3)$; **f)** $(2 - \mathrm{e}, 2 + \mathrm{e})$. **6. b)** $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$; **c)** $\{0\}$; **d)** $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$; **e)** $\emptyset$; **f)** $(\frac{397}{200}, \frac{403}{200})$. **9.** $\frac{25}{36}$.

7. Diferenciální počet v $\mathbb{R}$

V této kapitole se dostáváme k jednomu z nejdůležitějších pojmů matematické analýzy k derivaci. Nejprve definujeme pojem *derivace* funkce reálné proměnné, následují základní vlastnosti derivace a derivace základních funkcí.

V dalších odstavcích se postupně věnujeme užití derivací při hledání extrémů funkcí, výpočtu limit a odhadu hodnoty funkce.



7.1 Derivace. Postupnými úvahami se pokusíme definovat pojem tečny ke grafu funkce. Uvažujme funkci $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou na otevřeném intervalu I. Zvolme si libovolný bod $x_0 \in I$ a kladné číslo $h \in \mathbb{R}$ volme tak, aby $x_0 + h \in I$. Označme si $P = (x_0, f(x_0))$ a $Q = (x_0 + h, f(x_0 + h))$ jim odpovídající body na grafu funkce f. Jak již víme (věta 2.13), grafem afinní funkce je přímka, není těžké ověřit, že přímka procházející body P a Q je grafem afinní funkce $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0) + f(x_0). \tag{7.1.1}$$

Směrnice této přímky je $(f(x_0 + h) - f(x_0))/h$.

Limitu směrnic těchto přímek, pokud existuje, nazýváme *derivace funkce* f *v bodě* x_0 a značíme $f'(x_0)$. Tedy

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad \left(\text{případně} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right). \tag{7.1.2}$$

Pokud ve vzorci (7.1.2) nahradíme limitu limitou zleva (případně zprava) dostaneme *derivaci zleva (zprava) funkce* f *v bodě* x_0, značíme ji $f'_-(x_0)$ ($f'_+(x_0)$). Je-li limita v (7.1.2) nevlastní říkáme, že f má v x_0 *nevlastní derivace*, obdobně pro *vlastní derivaci*. Označení derivace tedy symbol $f'(x_0)$, připomíná hodnotu nějaké funkce, je to záměrné. Mějme funkci $f : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $X \subset J$ je množina obsahující všechny body ve kterých má f vlastní derivaci, pak funkci $f' : X \to \mathbb{R}$, která bodu z X přiřadí derivaci funkce f v tomto bodě nazveme *derivace funkce*.

Je-li f konstantní funkce potom $f' = 0$, skutečně pokud $f(x) = c$ máme

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Další funkcí, jejíž derivaci můžeme spočítat přímo pomocí definice derivace, je mocninná funkce. Nechť tedy $n \in \mathbb{N}$ spočítejme derivaci funkce pow_n. Máme

$$\begin{aligned}
\mathrm{pow}'_n(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{pow}_n(x_0 + h) - \mathrm{pow}_n(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x_0^n + n x_0^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \ldots + h^n - x_0^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{n x_0^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \ldots + h^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(n x_0^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-1} h + \ldots + h^{n-1} \right) = n x_0^{n-1} = n\,\mathrm{pow}_{n-1}(x_0).
\end{aligned}$$

Celkově tedy máme $(\mathrm{pow}_n)' = n\,\mathrm{pow}_{n-1}$, zjednodušeně zapisujeme $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Nyní již máme dostatečný aparát k tomu, abychom mohli nadefinovat pojem tečny. Přímka procházející bodem $(x_0, f(x_0))$ a mající směrnici $f'(x_0)$ je *tečna ke grafu funkce* f *v bodě* $(x_0, f(x_0))$. Rovnice této tečny je $y = f'(x_0)(x - x_0) - f(x_0)$.

Úmluva: Nadále, v rámci této kapitoly, bude $I \subset \mathbb{R}$ představovat otevřený interval.

Následující věta je jednoduchým důsledkem věty 4.27, proto ji uvádíme bez důkazu.

Věta 7.1. *Funkce* $f : J \to \mathbb{R}$ *má v bodě* $x_0 \in J$ *derivaci* $f'(x_0)$ *(vlastní nebo nevlastní), právě když existují* $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$ *a platí* $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0)$.

Funkce absolutní hodnota má v bodě 0 derivaci zleva rovnu -1 a derivaci zprava rovnu 1, proto podle předchozí věty v nule nemá derivaci.

Souvislost mezi existencí derivace v bodě a spojitostí v tomto bodě popisuje následující věta.

Věta 7.2. *Nechť* $f : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *má v bodě* $x_0 \in J$ *konečnou derivaci, potom* f *je v* x_0 *spojitá.*

D ů k a z. Počítejme limitu $\lim_{h\to 0}(f(x_0 + h) - f(x_0))$, je-li $f'(x_0)$ vlastní potom

$$\lim_{h\to 0}(f(x_0 + h) - f(x_0)) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}h =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\lim_{h\to 0} h = f'(x_0)0 = 0.$$

Což dokazuje, že $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ a tedy i spojitost v x_0.

Podmínka, že derivace v bodě x_0 musí být konečná se nedá vynechat, to je vidět na funkci signum. Funkce signum má v bodě $x_0 = 0$ nevlastní derivaci rovnu $+\infty$ ale není v něm spojitá.

Na druhou stranu, nevlastní derivace nemusí nutně znamenat nespojitost. Uvažujme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$, tato funkce je spojitá, neboť je to inverze k homeomorfismu (funkce x^3 homeomorfismus podle vět 2.15 4.14, a 4.21) máme ale

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{2/3}} = \infty.$$

7.2 Vlastnosti derivace. Následující věta nám bude velmi užitečná pro výpočet derivací funkcí definovaných jako součet řady funkcí, její důkaz bezprostředně vyplývá z důsledku 6.10.

Věta 7.3. *Buď* (f_n) *posloupnost funkcí* $f_n : J \to \mathbb{R}$, $x_0 \in J$. *Pokud řada* $\sum f_n$ *stejnoměrně konverguje na množině* J *k funkci* f *a pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *existuje* $f'_n(x_0) = a_n$. *Pak řada* $\sum a_n$ *konverguje, derivace* $f'(x_0)$ *existuje a platí*

$$\sum a_n = f'(x_0), \qquad \left(\textit{nebo-li } f'(x_0) = \sum f'_n(x_0)\right).$$

Důsledek 7.4. *1.* $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$.
2. $\sin'(x) = \cos(x)$.
3. $\cos'(x) = -\sin(x)$.

D ů k a z. 1. Na definici funkce e^x aplikujeme větu 7.3, máme

$$(\mathrm{e}^x)' = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right)' =$$
$$= (1)' + \left(\frac{x}{1!}\right)' + \left(\frac{x^2}{2!}\right)' + \left(\frac{x^3}{3!}\right)' + \dots \qquad \text{(věta 7.3)}$$
$$= 0 + \frac{1}{1!} + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \dots = \mathrm{e}^x.$$

Body 2. a 3. se dokáží obdobně.

Věta 7.5. *Budťe $f, g : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkce mající derivaci v $x_0 \in J$ a $c \in \mathbb{R}$, potom*
1. $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
2. $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.
3. $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$.
D ů k a z. První dva body dokážeme přímým výpočtem, tedy

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) + g(x_0+h) - (f(x_0) + g(x_0))}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \\
&= f'(x_0) + g'(x_0).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(fg)'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0+h) + f(x_0)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} g(x_0+h)\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \lim_{h\to 0} f(x_0)\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} g(x_0+h) \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + f(x_0) \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \\
&= g(x_0) f'(x_0) + f(x_0)g'(x_0).
\end{aligned}$$

Třetí bod je důsledkem bodu 2. této věty a toho, že derivace konstantní funkce je 0.

Věta 7.6 (Derivace složené funkce). *Nechť $f : J \to \mathbb{R}$, $g : I \to J$, $x_0 \in I$ a nechť existují vlastní derivace $g'(x_0)$ a $f'(g(x_0))$, potom existuje vlastní derivace $(f \circ g)'(x_0)$ a platí*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0). \tag{7.2.1}$$

D ů k a z. Označme $y_0 = g(x_0)$, definujme funkci $F : J \to \mathbb{R}$ takto

$$F(y) = \begin{cases} \dfrac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} & \text{pro } y \neq y_0, \\ f'(y_0) & \text{pro } y = y_0. \end{cases}$$

Je jasné, že je funkce F spojitá (druhá větev vznikla, jako limita první). Pro tuto funkci a libovolný bod $y \in J$ platí

$$(y - y_0)F(y) = f(y) - f(y_0) \tag{7.2.2}$$

a to i pro $y = y_0$ (ověřte si!), toho za chvíli využijeme.

Nyní, počítejme derivaci funkce $(f \circ g)$ v x_0. Máme

$$\begin{aligned}
(f \circ g)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{(g(x) - g(x_0))F(g(x))}{x - x_0} && \text{(viz. (7.2.2) pro } y = g(x)) \\
&= \lim_{x\to x_0} F(g(x)) \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= F(\lim_{x\to x_0} g(x))g'(x_0) && \text{(věta 4.24)}
\end{aligned}$$

$$= F(y_0)g'(x_0) = f'(y_0)g(x_0). \qquad \text{(definice } F\text{)}$$

Důsledek 7.7. *Buďte $f, g : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkce mající derivaci v $x_0 \in J$ a $g(x_0) \neq 0$, potom* $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

D ů k a z. V následujícím výpočtu jsme využili věty 7.6 a 7.5 (kde?).

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \left(f\frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)(x_0) + f(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)\\ &= \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} + f(x_0)\left(-\frac{1}{g^2}\right)(x_0)g'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.\end{aligned}$$

Věta 7.8 (Derivace inverzní funkce). *Nechť $f : J \to I \subset \mathbb{R}$ je spojitá funkce rostoucí nebo klesající, $x_0 \in J$, $f^{-1} : I \to J$ inverze f. Pokud existuje vlastní $f'(x_0) \neq 0$, potom existuje vlastní $(f^{-1})'(f(x_0))$ a platí*

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}, \quad \left(\text{nebo také } f'(x_0) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x_0))}\right). \tag{7.2.3}$$

D ů k a z. Využijeme (jak?) větu o derivaci složené funkce. Máme

$$1 = (\mathrm{id}_J)'(x_0) = (f^{-1} \circ f)'(x_0) = (f^{-1})'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Odtud již výsledek přímo plyne.

Důsledek 7.9. *1.* $\ln'(x) = 1/x$.
2. $\arcsin'(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$.
3. $\arccos'(x) = -1/\sqrt{1 - x^2}$.
4. $\arctan'(x) = 1/(1 + x^2)$.
5. $\mathrm{arccotan}'(x) = -1/(1 + x^2)$.
6. Pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ platí $(x^a)' = ax^{a-1}$.
7. Pro libovolné $a > 0$ platí $(a^x)' = a^x \ln(a)$.

D ů k a z. 1. Ve vzorci (7.2.3) položíme $f = \ln$, máme $f^{-1} = \exp$

$$f'(x) = \ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}.$$

Důkazy bodů 2.–5. jsou obdobné, proto je zde neuvádíme.

6. Podle věty 7.6 a bodu 1. tohoto důsledku máme

$$(x^a)' = (\mathrm{e}^{a\ln(x)})' = \mathrm{e}^{a\ln(x)}(a\ln(x))' = \frac{ax^a}{x} = ax^{a-1}.$$

Obdobně, lze postupovat při důkazu bodu 7.

7.3 Diferenciál funkce. Uvažujme funkci $f : J \to \mathbb{R}$ a $x_0 \in J$, lineární zobrazení $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazýváme *diferenciál funkce f v bodě x_0* jestliže

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - A(h)}{h} = 0. \tag{7.3.1}$$

Diferenciál funkce f v bodě x_0 označujeme $\mathrm{d} f(x_0)$.

Souvislost diferenciálu a derivace objasňuje následující věta

Věta 7.10. *Funkce $f : J \to \mathbb{R}$ má diferenciál v bodě $x_0 \in J$, právě když má v tomto bodě derivaci a platí $\mathrm{d} f(x_0)(h) = f'(x_0)h$.*

D ů k a z. Lineární zobrazení $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má tvar $k \cdot h$ pro nějaké $k \in \mathbb{R}$. Vzorec (7.3.1) nám dává

$$k = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

To znamená, že $k = f'(x_0)$.

Lineární zobrazení zobrazení $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lze předpisem zapsat $A(x) = kx$, pro pevné $k \in \mathbb{R}$. Proto občas ztotožňujeme lineární zobrazení A s číslem k. Derivace funkce f v bodě x_0 je také reálné číslo, a vzhledem k předchozí větě, míváme tendence ztotožňovat i diferenciál funkce v bodě s derivací funkce v tomto bodě. U funkcí jedné reálné proměnné je to přijatelné, u funkcí více proměnných je tento rozdíl již výraznější.

7.4 Derivace vyšších řádů. Má-li funkce $f : J \to \mathbb{R}$ derivaci ve všech bodech nějakého okolí U bodu $x_0 \in J$, můžeme uvažovat o existenci derivace funkce f' v bodě x_0. Pokud existuje, tuto hodnotu nazýváme *druhá derivace funkce f v bodě x_0* a označujeme ji $f''(x_0)$.

Postupně se takto můžeme propracovat k definici *derivace n-tého řádu v bodě x_0* (označujeme $f^{(n)}(x)$), jako derivaci funkce $n-1$-řádu ($f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0)$).

7.5 Extrémy. Nechť $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, řekneme, že funkce f je *rostoucí* (respektive *klesající, nerostoucí, neklesající*) *v bodě $x_0 \in X$*, jestliže existuje okolí $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ bodu x_0 takové, že $f((x_0 - \delta, x_0) \cap X) < f(x_0) < f((x_0, x_0 + \delta) \cap X)$ (respektive $f((x_0 - \delta, x_0) \cap X) > f(x_0) > f((x_0, x_0 + \delta) \cap X)$, $f((x_0 - \delta, x_0) \cap X) \le f(x_0) \le f((x_0, x_0 + \delta) \cap X)$, $f((x_0 - \delta, x_0) \cap X) \ge f(x_0) \ge f((x_0, x_0 + \delta) \cap X)$). Řekneme, že funkce f na bývá v x_0 *lokálního maxima (minima)* jestliže existuje okolí U bodu x_0 takové, že $f|_{U \cap X}$ nabývá v x_0 maxima (minima).

Je vidět, že pokud je funkce rostoucí v každém bodě množiny X, pak je rostoucí na X, a že pokud je rostoucí na X pak je rostoucí v každém bodě množiny X. Obdobně i pro další typy extrémů.

Věta 7.11. *Buď $f : J \to \mathbb{R}$ potom*
1. Je-li $f'(x_0) > 0$ (případně je-li $f'(x_0) = \infty$) potom je f v bodě x_0 rostoucí.
2. Je-li $f'(x_0) < 0$ (případně je-li $f'(x_0) = -\infty$) potom je f v bodě x_0 klesající.

D ů k a z. Z věty dokážeme pouze bod 1. Jelikož $f'(x_0) > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0. \tag{7.5.1}$$

Pro $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ je $x - x_0 > 0$ a tedy z rovnice (7.5.1) plyne $f(x) > f(x_0)$, což dokazuje, že $f(x_0) < f(x_0, x_0 + \delta)$. Pro $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ je $x - x_0 < 0$ a z (7.5.1) plyne $f(x) < f(x_0)$ odtud $f(x_0 - \delta, x_0) < f(x_0)$. Dohromady dostáváme, že $f(x_0 - \delta, x_0) < f(x_0 < f(x_0, x_0 + \delta)$, to znamená, že f je v x_0 rostoucí.

Důsledek 7.12. *Je-li $x_0 \in J$ bodem extrému funkce $f : J \to \mathbb{R}$ a existuje-li $f'(x_0)$, potom $f'(x_0) = 0$.*

Věta 7.13 (Rolleova). *Buď $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ spojitá mající derivaci (vlastní nebo nevlastní) v každém vnitřním bodě $[a, b]$. Pokud $f(a) = f(b) = 0$, potom existuje $c \in (a, b)$ takové, že $f'(c) = 0$.*

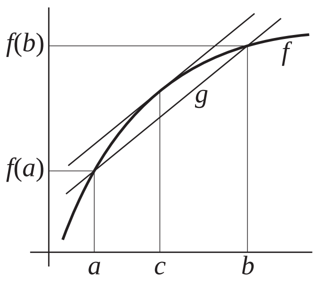
D ů k a z. Je-li f konstantní, pak c je libovolný bod intervalu (a, b).

Uvažujme dva možné případy. První: Existuje-li bod v (a, b), v němž je funkce f kladná, potom vezměme za c bod v němž funkce f nabývá na $[a, b]$ svého maxima. Takový bod existuje podle věty 4.8 a je různý od a i b, protože f je kladná v nějakém bodě (a, b).

Zbývá ukázat, že $f'(c) = 0$. Předně $f'(c)$ existuje, jako v každém jiném bodě (a, b). Kdyby $f'(c) > 0$ nebo ∞, pak by f byla v c rostoucí a to by znamenalo, že f nenabývá v c svého maxima.

Druhý případ se dokáže obdobně.

Podmínka, že funkce musí mít derivaci v každém bodě (a, b) se nedá vynechat, důkazem toho je funkce $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x| - 1$. Funkční hodnota v -1 i v 1 je rovna 0 ale v intervalu, $(-1, 1)$ není žádný bod v němž by byla derivace rovna 0.



Věta 7.14 (o střední hodnotě). *Buď $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ spojitá mající derivaci (vlastní nebo nevlastní) v každém vnitřním bodě $[a, b]$. Potom existuje $c \in (a, b)$ takové, že*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{7.5.2}$$

D ů k a z. Větu dokážeme pomocí Rolleovy věty tak, že ji aplikujeme na rozdíl funkce f a afinní funkce g procházející body $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$ (obdobně jako v (7.1.1)). Tedy uvažujme funkci $F : [a, b] :\to \mathbb{R}$,

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(x_0).$$

Tato funkce splňuje všechny předpoklady věty 7.13 (ověřte!). A tedy existuje $c \in (a, b)$ takové, že $F'(c) = 0$. Protože

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

pro $x = c$ dostáváme

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Odtud již (7.5.2) plyne.

Větu o střední hodnotě ještě zobecníme.

Věta 7.15. *Buďte $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ spojité funkce a nechť existuje v každém bodě $x \in (a, b)$ derivace $f'(x)$ (vlastní nebo nevlastní) a vlastní derivace $g'(x) \neq 0$. Potom existuje $c \in (a, b)$ takové, že*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \tag{7.5.3}$$

D ů k a z. Větu dokážeme obdobným způsobem jako předchozí větu. Nejprve, protože $g'(x) \neq 0$ na (a, b) podle věty 7.14 máme, že $g(a) \neq g(b)$. Definujeme funkci $F : [a, b] \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = (f(x) - f(a))(g(b) - g(a)) - (g(x) - g(a))(f(b) - f(a)).$$

Tato funkce splňuje podmínky věty 7.13 a proto existuje $c \in (a, b)$ takové, že $F'(c) = 0$, tedy

$$F'(c) = f'(x)(g(b) - g(a)) - g'(c)(f(b) - f(a)) = 0.$$

Odtud, protože $g(a) \neq g(b)$, již (7.5.3) plyne.

Uvažujme funkci $f = \ln$ na intervalu $[a, b] = [5, 10]$ podle věty o střední existuje $c \in (5, 10)$ takové, že

$$(10 - 5)\ln'(c) = 5/c = \ln(10) - \ln(5) = \ln(2).$$

Protože $5 < c < 10$, znamená to, že $\frac{5}{10} < 5/c = \ln(2) < \frac{5}{5}$. Dostáváme první odhad hodnoty funkce ln v bodě 2,

$$\tfrac{1}{2} < \ln(2) < 1.$$

Pokračujme dále, z nerovnice $1 < 2\ln(2)$ a z monotonosti funkce exp dostaneme

$$e = \exp(1) < \exp(2\ln(2)) = 4. \tag{7.5.4}$$

Číslo e je tedy menší než 4. Později v odstavci Taylorova řada, se dozvíme, jak tyto odhady zpřesnit.

Věta 7.16. *Buď $f : J \to \mathbb{R}$ potom*
1. Je-li $f'(x) > 0$, pro $x \in (a, b)$ (případně je-li $f'(x) = \infty$), pak je f na J rostoucí.
2. Je-li $f'(x) < 0$, pro $x \in (a, b)$ (případně je-li $f'(x) = -\infty$), pak je f na J klesající.
D ů k a z. 1. Zvolme $x, y \in J$, $x < y$, pak podle věty 7.14 existuje $c \in (x, y)$ takově, že $f'(c) = (f(y) - f(x))/(y - x)$. To znamená, že $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) > 0$.

2. Zvolme $x, y \in J$, $x < y$, pak podle věty 7.14 existuje $c \in (x, y)$ takově, že $f'(c) = (f(y) - f(x))/(y - x)$. To znamená, že $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) < 0$.

Věta 7.17. *Buď $f : J \to \mathbb{R}$, $x_0 \in J$ potom*
1. Existuje-li okolí $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tak, že pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ je $f'(x) > 0$ a pro každé $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ je $f'(x) < 0$, má f v x_0 lokální maximum;
2. Existuje-li okolí $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tak, že pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ je $f'(x) < 0$ a pro každé $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ je $f'(x) > 0$, má f v x_0 lokální minimum.
D ů k a z. 1. Zvolme si $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ libovolně, podle věty 7.14 existuje $c \in (x, x_0)$ takové, že $f(x_0) - f(x) = (x_0 - x)f'(c)$. Podle předpokladu, $f'(c) > 0$ a proto $f(x_0) > f(x)$. Zvolíme-li si $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ podle téže věty máme $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)f'(c)$. Nyní je podle předpokladu $f'(c) < 0$ a proto opět $f(x_0) > f(x)$. To znamená, že f má v x_0 lokální maximum.

Bod 2. se dokáže obdobně.

V kombinaci s větou 7.16 lze tuto popsat tak, že pokud funkce je na nějakém levém okolí bodu rostoucí a na nějakém pravém okolí bodu klesající má v tomto bodě lokální maximum; pokud je na nějakém levém okolí bodu klesající a na nějakém pravém okolí bodu klesající má v něm lokální minimum.

Povšimněme si, že předcházející věta nepožaduje, aby existovala derivace funkce f v bodě x_0. Proto nám tato věta odhaluje nejen lokální minimum funkce x^2 v $x_0 = 0$, ale i lokální minimum funkce $|x|$ v $x_0 = 0$.

Věta 7.18. *Buď $f : J \to \mathbb{R}$ potom*
1. Je-li $f''(x) > 0$, pro $x \in (a, b)$, pak je f na J konvexní.
2. Je-li $f''(x) < 0$, pro $x \in (a, b)$, pak je f na J konkávní.
D ů k a z. Zvolme si body $x, y, z \in J$, $x < y < z$. Podle věty 7.14 existují body $c \in (x, y)$ a $d \in (y, z)$ tak, že $f'(c) = (f(y) - f(x))/(y - x)$ a $f'(d) = (f(z) - f(y))/(z - y)$. Odtud

$$\begin{aligned}(f'(d) - f'(c))(y - x)(z - y) &= (f(z) - f(y))(y - x) - (f(y) - f(x))(z - y) \\ &= yf(z) - yf(y) - xf(z) + xf(y) - zf(y) + zf(x) + yf(y) - yf(x) \\ &= yf(z) - xf(z) + xf(y) - zf(y) + zf(x) - yf(x) \\ &= f(x)(z - y) + f(y)(x - z) + f(z)(y - x)\end{aligned} \tag{7.5.5}$$

1. Je-li $f'' > 0$ na J, tedy f' je na J rostoucí, potom je $f'(d) > f'(c)$ a levá strana v (7.5.5) je kladná.
2. Je-li $f'' < 0$ na J, tedy f' je na J klasající, potom je $f'(d) < f'(c)$ a levá strana v (7.5.5) je záporná.

Nechť $f : J \to \mathbb{R}$ má derivaci v bodě $x_0 \in J$ a označme $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.[1)] Pokud existuje okolí bodu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ takové, že buďto 1. $f|_{(x_0, x_0+\delta)} > g$ a $f|_{(x_0, x_0+\delta)} < g$; nebo 2. $f|_{(x_0, x_0+\delta)} < g$ a $f|_{(x_0, x_0+\delta)} > g$, potom říkáme že funkce má v x_0 *inflexi*.

Podrobný pohled na tuto definici prozradí, že na okolí vlevo od inflexního bodu leží graf funkce f nad tečnou v tomto bodě a vpravo pod grafem tečny, nebo naopak. Je jasné, že pokud má funkce f v nějakém bodě inflexi, pak v něm nemůže mít extrém.

Funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ má v bodě $x_0 = 0$ inflexi. Skutečně, nastává zde případ 1. z definice inflexe, tečnou ke grafu funkce x^3 v bodě $x_0 = 0$ je přímka $g(x) = 0$, pro libovolné $\delta > 0$ platí $f(-\delta, 0) < 0$ a $f(0, \delta) > 0$.

Věta 7.19. *Nechť $f : J \to \mathbb{R}$, $x_0 \in J$ a nechť existuje přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$ takové, že $f^{(n)}(x_0) = 0$, ale $f^{(k)}(x_0) \neq 0$ pro $0 < k < n$. Potom*

[1)]Funkce g je tečna k funkci f v bodě $(x_0, f(x_0))$.

1. Je-li n liché a $f^{(n)}(x_0) > 0$*, je* f *v bodě* x_0 *rostoucí.*
2. Je-li n liché a $f^{(n)}(x_0) < 0$*, je* f *v bodě* x_0 *klesající.*
3. Je-li n sudé a $f^{(n)}(x_0) > 0$*, má* f *v bodě* x_0 *lokální minimum.*
4. Je-li n sudé a $f^{(n)}(x_0) < 0$*, má* f *v bodě* x_0 *lokální maximum.*

D ů k a z. Budeme větu dokazovat pouze pro případ $f^{(n)}(x_0) > 0$, případ, kdy $f^{(n)}(x_0) < 0$, lze dokázat obdobně uvažujeme-li funkci $-f$. Dokazujeme pomocí principu matematické indukce vzhledem k n.

Je-li $n = 1$, znamená to, že $f'(x_0) > 0$ a podle věty 7.11 je f v x_0 rostoucí.

Nyní nechť $n > 0$ a předpokládejme, že tvrzení věty platí pro n a pokusme se jej dokázat pro $n + 1$. Položme $g = f'$, platí $g^{(n)} = f^{(n+1)}$, funkce g splňuje předpoklady naší věty.

Uvažujeme dva případy. Je-li $n + 1$ sudé, tedy n je liché. Protože g splňuje předpoklady této věty dostaneme, že g a následně i f' je v x_0 rostoucí. Protože f' je v x_0 rostoucí a $f'(x_0) = 0$ musí na nějakém levém okolí x_0 být $f' < 0$ a na pravém $f' > 0$. Použijeme větu 7.17 a dostaneme, že f má v x_0 lokální minimum.

Je-li $n + 1$ liché, to znamená n sudé. Užitím této věty na funkci g dostaneme, že g a tedy i f' má v x_0 lokální minimum. To ale spolu s $f'(x_0) = 0$ znamená, že na některém okolí x_0 je $f'(x) > 0$ pro $x \neq 0$. Proto f musí být v x_0 rostoucí.

Důsledek 7.20. *Nechť* $f : J \to \mathbb{R}, x_0 \in J$ *a nechť existuje přirozené číslo* $n \in \mathbb{N}$ *takové, že* $f^{(n)}(x_0) = 0$*, ale* $f^{(k)}(x_0) \neq 0$ *pro* $0 < k < n$*. Potom*
1. Je-li n sudé a $f^{(n)}(x_0) > 0$*, je* f *na okolí* x_0 *konvexní.*
2. Je-li n sudé a $f^{(n)}(x_0) < 0$*, je* f *na okolí* x_0 *konkávní.*
3. Je-li n liché, má f *v* x_0 *inflexi.*

Výsledky obdržené v tomto odstavci použijeme pro vyřešení následujícího příkladu.

Uvažujme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x/(x^2 + 1)$, najděme její lokální extrémy, inflexní body, intervaly konvexnosti, konkávnosti, kde je rostoucí a klesající.

Platí

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}.$$

Tedy $f'(x) = 0$ pouze pro $x = 1$ a $x = -1$, vzhledem k tomu, že $f'(x) > 0$ pro $-1 < x < 1$ a $f'(x) < 0$ pro $x < -1$ nebo $x > 1$, dostáváme, podle věty 7.16, f je rostoucí na intervalu $(-1, 1)$ a klesající na $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Podle věty 7.17 víme, že v bodě $x = -1$ nabývá f minima a v $x = 1$ maxima. Protože

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2 + 1)^2 - (1 - x^2)2(x^2 + 1)2x}{(x^2 + 1)^4} = -2x\frac{x^2 + 1 + 2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^3} = 2x\frac{x^2 - 3}{(x^2 + 1)^3}.$$

Poněvadž $f''(x) = 0$ pro $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$, $x = \sqrt{3}$. Navíc $f'' > 0$ na množině $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, \infty)$ a z věty 7.18 plyne, že je na této množině konvexní. (To nás jen utvrzuje, že je v bodě $x = -1$ lokální minimum, viz věta 7.19 bod 3.) Obdobně dostaneme, že f je konkávní na $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$. Inflexními body jsou body $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$, $x = \sqrt{3}$, protože na jejich okolí se funkce f mění z konvexní na konkávní nebo naopak.

7.6 Užití derivace pro výpočet limit. Pro výpočet limit typu $0/0$ nebo ∞/∞ je velice užitečná následující věta.

Věta 7.21 (L'Hospitalovo pravidlo). *Buďte* $f, g : J \to \mathbb{R}, x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$. *Pokud existuje* $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *(vlastní nebo nevlastní), pak existuje i* $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *a platí*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{7.6.1}$$

D ů k a z. Nejprve dokážeme větu pro $x_0 \in \mathbb{R}$ a limitu zprava. funkce $\bar{f}, \bar{g}$ rozšíření funkcí f, g tím, že položíme $\bar{f}(x_0) = 0$ a $\bar{g}(x_0) = 0$. Obě funkce $\bar{f}, \bar{g}$ jsou spojité v x_0. Pro každé $x \in J$ podle věty 7.15

existuje $c \in (x_0, x)$ tak, že

$$\frac{\bar{f}(x)}{\bar{g}(x)} = \frac{\bar{f}(x) - \bar{f}(x_0)}{\bar{g}(x) - \bar{g}(x_0)} = \frac{\bar{f}'(c)}{\bar{g}'(c)}.$$

Jelikož $c \in (x_0, x)$ dostáváme

$$\lim_{x \to x_{0+}} \frac{\bar{f}(x)}{\bar{g}(x)} = \lim_{c \to x_{0+}} \frac{\bar{f}'(c)}{\bar{g}'(c)}.$$

Případ $\lim_{x \to x_{0-}}$ se dokáže obdobně. Kombinací obou výsledků máme větu dokázánu pro „oboustrannou“ limitu.

Nyní nechť $x_0 = \infty$, připomeňme, že $\lim_{x \to \infty} h(x) = \lim_{x \to 0_+} h(1/x)$. Definujeme funkce $F, G : 1/(J \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}$, $F(x) = f(1/x)$ a $G(x) = g(1/x)$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \to 0_-} \frac{F(x)}{G(x)} = \\
&= \lim_{x \to 0_+} \frac{F'(x)}{G'(x)} && \text{(předchozí odstavec)} \\
&= \lim_{x \to 0_+} \frac{f'(1/x)(-1/x^2)}{g'(1/x)(-1/x^2)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g(x)}.
\end{aligned}$$

Důkaz případu $\lim_{x \to -\infty}$ si jistě čtenář udělá sám.

Věta 7.22 (L'Hospitalovo pravidlo). *Buďte* $f, g : J \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$. *Pokud existuje* $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *(vlastní nebo nevlastní), pak existuje i* $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *a platí*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{7.6.2}$$

D ů k a z. Bude doplněn později...

Pomocí L'Hospitalova pravidla můžeme vypočítat limity, které by jsme bez něj vypočítali jen stěží, například je-li $n \in \mathbb{N}$, potom použijeme-li L'Hospitalovo pravidlo n-krát dostaneme

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \ldots = \lim_{x \to \infty} \frac{n!}{e^x} = 0.$$

7.7 Taylorův polynom, Taylorova řada. Nechť funkce $f : J \to \mathbb{R}$ je funkce, která má derivace na J až do řádu $n + 1$ v bodě $a \in J$. Polynom $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x - a)^2 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x - a)^n \tag{7.7.1}$$

nazýváme *Taylorův polynom stupně n v bodě a*. Definováním Taylorova polynomu se snažíme najít polynom, který by se od funkce f na intervalu J lišil jen „velmi málo“. Tedy zda je možno k libovolně malé odchylce najít polynom $P(x)$ jehož hodnoty by se na J lišily od hodnot f nejvýše o tuto odchylku.

Pomocí Taylorova polynomu počítají hodnoty goniometrických (a jiných) funkcí počítače i kalkulátory. Pokud bychom měli kalkulátor, který zobrazuje pouze čtyři číslice, pak by nám pro pro výpočet hodnoty sin(2) stačil odhad provedený v příkladě 4.

Věta 7.23 (Taylorova). *Budte $a, x \in \mathbb{R}$ různá, označme $I = [a, x]$ (případně $I = [x, a]$, je-li $x < a$). Nechť $f : I \to \mathbb{R}$ má v I derivace až do řádu $n+1$ a nechť $\varphi : I \to \mathbb{R}$ má uvnitř I nenulovou derivaci. Potom existuje $\xi \in \operatorname{int} I$*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2 + \\ \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x-a)^n + R_{n+1}(x), \tag{7.7.2}$$

kde

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-\xi)^n}{n!} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(\xi)} f^{(n+1)}(\xi). \tag{7.7.3}$$

D ů k a z. Položme $F : I \to \mathbb{R}$,

$$F(t) = f(x) - f(t) - f'(t)\frac{x-t}{1!} - f''(t)\frac{(x-t)^2}{2!} - \dots - f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}.$$

Zřejmě $F(x) = 0$ a $F(a) = R_{n+1}(x)$. Funkce F má na celém intervalu I derivaci, platí

$$F'(t) = -f'(t) - \Big(-f'(t) + f''(t)\frac{x-t}{1!}\Big) - \Big(-f''(t)\frac{x-t}{1!} + f'''(t)\frac{(x-t)^2}{2!}\Big) - \\ - \dots - \Big(-f^{(n-1)}(t)\frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!} + f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\Big) - \\ -\Big(f^{(n-1)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} + f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\Big) = \\ = -f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}.$$

Na funkce F a φ aplikujme větu 7.15, existuje tedy číslo $\xi \in I$ takové, že

$$\frac{F(x) - F(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{\varphi'(\xi)} \frac{(x-\xi)^n}{n!}. \tag{7.7.4}$$

Uvědomíme-li si, že $F(x) - F(a) = -R_{n+1}(x)$ z (7.7.4) již (7.7.3) plyne.

Důsledek 7.24. *Za předpokladů věty 7.23,*
1. pro $\varphi : I \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$, dostáváme Lagrangeův tvar zbytku

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi); \tag{7.7.5}$$

2. pro $\varphi : I \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = t$, dostáváme Cauchyův tvar zbytku

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-\xi)^n (x-a)}{n!} f^{(n+1)}(\xi). \tag{7.7.6}$$

Budeme-li zvyšovat řád Taylorova polynomu, dospějeme nakonec k tomu, že polynom bude aproximovat funkce f přesně (bezchybně), třeba i za cenu toho, že se polynom změní v mocninnou řadu? Odpověď, kdy se tak stane, dává následující věta.

Věta 7.25 (Taylorova řada). *Budte $a, x \in \mathbb{R}$ různá, označme $I = [a, x]$ (případně $I = [x, a]$, je-li $x < a$). Nechť $f : I \to \mathbb{R}$ má v I derivace všech řádů a $R_n(x)$ je definováno vzorcem (7.7.3), pro každé $n \in \mathbb{N}$. Potom*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \tfrac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2 + \tfrac{1}{3!} f'''(a)(x-a)^3 + \dots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n, \tag{7.7.7}$$

právě když $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.
D ů k a z. Je velice jednoduchý, stačí si uvědomit, že pro částečný součet s_n řady ve vzorci (7.7.7) podle věty 7.23 platí $f(x) = s_n + R_{n+1}(x)$. Protože $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, dostaneme $f(x) = \lim s_n$.

Bývá velice výhodné rozvinout Taylorovu v bodě $a = 0$, v takovém případě hovoříme o *Maclaurinově řadě*.

Čtenáři doporučuji vypočítat si Maclaurinovy řady funkcí sin, cos a exp, výsledky potom porovnat s jejich definicemi v předchozí kapitole (měly by se shodovat). Taylorovy řady dalších funkcí například arctan nebo arcsin, zde neuvádíme a čtenář si je musí vyhledat v literatuře či sám vypočítat. Řada pro funkci ln je předmětem příkladu 3.

Pokusme se odhadnout číslo e s chybou menší než 0,001. Použitím věty 7.23 na funkci exp (střed volíme $a = 0$), dostaneme že[2)]

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x). \tag{7.7.8}$$
$$R_{n+1}(x) = \frac{x^n}{(n+1)!}\exp(\xi) < \frac{x^n}{(n+1)!}\exp(x). \qquad \text{(exp je rostoucí)}$$

Již víme z (7.5.4), že $\exp(1) = \mathrm{e} < 4$. Chceme-li mít chybu odhadu menší než 0,001 musíme najít n pro nějž bude $|R_{n+1}(1)| < 0{,}001$. Máme

$$|R_{n+1}(1)| < \frac{1}{(n+1)!} 4 < 0{,}001.$$

Pro $n \geq 6$ je poslední nerovnost splněna (ověřte!), stačí tedy sečíst prvních šest členů řady (7.7.8) a na intervalu $[0, 1]$ je chyba menší než 0,001. Proto

$$\exp(1) = \mathrm{e} \doteq 1 + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3!} + \tfrac{1}{4!} + \tfrac{1}{5!} + \tfrac{1}{6!} = \tfrac{1957}{720} = 2.7180555\dots$$

Hodnota $R_7(1)$ se pohybuje kolem 0,000024 a $R_9(1)$ blízko $2 \cdot 10^{-7}$, řada (7.7.8) konverguje skutečně velmi rychle.

Příklady

1. *Nechť* $g : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a* $x_0 \in J$ *je spojitá. Pokud* $g'(x_0)$ *existuje a* $g'(x_0) \neq 0$, *potom existuje okolí* U *bodu* x_0 *takové, že pro všechna* $x \in U$, $x \neq x_0$ *je* $g(x_0) \neq g(x)$.

Řešení: Jestliže $g'(x_0) > 0$ potom existuje $a > 0$ a okolí U bodu x_0 takové, že pro každé $x \in U$, $x \neq x_0$ je

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0) > a > 0$$

To znamená, že

$$g(x) > g(x_0) + a(x - x_0) \qquad \text{(pro } x > x_0)$$
$$g(x) < g(x_0) + a(x - x_0). \qquad \text{(pro } x < x_0)$$

Případ kdy $g'(x_0) < 0$ se dokáže obdobně.

---
2) To už tu jednou bylo, ne?

2. *Najděte lokální extrémy, asymptoty funkce* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = 6 + \frac{5}{(x^2+1)^2},$$

určete kde je funkce rostoucí, klesající, konvexní a kde je konkávní.
Řešení: Spočítejme nejprve derivaci

$$f'(x) = \frac{20x}{(x^2+1)^3}. \qquad \text{(ověřte!)}$$

Derivace je rovna 0 pouze pro $x = 0$ (funkce může mít lokální extrém pouze v nule). Snadno zjistíme, že $f'(x) > 0$ pro $x < 0$ a $f'(x) < 0$ pro $x > 0$, z toho již dostáváme, že f je rostoucí na intervalu $(-\infty, 0)$ a klesající na intervalu $(0, \infty)$. Z posledních výsledku plyne, že funkce nabývá lokálního maxima v bodě $x = 0$, minima funkce nenabývá.

Nyní spočítáme druhou derivaci

$$f''(x) = \frac{120x^2}{(x^2+1)^4} - \frac{20}{(x^2+1)^3}. \qquad \text{(ověřte!)}$$

Kořeny rovnice $f''(x) = 0$ jsou $x = \sqrt{5}/5$ a $x = -\sqrt{5}/5$, z toho, že f'' je spojitá funkce a odhadem hodnot $f''(-1)$, $f''(0)$ a $f''(1)$ dostaneme, že $f''(x) > 0$ pro $x \in (-\infty, -\sqrt{5}/5) \cup (\sqrt{5}/5, \infty)$ (a f je zde tedy konvexní) a že $f''(x) < 0$ pro $x \in (-\sqrt{5}/5, \sqrt{5}/5)$ (to znamená, že f je zde konkávní).

Koeficienty v rovnici asymptoty $y = kx + q$, pro $x \to \infty$, určíme ze vzorců

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{5}{x(x^2+1)^2} + \frac{6}{x} \right) = 0,$$

$$q = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \frac{5}{(x^2+1)^2} + 6 = 6.$$

Asymptota pro $x \to \infty$, má tedy rovnici $y = 6$. Obdobně pro $x \to -\infty$.

3. *Najděte Taylorovu řadu funkce* $f = \ln$ *se středem v* 1 *a určete její interval konvergence.*
Řešení: Taylorova řada má tvar $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$, kde $f_n(x) = f^{(n)}(x)/n! \cdot (x - x_0)^n$. Tedy $f_0 = 0$ (protože $\ln(1) = 0$), dále $f_1(x) = (x-1)$ (protože $\ln'(x) = 1/x$ a $\ln'(1) = 1$), $f_2(x) = -(x-1)^2/2$ (protože $\ln''(x) = -1/x^2$ a $\ln''(2) = -1$) a $f_3(x) = (x-1)^3/3$ (protože $\ln'''(x) = 2/x^3$ a $\ln'''(1) = 2$). Taylorova řada pro ln v nule bude mít tvar

$$\ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (x-1)^n.$$

Poloměr konvergence této mocninné řady je $1/p$, kde $p = \limsup \sqrt[n]{n} = 1$, pro $x = 0$ řada nekonverguje pro $x = 2$ ano, intervalem konvergence je tedy $(0, 2]$.

4. *Odhadněte číslo* $\sin(2)$ *s chybou menší než* 0,001.
Řešení: Musíme zjistit kolik členů Taylorovy řady musíme sečíst abychom dosáhli požadované přesnosti. Lagrangeův tvar zbytku (7.7.5) pro funkci sinus

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-0)^{n+1}}{(n+1)!} \sin^{(n+1)}(\xi).$$

Využijeme toho, že funkce sin cos nabývají hodnot z intervalu $[-1, 1]$ a že funkce x^{n+1} je rostoucí (nabývá svého maxima v krajních bodech intervalu). Máme

$$|R_{n+1}(2)| \le \frac{2^{n+1}}{n!} < 0{,}001.$$

Poslední nerovnost je splněna pro $n \ge 10$. Stačí tedy sečíst prvních deset členů taylorovy řady pro sinus a získáme požadovaný odhad sin(2):

$$\sin(2) \doteq 2 - \frac{2^3}{6} + \frac{2^5}{120} - \frac{2^7}{5040} + \frac{2^9}{362880} = \frac{2578}{2835} = 0{,}9093474427.$$

Cvičení

1. Pomocí definice derivace, vypočítejte $f'(x_0)$ jestliže
   - a) $f(x) = x^2, \quad x_0 = 1;$
   - b) $f(x) = |x|, \quad x_0 = 2;$
   - c) $f(x) = ax^2, \quad x_0 = 1, a \in \mathbb{R};$
   - d) $f(x) = x + a, \quad x_0 = 1, a \in \mathbb{R};$
   - e) $f(x) = x^2, \quad x_0 = a \in \mathbb{R};$
   - f) $f(x) = |x|, \quad x_0 = a \in \mathbb{R};$
   - g) $f(x) = ax^2, \quad x_0 = b, a, b \in \mathbb{R};$
   - h) $f(x) = x + a, \quad x_0 = b, a, b \in \mathbb{R};$
   - i) $f(x) = 1/x, \quad x_0 = a;$
   - j) $f(x) = 1/x^2, \quad x_0 = 2;$
2. Najděte minimum a maximum (pokud existují) funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ na množině $A \subset \mathbb{R}$, jestliže
   - a) $f(x) = x^2 + 3, \quad A = [-2, 2];$
   - b) $f(x) = -(x - 3)^2, \quad A = [0, 5];$
   - c) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}, \quad A = [-1, 1];$
   - d) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}, \quad A = [1, 3].$
3. Najděte přímku, která se dotýká paraboly $f(x) = x^2 - 7x + 13$, v bodě $(x_0, f(x_0))$, jestliže
   - a) $x_0 = 0;$
   - b) $x_0 = 1;$
   - c) $x_0 = a \in \mathbb{R}.$
4. Najděte kružnici o poloměru 1, která se dotýká přímky $y = f(x)$ v bodě $(x_0, f(x_0))$, jestliže
   - a) $f(x) = 2, \quad x_0 = 1;$
   - b) $f(x) = x, \quad x_0 = 2;$
   - c) $f(x) = 3x, \quad x_0 = 3;$
   - d) $f(x) = 2x + 2, \quad x_0 = 22;$
   - e) $f(x) = 2x + a, \quad x_0 = 2a, a \in \mathbb{R}.$
5. Vypočtěte derivaci funkce f, kde
   - a) $f(x) = \frac{x + 2}{x};$
   - b) $f(x) = \frac{(x + 2)^2}{x};$
   - c) $f(x) = \ln\left(\frac{x + 2}{x}\right);$
   - d) $f(x) = \ln(x + 2);$
   - e) $f(x) = \ln\sqrt{x^2 + 2};$
   - f) $f(x) = \mathrm{e}^{2x^3+3x};$
   - g) $f(x) = a^{x^2-1};$
   - h) $f(x) = x^{x+1};$
   - i) $f(x) = x^{ax+a};$
   - j) $f(x) = x^{x+x^2}.$
6. Buď $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkce, která má derivaci v každém bodě $\mathbb{R}$. Vypočítejte derivaci funkce f, kde
   - a) $f(x) = 2\sqrt{x + 1} + g(x);$
   - b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + g(2x + 1);$
   - c) $f(x) = 6x^2 + g(\sqrt{x^2 + 1});$
   - d) $f(x) = \frac{x + 1}{2}g(\mathrm{e}^{\sqrt{2x+1}});$
   - e) $f(x) = \sqrt{x + 1}\,g(\sqrt{x + 1});$
   - f) $f(x) = a^{x+1}g(\sqrt{x^2 + 1});$
   - g) $f(x) = \ln(x)g(\mathrm{e}^{x^2+1});$
   - h) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{g(x + 1)};$
   - i) $f(x) = x^{g(2x)};$
   - j) $f(x) = g(x^{2x}).$

7. Najděte Taylorův polynom funkce $f : I \to \mathbb{R}$ se středem v bodě 0, tak aby aproximoval f na I s přesností do 0,001, jestliže

a) $f(x) = \cos(x), \quad I = [0, 2\pi];$ b) $f(x) = \sin(x), \quad I = [0, 2\pi];$

c) $f(x) = \ln \dfrac{1+x}{1-x}, \quad [0, \frac{1}{2}].$

8. Najděte Taylorovu řadu funkce f se středem v bodě a a určete její interval konvergence, jestliže

a) $f(x) = \sin(x), \quad a = 0;$ b) $f(x) = \cos(x), \quad a = 0;$

c) $f(x) = \ln(x), \quad a = 1;$

d) $f(x) = \arcsin(x), \quad a = 0;$ e) $f(x) = \arctan(x), \quad a = 0.$

9. Najděte lokální extrémy, inflexní body, asymptoty funkce f a určete, kde je funkce rostoucí, klesající, konvexní, konkávní, jestliže

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1};$ b) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x};$ c) $f(x) = x^2 \mathrm{e}^{-x^2};$

d) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3;$ e) $f(x) = x + \sin(x);$ f) $f(x) = (x^2-1)^{2/3};$

g) $f(x) = (x^2-1)^3;$ h) $f(x) = x - x^{2/3}.$

10. Pomocí L'Hospitalova pravidla vypočítejte limity

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x};$ b) $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\ln(x)}\right);$

c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin(1/x)}{\sin(x)};$ d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos(x)} - \sqrt[3]{\sin(x)}}{\sin^2(x)};$

e) $\lim_{x\to 0+} \left(\dfrac{1}{2x}\right)^{\tan(x)};$ f) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\arcsin(x)} - \dfrac{1}{\sin(x)}\right);$

g) $\lim_{x\to 0}(\mathrm{e}^x - 1)\operatorname{cotan}(x);$ h) $\lim_{x\to 0} x^{1/x};$

i) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+a} - \sqrt{x^2+b});$ j) $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^x.$

11. Pomocí věty o třech limitách se pokuste dokázat, že funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

má derivaci $f'(0) = 0$.

12. Nalezněte bod (x, y) na přímce $x + 2y = 5$, jehož vzdálenost od bodu $(0, 0)$ je minimální.

13. Odhadněte čísla e, e^2, e^3, e^{-1}, $\ln(2)$, $\ln(\frac{1}{2})$, $\sin(5)$, $\cos(2)$, $\cos(\sqrt{2})$ s chybou menší než 0,001.

14. Pod jakým úhlem se protínají grafy funkcí f a g v příslušných bodech, kde

a) $f(x) = \sin(x)$ a $g(x) = \cos(x);$ b) $f(x) = x^2$ a $g(x) = x^3;$

c) $f(x) = x^2$ a $g(x) = \sqrt{x};$ d) $f(x) = \mathrm{e}^x$ a $g(x) = \mathrm{e}.$

15. Určete rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^{1-x^2}$ v průsečíku s přímkou $y = 1$.

16. Ukažte, že neplatí následující tvrzení: Jestliže existuje vlastní derivace $f'(x_0)$, pak je funkce f spojitá na nějakém okolí bodu x_0. (Návod: Pokuste se najít protipříklad.)

17. Najděte funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pro kterou platí $f(0) = 1$, která není rostoucí na žádném okolí bodu 0.

18. Dokažte následující tvrzení: Nechť f je polynom mající pouze reálné kořeny, pak i polynom f' má pouze reálné kořeny. (Návod: Použijte Rolleovu větu.)

19. Dokažte: Nechť f je spojitá a má vlastní nebo nevlastní derivaci na ohraničeném intervalu (a, b). Je-li f neohraničená na (a, b), f' je také neohraničená na (a, b). Jak tomu bude pro neohraničený interval.

20. Dokažte, že derivace periodické funkce je periodická funkce se stejnou periodou.

21. Najděte funkce $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, aby platilo $(fg)' = f'g'$. Pokuste se najít takové nekonstantní funkce.

22. Najděte funkce $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které nejsou spojité v žádném bodě $\mathbb{R}$, ale $f \circ g$ má derivace všech řádů.

23. Ukažte, že nelze sestrojit funkci $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, která má vlastní derivaci na $(0, \infty)$ a aby $\lim_{x\to 0+} f(x) = \infty$ a $\lim_{x\to 0+} f'(x) = 1$. (Návod: Pomocí věty o střední hodnotě, že je-li $\lim_{x\to 0+} f'(x) = 1$, potom je f omezená na nějakém intervalu $(0, \delta)$.)

Problém hasiče amatéra:
Mějme potok, který teče rovně. Hasič amatér bydlí od potoka ve vzdálenosti 40 metrů. Hořící škola je jenom 20 metrů od potoka na témže břehu jako hasičův dům. Vzdálenost kolmic na potok procházejících školou a hasičovým obydlím je 100 metrů. V jakém místě potoka musí hasič nabrat vodu do kbelíku, aby doběhl k hořící škole v nejkratším čase, víme-li, že poběží po přímkách a že s plným kbelíkem běží dvakrát pomaleji než s prázdným?

Problém šikovného strýčka:
Předpokládejme, že jste šikovný strýček. Váš synovec za vámi přijde s následujícím úkolem: Chtěl by z obdélníkového kusu plechu o rozměrech 50×30 centimetrů udělat krabici bez víka s co možná největším objemem. Vaším úkolem je tedy zjistit, jak moc je nutno plech nastřihnout, aby z nej utvořená krabice měla největší objem.

Problém středověkého stavitele:
Dejme tomu, že si vás pozve známý středověký stavitel, který potřebuje poradit s tímto problémem: Má železný pás o délce 200 palců a chtěl by z něj udělat rám románského okna. Jakou má zvolit šířku okna, aby do chrámu procházelo co nejvíce světla — tedy, aby plocha okna byla co největší?

Problém konstruktéra firmy PEPSI:
Předpokládejme, že jste konstruktér firmy PEPSI a dostanete následující úkol. Musíte navrhnout válcovou plechovku, aby se do ní vešlo přesně $250\pi\,\mathrm{cm}^3$ tekutiny a přitom, aby se na ní spotřebovalo co nejméně materiálu — tedy, aby měla co nejmenší povrch.

Problém líného vrabce:
Na plotě, jehož výška je 1 metr, sedí vrabec. Ve vzdálenosti 15 metrů od plotu roste strom, který má větev ve výšce 3 metry. Na zemi mezi plotem a stromem jsou hustě rozesety žížaly. V jaké vzdálenosti od plotu má vrabec sezobnout žížalu, aby proletěl trasu plot-žížala-větev po přímkách a po nejkratší dráze?

Problém náruživého kávomila
Jako milovník kávy máte následující problém. Máte papír na kávový filtr kruhového tvaru o poloměru 10cm, vystřihnutím kruhové výseče o úhlu α vznikne kávový filtr. Jak zvolit úhel α aby se do něj vešlo co nejvíce kávy. Kolik to bude?

Výsledky

6. a) $1/\sqrt{x+1} + g'(x)$; **b)** $x^2 + 2g'(2x+1)$; **c)** $12x + xg'(\sqrt{x^2+1})/\sqrt{x^2+1}$; **h)** $2x/g(x+1) - (x^2+1)g'(x+1)/(g(x+1))^2$; **i)** $x^{g(2x)}(2g'(2x)\ln(x) + g(2x)/x)$; **j)** $g'(x^{2x})x^{2x}(2\ln(x)+2)$. **7. a)** $P(x) = 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + x^8/8! - x^{10}/10! + x^{12}/12!$; **b)** $P(x) = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + x^9/9! - x^{11}/11!$; **c)** $P(x) = 2x + 2x^3/3 + 2x^5/5 + 2x^7/7 + 2x^9/9$. **8. a)** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)!$, konverguje na $\mathbb{R}$; **b)** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}/(2n)!$, konverguje na $\mathbb{R}$; **c)** $\sum(-1)^{n+1}(x-1)^n/n$, konverguje na $(0,2)$; **10. a)** 1. **b)** $-\frac{1}{2}$; **c)** 0; **d)** ∞; **e)** 1; **f)** 0; **g)** 1; **h)** 1; **i)** $(a-b)/2$; **j)** e^a.

8. Integrální počet v $\mathbb{R}$

8.1 Riemannův intergrál. V celé této kapitole budeme uvažovat interval $[a,b]$ a funkci $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takovou, že $[a,b] \subset X$ a f je na $[a,b]$ omezená.

Dělením intervalu $[a,b]$ rozumíme libovolnou uspořádanou $(n+1)$-tici $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ reálných čísel takovou, že $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Číslo

$$|\Delta| = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1 \dots, x_n - x_{n-1}\} \tag{8.1.1}$$

nazýváme *norma dělení* Δ. Dělení $\Delta' = (y_0, y_1, \dots, y_m)$ je *zjemnění* dělení $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ jestliže pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ existuje $j \in \{1, \dots, m\}$ takové, že $x_i = y_j$.[1)] Pod pojmem *společné zjemnění* dělení Δ' a Δ'' myslíme dělení obsahující právě ty body, které patří do dělení Δ' nebo do dělení Δ''.

Množinu všech dělení intervalu $[a,b]$ budeme označovat $D[a,b]$. Nechť $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ je dělení intervalu $[a,b]$. Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ klademe[2)]

$$m_i(f, \Delta) = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x),$$
$$M_i(f, \Delta) = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x),$$

(supremum i infimum vždy existují a leží v $\mathbb{R}$, neboť f je na $[a,b]$ omezená). Dále klademe

$$s(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}),$$
$$S(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}).$$

Číslo $s(f, \Delta)$ nazýváme *dolní integrální součet funkce f vzhledem k dělení* Δ. Podobně číslo $S(f, \Delta)$ nazýváme *horní integrální součet funkce f vzhledem k dělení* Δ.

Konečně klademe

$$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \sup_{\Delta \in D[a,b]} s(f, \Delta) \tag{8.1.2}$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \inf_{\Delta \in D[a,b]} S(f, \Delta) \tag{8.1.3}$$

(supremum i infimum vždy existuje (jedná se o neprázdné množiny) a leží v $\mathbb{R}$, neboť je f na $[a,b]$ omezená leží v $\mathbb{R}$). Číslo $\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$ nazýváme *dolní integrál funkce f na intervalu* $[a,b]$, číslo $\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$ nazýváme *horní integrál funkce f na intervalu* $[a,b]$.

Funkce f se nazývá *integrovatelná na intervalu* $[a,b]$, je-li splněna podmínka

[1)] Dělení D' obsahuje všechny body dělení D. Evidentně musí být $m \geq n$.
[2)] Co máme na mysli, napíšeme-li $\sum_{i=1}^{n} x_i$, jsme zatím nevysvětlili, spoléháme na tebe čtenáři.

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f\mathrm{d}x. \tag{8.1.4}$$

Číslo $\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f\mathrm{d}x$ se označuje symbolem $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ a nazývá *(Riemannův) integrál funkce f na intervalu* $[a,b]$. Dále klademe $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ a $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$.

Uvažujme konstantní funkci $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, tedy $f(x) = c$, pro všechna $x \in [a,b]$; ukážeme, že funkce f je integrovatelná na $[a,b]$ a $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = c(b-a)$. Je-li $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ libovolné dělení intervalu $[a,b]$, pak protože je f konstantní, máme $M_i(f,\Delta) = m_i(f,\Delta) = c$ pro každé $i = 1,\dots,n$. Následně

$$S(f,\Delta) = s(f,\Delta) = c\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = c(b-a).$$

Jelikož toto platí pro každé dělení $\Delta \in D[a,b]$, dostáváme, že $\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = c(b-a)$. To znamená, že je f integrovatelná na $[a,b]$ a platí

$$\int_a^b c\mathrm{d}x = c(b-a). \tag{8.1.5}$$

Uvažujme Dirichletovu funkci ϱ.[3)] Je-li $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ dělení intervalu $[a,b]$, pak pro každé $i = 1,\dots,n$ je $M_i(\varrho,\Delta) = 1$ (interval (x_i, x_{i-1}) obsahuje racionální číslo) a $m_i(\varrho,\Delta) = 0$ (proč?). To znamená, že

$$S(\varrho,\Delta) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = b-a \quad \text{a} \quad s(\varrho,\Delta) = 0. \tag{8.1.6}$$

Rovnice (8.1.6) platí pro každé dělení $\Delta \in D[a,b]$, platí

$$\overline{\int_a^b} \varrho(x)\mathrm{d}x = b-a \quad \text{a} \quad \underline{\int_a^b} \varrho(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Tedy ϱ není na $[a,b]$ integrovatelná.

Lemma 8.1. *Je-li Δ' zjemněním dělení Δ, potom $s(f,\Delta) \le s(f,\Delta')$ a $S(f,\Delta) \ge S(f,\Delta')$.*

D ů k a z. Nechť $\Delta' = (y_0, y_1, \dots, y_m)$ je zjemněním $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_n)$. Zvolme $i \in \{1,\dots,n\}$, jelikož Δ' je zjemněním Δ, existují $k, l \in \{1,\dots m\}$, $k < l$ takové, že $(x_{i-1}, x_i) = (y_k, y_l)$. Je-li $l = k+1$, potom $m_i(f,\Delta) = \inf_{x\in[y_k,y_l]} f(x)$ a $M_i(f,\Delta) = \sup_{x\in[y_k,y_l]} f(x)$. Ovšem je-li $l > k+1$, pak

$$m_i(f,\Delta) \le m_{k+1}(f,\Delta'), \quad m_i(f,\Delta) \le m_{k+2}(f,\Delta'), \quad \dots, \quad m_i(f,\Delta) \le m_l(f,\Delta')$$

a

$$M_i(f,\Delta) \ge M_{k+1}(f,\Delta'), \quad M_i(f,\Delta) \ge M_{k+2}(f,\Delta'), \quad \dots, \quad M_i(f,\Delta) \ge M_l(f,\Delta').$$

Odtud dostáváme

$$m_i(f,\Delta)(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{j=k+1}^{l} m_j(f,\Delta')(y_{j-1} - y_j)$$

a

$$M_i(f,\Delta)(x_i - x_{i-1}) \ge \sum_{j=k+1}^{l} M_j(f,\Delta')(y_{j-1} - y_j).$$

Z posledních rovnic dostáváme

---

3) Zopakujme si, že $\varrho(x) = 1$, je-li x racionální a $\varrho(x) = 0$, je-li x iracionální.

$$s(f,\Delta)=\sum_{i=1}^{n} m_i(f,\Delta)(x_i-x_{i-1})\le \sum_{i=1}^{m} m_i(f,\Delta')(y_i-y_{i-1})=s(f,\Delta')$$

a

$$S(f,\Delta)=\sum_{i=1}^{n} M_i(f,\Delta)(x_i-x_{i-1})\ge \sum_{i=1}^{m} M_i(f,\Delta')(y_i-y_{i-1})=S(f,\Delta').$$

Lemma 8.2. *Nechť f je omezená na intervalu $[a,b]$, pak ke každému $\varepsilon>0$ existuje $\delta>0$ takové, že je-li Δ dělení $[a,b]$ s $|\Delta|<\delta$ potom*

$$S(f,\Delta)-\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x<\varepsilon, \tag{8.1.7}$$
$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x-s(f,\Delta)<\varepsilon. \tag{8.1.8}$$

D ů k a z. Provedeme pouze důkaz vztahu (8.1.7), důkaz vztahu (8.1.8) je obdobný.

Zvolme $\varepsilon>0$, k tomuto číslu existuje dělení $\Delta'=(y_0,y_1,\dots,y_p)$ intervalu $[a,b]$ takové, že

$$S(f,\Delta')-\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{8.1.9}$$

Neboť f je omezená existuje $K\in\mathbb{R}$ takové, že $|f(x)|\le K$ pro každé $x\in[a,b]$. Položme $\delta=\varepsilon/4Kp$.

Nyní ukážeme, že je-li $\Delta(x_0,x_1,\dots,x_n)$ dělení $[a,b]$ s $|\Delta|<\delta$, potom $S(f,\Delta')-S(f,\Delta)<\varepsilon/2$. Toto spolu s rovnicí (8.1.9) dokáže (8.1.7).

Nechť $\Delta''=(z_0,z_1,\dots,z_m)$ je společné zjemnění dělení Δ' a Δ, podle Lemma 8.1 platí

$$S(f,\Delta'')\le S(f,\Delta')\quad \text{a}\quad s(f,\Delta'')\ge s(f,\Delta'). \tag{8.1.10}$$

Počítejme rozdíl $S(f,\Delta)-S(f,\Delta'')$. Je-li $(x_i,x_{i-1})=(z_k,z_{k-1})$ interval neobsahující žádný z z_j, potom $M_i(f,\Delta)(x_i-x_{i-1})=M_k(f,\Delta'')(z_k-z_{k-1})$. Rozdíl $S(f,\Delta)-S(f,\Delta'')$ tedy stačí počítat pouze na intervalech $(x_i,x_{i-1})=(z_s,z_r)$, kde $s-r>1$. V tomto případě platí

$$\Big|\sum_{k=r+1}^{s} M_k(f,\Delta'')(z_{k-1}-z_k)\Big|\le K\sum_{k=r+1}^{s}(z_{k-1}-z_k)=K(z_r-z_s)=K(x_i-x_{i-1})<K\delta.$$

Protože každý takový interval obsahuje některý bod x_i, jejich počet je nanejvýš p. Dostáváme

$$|S(f,\Delta)-S(f,\Delta'')|<p2K\delta=\frac{\varepsilon}{2}.$$

Jelikož Δ'' je zjemněním Δ je absolutní hodnota v předchozí rovnici zbytečná. Spolu s (8.1.10) dostáváme

$$S(f,\Delta)-S(f,\Delta')<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{8.1.11}$$

Nakonec, (8.1.11) a (8.1.9) dává

$$S(f,\Delta)-\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x=S(f,\Delta)-S(f,\Delta')+S(f,\Delta')-\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Věta 8.3. *Nechť f je omezená na $[a,b]$.*
1. Je-li f integrovatelná na $[a,b]$, pak pro každou posloupnost (Δ_n) dělení intervalu $[a,b]$ s $\lim|\Delta_n|=0$ *platí*

$$\lim_{n\to\infty} s(f,\Delta_n) = \lim_{n\to\infty} S(f,\Delta_n) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{8.1.12}$$

2. Existuje-li posloupnost (Δ_n), $\Delta_n \in D[a,b]$ *s* $\lim|\Delta_n| = 0$ *a* $\lim_{n\to\infty} s(f,\Delta_n) = \lim_{n\to\infty} S(f,\Delta_n)$, *pak je* f *integrovatelná na* $[a,b]$ *a platí (8.1.12).*

D ů k a z. 1. Nechť integrál $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ existuje, dokážeme rovnost (8.1.12) pro limitu horních součtů. Zvolme $\varepsilon > 0$, podle Lemma 8.2 existuje $\delta > 0$ takové, že

$$S(f,\Delta) - \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = S(f,\Delta) - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x < \varepsilon, \tag{8.1.13}$$

pro Δ s $|\Delta| < \delta$. Jelikož $\lim_{n\to\infty}|\Delta_n| = 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n > n_0$ je $|\Delta_n| < \delta$; to znamená že pro ně platí (8.1.13).

Bod 2. plyne z toho, že $\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x \le \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$ a z toho že podle Lemmatu 8.2 musí být $\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x < \varepsilon$, pro každé $\varepsilon > 0$.

Příklad 8.4. Nechť $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je funkce taková, že $f(x) = 0$ pro všechna $x \in [a,b]$ až na $x \in \{c_1, c_2, \dots c_k\}$, ukážeme, že $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$.

Uvažujme posloupnost dělení (Δ_n) takovou, že $|\Delta_n| < 1/2kMn$, kde $M = \max\{|f(c_1)|, |f(c_2)|, \dots, |f(c_k)|\}$. Obsahuje-li interval $[x_{i-1}, x_i]$ některý z bodů c_j, platí $0 < M_i(f,\Delta_n) \le M$, a $-M \le m_i(f,\Delta_n) < 0$; jinak $M_i(f,\Delta) = 0$ a $m_i(f,\Delta_n) = 0$. Protože každé z čísel c_j může náležet nanejvýše dvěma intervalům ze systému $\{[x_{i-1}, x_i] \mid i = 1,\dots,n\}$, máme

$$S(f,\Delta_n) \le 2kM|\Delta_n| < 1/n \quad \text{a} \quad s(f,\Delta_n) \ge -2kM|\Delta_n| > -1/n.$$

Limity $\lim S(f,\Delta_n)$, $\lim s(f,\Delta_n)$ existují, rovnají se a podle věty 8.3 je f integrovatelná a platí

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \pm\frac{1}{n} = 0.$$

Uvažujme funkci $\mathrm{id}_\mathbb{R}$ na intervalu $[0,1]$, dále mějme posloupnost dělení (Δ_n), $\Delta_n = (0, 1/n, 2/n, \dots, n/n = 1)$. Jelikož $\mathrm{id}_\mathbb{R}$ je na intervalu $[i/n, (i+1)/n]$ rostoucí, platí $M_i(\mathrm{id}_\mathbb{R}, \Delta_n) = \mathrm{id}_\mathbb{R}((i+1)/n) = (i+1)/n$ a $m_i(\mathrm{id}_\mathbb{R}, \Delta_n) = \mathrm{id}_\mathbb{R}(i/n) = i/n$. Proto

$$S(\mathrm{id}_\mathbb{R}, \Delta_n) = \sum_{i=1}^n \frac{i+1}{n}\frac{1}{n} = \frac{1+n}{2n}, \qquad \text{(ověřte!)}$$

$$s(\mathrm{id}_\mathbb{R}, \Delta_n) = \sum_{i=1}^n \frac{i}{n}\frac{1}{n} = \frac{n-1}{2n}. \qquad \text{(ověřte!)}$$

Pro funkci $\mathrm{id}_\mathbb{R}$ a posloupnost dělení (Δ_n) jsou splněny předpoklady věty 8.3 (speciálně, $\lim S(f,\Delta_n) = \lim s(f,\Delta_n) = \frac{1}{2}$) a proto

$$\int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

Věta 8.5. *Je-li* f *spojitá na* $[a,b]$, *pak je* f *na* $[a,b]$ *integrovatelná.*

D ů k a z. Využijeme toho, že spojitá funkce je na uzavřeném intervalu stejnoměrně spojitá.[4)]

Uvažujme posloupnost dělení (Δ_n) intervalu $[a,b]$ takovou, že $\lim_{n\to\infty}|\Delta_n| = 0$. Ukážeme, že pro

[4)]Funkce $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *stejnoměrně spojitá na* $Y \subset X$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x, y \in Y$ takové že $|x - y| < \delta$ je $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > n_0$ je $|S(f, \Delta_n) - s(f, \Delta_n)| < \varepsilon$. To je postačující pro existenci integrálu $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (proč?).

Nechť $\varepsilon > 0$, ze stejnoměrné spojitosti plyne existence $\delta > 0$ takového, že pro libovolné $x, y \in [a, b]$ pro které je $|x - y| < \delta$, platí $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/(b-a)$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n > n_0$ je $|\Delta_n| < \delta$ (to lze udělat, protože $\lim_{n\to\infty} |\Delta_n| = 0$). Nyní je-li $[x_{i-1}, x_i]$ interval dělení Δn, pro každé $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$ platí $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/(b-a)$. Proto

$$M_i(f, \Delta_n) - m_i(f, \Delta_n) < \frac{\varepsilon}{b-a}. \qquad \text{(ověřte!)} \tag{8.1.14}$$

Odtud dostáváme

$$\begin{aligned}
S(f, \Delta_n) - s(f, \Delta_n) &= \sum_{i=1}^{m} M_i(f, \Delta_n)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{m} m_i(f, \Delta_n)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{m} (M_i(f, \Delta_n) - m_i(f, \Delta_n))(x_i - x_{i-1}) \\
&< \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{m} (x_i - x_{i-1}) \qquad \text{(podle (8.1.14))} \\
&= \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Nyní použijeme větu 8.3 a důkaz je ukončen.

Věta 8.6. *Buďte $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ omezené a budiž $c \in \mathbb{R}$, existují-li integrály $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ a $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$, pak existují integrály $\int_a^b (f+g)(x)\mathrm{d}x$, $\int_a^b (cf)(x)\mathrm{d}x$ a platí*
1. $\int_a^b (f+g)(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$;
2. $\int_a^b (cf)(x)\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Důkaz. 1. Jelikož supremum součtu funkcí na množině je rovno součtu suprem funkcí na téže množině (ověřte!), pro každé dělení Δ intervalu $[a, b]$ platí

$$s(f+g, \Delta) = s(f, \Delta) + s(g, \Delta) \quad \text{a} \quad S(f+g, \Delta) = S(f, \Delta) + S(g, \Delta). \tag{8.1.15}$$

Nechť (Δ_n) je posloupnost dělení intervalu $[a, b]$ taková, že $\lim_{n\to\infty} |\Delta_n| = 0$. Jelikož limity $\lim_{n\to\infty} s(f, \Delta_n)$, $\lim_{n\to\infty} S(f, \Delta_n)$, (respektive $\lim_{n\to\infty} s(g, \Delta_n)$ a $\lim_{n\to\infty} s(g, \Delta_n)$) existují a rovnají se integrálu $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (respektive $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$), existují i následující limity a podle (8.1.15) platí rovnosti

$$\lim_{n\to\infty} s(f+g, \Delta_n) = \lim_{n\to\infty} s(f, \Delta_n) + \lim_{n\to\infty} s(g, \Delta_n) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$
$$\lim_{n\to\infty} S(f+g, \Delta_n) = \lim_{n\to\infty} S(f, \Delta_n) + \lim_{n\to\infty} S(g, \Delta_n) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Nyní již můžeme aplikovat větu 8.3.

Důkaz bodu 2. je ještě o poznání jednodušší a proto jej přenecháváme čtenáři.

Věta 8.7. *Nechť f je omezená funkce na $[a, b]$ a $c \in (a, b)$. Integrál $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ existuje, právě když existují integrály $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$, $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ a platí*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x. \qquad \textit{(aditivita)} \tag{8.1.16}$$

D ů k a z. Nechť (Δ_n^L) je posloupnost dělení intervalu $[a, c]$ a (Δ_n^P) posloupnost dělení intervalu $[c, b]$ takové, že $\lim_{n\to\infty} |\Delta_n^P| = \lim_{n\to\infty} |\Delta_n^L| = 0$. Definujme posloupnost dělení (Δ_n) intervalu $[a, b]$ takto: je-li $\Delta_n^L = (a = x_0, x_1, \dots, x_k = c)$ a $\Delta_n^P = (c = y_0, y_1, \dots, y_l = b)$, položme $\Delta = (a = x_0, x_1, \dots, x_k = c, y_1, y_2, \dots y_l = b)$. Navíc platí $\lim_{n\to\infty} |\Delta_n| = \lim_{n\to\infty} \max\{|\Delta_n^L|, |\Delta_n^P|\} = 0$ a

$$s(f, \Delta_n) = \sum_{i=1}^{k} m_i(f, \Delta_n^L)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{l} m_i(f, \Delta_n^P)(y_i - y_{i-1}) = s(f, \Delta_n^L) + s(f, \Delta_n^P),$$
$$S(f, \Delta_n) = \sum_{i=1}^{k} M_i(f, \Delta_n^L)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{l} M_i(f, \Delta_n^P)(y_i - y_{i-1}) = S(f, \Delta_n^L) + S(f, \Delta_n^P).$$

Použijeme věty o počítání s limitami a větu 8.3, pro $n \to \infty$ dostaneme (8.1.16).

Věta 8.8. *Budiž $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ takové, že $f(x) = g(x)$ pro $x \in [a, b] \setminus \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$. Potom je-li g integrovatelná na $[a, b]$, je integrovatelná na $[a, b]$ i f a platí $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.*
D ů k a z. Položme $h = f - g$. Platí tedy, že $f = h + g$. Funkce h je rovna nule na celém $[a, b]$ vyjma bodů $c_1, c_2, \dots, c_k$, podle příkladu 8.4 to znamená, že je integrovatelná a $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0$. Podle věty 8.6 integrál z f na $[a, b]$ existuje a platí $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b h(x)\mathrm{d}x \int_a^b +g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

8.2 Integrál jako funkce horní meze, primitivní funkce, neučitý integrál. Uvažujme funkci $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, funkce $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ nazveme *primitivní funkce k funkce f* jestliže platí $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in (a, b)$. Primitivní funkce není k funkci f určena jednoznačně, jejich vztah ukazuje následující věta.

Věta 8.9. *Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ spojitá a F, G dvě primitivní funkce k f, potom $F - G$ je konstantní.*
D ů k a z. Položme $H = F - G$, ukážeme, že $H(x) = H(y)$ pro každé $x, y \in [a, b]$, tím bude ukázáno, že $F - G$ je konstantní (proč?). Podle věty o střední hodnotě (věta 7.14) existuje $\xi \in (x, y)$, takové, že $H(y) - H(x) = H'(\xi)(y - x)$. Využijeme definici funkce H a toho, že F i G jsou primitivní k f a dostaneme $H(y) - H(x) = (F'(\xi) - G'(\xi))(y - x) = (f(\xi) - f(\xi))(y - x) = 0$. To znamená $H(x) = H(y)$.

Na tomto místě bychom rádi definovali neurčitý integrál z funkce jako k ní primitivní funkci, jenomže vzhledem k tomu, že k dané funkci existuje bezpočet primitivních funkcí, nebyl by definovaný pojem určen jednoznačně. Naštěstí podle věty 8.9 je-li f definována na intervalu liší se jedna primitivní funkce od druhé jen o konstantní funkci. To nám umožní následující.

Pod pojmem *neurčitý integrál funkce f na intervalu J* rozumíme množinu všech primitivních funkcí k f na J.[5)] Vzhledem k řečenému ji lze charakterizovat jen jedinou z nich. Neurčitý integrál z f značíme $\int f(x)\mathrm{d}x$, je-li F nějaká primitivní funkce k f na J, píšeme

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + c.$$

Symbol c zastupuje všechny možné konstantní funkce a říkáme mu *integrační konstanta*. Nebude-li to nezbytně nutné, nebudeme ji pro přehlednost, většinou psát. Čtenář by si její přítomnost měl i přesto uvědomovat.

Uvažujme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$, pro $x \neq 0$ a $f(x) = 1$, pro $x = 0$. Kdyby k této funkci existovala primitivní funkce F, musela by být konstantní na intervalech $(-\infty, 0)$ i $(0, \infty)$ (o tom se lze přesvědčit pomocí věty o střední hodnotě). Označme tyto konstanty a, b. Kdyby $a \neq b$, pak je $F'(0)$ nevlastní nebo neexistuje, ale $F'(0)$ má být rovno 1; v případě $a = b$ dostaneme $F'(0) = 0$, což je také špatně.

Věta 8.10. *Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá na (a, b) a $c \in (a, b)$ libovolný bod, potom $F(x) = \int_c^x f(t)\mathrm{d}t$ je primitivní funkce k f.*

[5)] Jde vlastně o třídu ekvivalence na množině funkcí vzhledem k ekvivalenci „rozdíl je konstantní funkce.“

D ů k a z. Dokážeme, že pro každé $\varepsilon > 0$ a každý bod $x_0 \in (a, b)$ platí $f(x_0) - \varepsilon \leq F'(x_0) \leq f(x_0) + \varepsilon$, tím bude ukázáno, že $F'(x_0) = f(x_0)$. Provedeme výpočet pouze pro derivaci zprava.

Pro zvolené $h > 0$ a x_0 platí

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_c^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t - \int_c^{x_0} f(t)\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t. \tag{8.2.1}$$

Protože f je spojitá v x_0 ke zvolenému ε existuje $\delta > 0$ takové, že $f(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$. To znamená, že je-li $0 < h < \delta$ platí

$$f(x_0) - \varepsilon \leq f|_{[x_0-h,x_0+h]} \leq f(x_0) + \varepsilon \tag{8.2.2}$$

Snadno si jistě odvodíte, že je-li $g \leq f$ na $[a, b]$, potom $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$; odtud a z (8.2.2) dostáváme

$$\begin{aligned}
&(f(x_0) - \varepsilon)h \leq \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t \leq (f(x_0) + \varepsilon)h,\\
&f(x_0) - \varepsilon \leq \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t \leq f(x_0) + \varepsilon,\\
&f(x_0) - \varepsilon \leq F'(x_0) \leq f(x_0) + \varepsilon. \qquad \text{(podle (8.2.1) pro } h \to 0)
\end{aligned}$$

Věta 8.11. *Předpokládejme, že existují neurčité integrály z f a g na intervalu $[a, b]$ a nechť $c \in \mathbb{R}$, potom existují neurčité integrály $\int f(x) + g(x)\mathrm{d}x$ a $\int (cf)(x)\mathrm{d}x$ a platí*
1. $\int f(x) + g(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$.
2. $\int (cf)(x)\mathrm{d}x = c\int f(x)\mathrm{d}x$.

D ů k a z. Označme si F primitivní funkci k f a G primitivní funkci k g obě na intervalu (a, b). Podle věty 7.5 platí $(F + G)' = F' + G' = f + g$. To znamená, že $F + G$ je primitivní k $f + g$.

Opět podle věty 7.5 platí $(cF)' = cF' = cf$, tedy cF je primitivní funkce k cf.

Věta 8.12 (Per partes). *Nechť $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ jsou funkce, které mají v $[a, b]$ spojité derivace. Potom platí*

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x. \tag{8.2.3}$$

D ů k a z. Předně, všechny integrály v (8.2.3) existují podle věty 8.10; jedná se o spojité funkce.

Platí $(uv)' = u'v + uv'$, primitivní funkce k funkci $(uv)'$ je uv, proto $uv(x) = \int u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\mathrm{d}x = \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x + \int u(x)v'(x)\mathrm{d}x$ (podle věty 8.11). Odtud již (8.2.3) přímo plyne.

Příklady

Věta 8.13 (Substituční metoda I. druhu). *Buď f spojitá v (a, b), nechť $\varphi : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ má derivaci v (α, β), potom je-li F primitivní funkce k f, na intervalu (a, b) platí*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = F(\varphi(t)). \tag{8.2.4}$$

D ů k a z. Máme ukázat, že na intervalu (α, β) je $F \circ \varphi$ primitivní k $(f \circ \varphi)\varphi'$. To ale plyne z toho, že pro $t \in (\alpha, \beta)$ platí $(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

Příklady

Předchozí věta slouží k výpočtu integrálu z funkce ve tvaru $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, známe-li integrál z $f(x)$. Někdy může být ale výhodné vypočítat integrál z $f(x)$ pomocí integrálu z $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ pro nějakou vhodně zvolenou funkci φ. Za jakých podmínek je to možné, nám říká následující věta.

Věta 8.14 (Substituční metoda II. druhu). *Nechť $\varphi : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ je surjekce a φ' existuje na (α, β), nechť $\psi : (a, b) \to (\alpha, \beta)$ je zobrazení, pro které $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{(a,b)}$.[6] Potom, je-li f spojitá, platí*

$$\int f(x)\mathrm{d}x = G(\psi(x)), \quad \text{kde } G(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t. \tag{8.2.5}$$

D ů k a z. Označme F primitivní funkci k f na (a, b), máme dokázat, že $F(x) = G(\psi(x)) + c$. Platí $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$ pro $t \in (\alpha, \beta)$, to podle věty 8.9 znamená, že na intervalu (α, β) platí $G(t) = F(\varphi(t)) + c$. Ke každému $x \in (a, b)$ existuje $t \in (\alpha, \beta)$ tak, že $\psi(x) = t$, proto na (a, b) platí $G(\psi(x)) = F(\varphi(\psi(x))) + c = F(x) + c$.

Příklady

Věta 8.15 (Newton-Leibnitzova formule). *Buď $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ omezená, F primitivní funkce k f. Předpokládejme, že existuje $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, potom*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a). \qquad \textit{(Newton-Leibnitzova formule)} \tag{8.2.6}$$

D ů k a z. Je-li $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_m)$ libovolné dělení intervalu $[a, b]$, pak podle věty o střední hodnotě pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$ existuje $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ takové, že

$$F'(\xi_i) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}.$$

Jelikož F je primitivní funkce k f dostaneme

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

To znamená, že pro každé dělení Δ platí

$$\begin{aligned} s(f, \Delta) &= \sum_{i=1}^m m_i(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^m f'(\xi)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^m F(x_i) - F(x_{i-1}) = \\ &= F(b) - F(a) \le \sum_{i=1}^m M_i(x_i - x_{i-1}) = S(f, \Delta) \end{aligned} \tag{8.2.7}$$

Nechť (Δ_n) je posloupnost dělení intervalu $[a, b]$ taková, že $\lim |\Delta_n| = 0$. Pro každé dělení Δ_n platí (8.2.7). Nyní využijeme větu o třech limitách a dostaneme

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} s(f, \Delta_n) \le F(b) - F(a) \le \lim_{n\to\infty} S(f, \Delta_n) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Důsledek 8.16 (Newton-Leibnitzova formule pro per partes). *Nechť $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ jsou funkce, které mají v $[a, b]$ spojité derivace. Potom existuje integrál $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ a platí*[7]

$$\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x \tag{8.2.8}$$

D ů k a z. Integrály $\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$ a $\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x$ existují podle věty 8.5, zbývá tedy pouze dokázat

[6] Funkci ψ říkáme *pravá inverze*. Snadno se přesvědčíte, že každá surjekce má pravou inverzi.

[7] Často se setkáte se setkáte se zápisem $\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x$

vztah (8.2.8). Označme si $f(x) = u'(x)v(x)$, podle věty 8.12 je $F(x) = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\mathrm{d}x$ primitivní funkce k f. Nyní využijeme Newton-Leibnitzovy formule a dostaneme (8.2.8).

Důsledek 8.17 (Newton-Leibnitzova formule pro substituci). *Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \to [A, B]$ má v $[\alpha, \beta]$ spojitou derivaci a f nechť je spojitá v $[A, B]$, potom integrály v (8.2.9) existují a*

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\mathrm{d}x \tag{8.2.9}$$

D ů k a z. Funkce f a $(f \circ \varphi)\varphi'$ jsou spojité a integrály v (8.2.9) tedy existují podle věty 8.5. Jde tedy jen o dokázání rovnosti (8.2.9). Podle věty 8.14 (její předpoklady jsou splněny (ověřte!)) je $F \circ \varphi$ primitivní k $(f \circ \varphi)\varphi'$ na $[\alpha, \beta]$, F jsme si dovolili označit primitivní funkci f f na $[A, B]$ (ta dozajista existuje podle věty 8.10). Podle věty 8.15 je $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = (F \circ \varphi)(\beta) - (F \circ \varphi)(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$. Podle téže věty pravá strana rovnice má tvar $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\mathrm{d}x = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$.

Ještě více příkladů

8.3 Nevlastní Riemannův integrál. V tomto odstavci se pokusíme rozšířit pojem určitého integrálu i na funkce, které nejsou na intervalu $[a, b]$ (případně (a, b)) omezené a také o integrál na nevlastním intervalu.

Nejprve rozšíříme pojem určitého integrálu z funkce f na intervalu $[a, b)$ (případně $(a, b]$). Nechť $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ (případně $f : (a, b] \to \mathbb{R}$), ne nutně omezená, připouštíme také případ $b = \infty$ (případně $a = -\infty$) taková, že $\int_a^y f(x)\mathrm{d}x$ (případně $\int_y^b f(x)\mathrm{d}x$) existuje pro každé $y \in (a, b)$.[8)] Existuje-li vlastní limita

$$\lim_{y\to b+} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad \left(\text{případně } \lim_{y\to a-} \int_y^b f(x)\mathrm{d}x\right), \tag{8.3.1}$$

nazveme tuto limitu *nevlastní integrál z f na* $[a, b)$ (případně $(a, b]$) a značíme jej $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Je-li limita v (8.3.1) nevlastní, říkáme, že integrál $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ diverguje.

Zkusme, pomocí předchozí definice vypočítat

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 1}.$$

Pro každé $y \in [0, \infty)$ platí

$$\int_0^y \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 1} = \Big[\arctan(x)\Big]_0^y = \arctan(y) - \arctan(0) = \arctan(y).$$

Tedy, podle předchozí definice je

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 1} = \lim_{y\to\infty} \arctan(y) = \frac{\pi}{2}.$$

Nyní nechť $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ je funkce (ne nutně omezená), která má Reimannův integrál $\int_c^d f(x)\mathrm{d}x$ pro každý interval $[c, d] \subset (a, b)$ (i zde připouštíme možnost, že (a, b) je nevlastní), definujeme *nevlastní integrál* z f *na* (a, b) tak, že zvolme $c \in (a, b)$, pokud existují nevlastní integrály[9)] $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ a $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$,

Definovaný integrál z funkce f na intervalu (a, b), pokud existuje, nesmí záviset na volbě dělícího bodu $c \in (a, b)$, to ukazuje následující lemma.

8)To mimochodem znamená, že funkce f je omezená na $[a, y]$ (případně $[y, b]$).

9)Aby nešlo k omylu hned z počátku, existuje-li nevlastní integrál, znamená to, že limita v (8.3.1) je vlastní.

Lemma 8.18. *Buď $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ splňující podmínky definice nevlastního integrálu na intervalu (a,b) a $c,d\in(a,b)$, $c<d$, potom*

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^d f(x)\mathrm{d}x + \int_d^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{8.3.2}$$

D ů k a z. Provedeme ověření vztahu (8.3.2), v následujícím výpočtu jsme využili aditivity integrálu (věta 8.7) a několikrát vět 4.29, 4.30 zejména pro případ, kdy limity vycházejí nevlastní. Pozná čtenář kde?

$$\begin{aligned}
\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x &= \lim_{y\to a+}\int_y^c f(x)\mathrm{d}x + \lim_{z\to b-}\int_c^z f(x)\mathrm{d}x = \\
&= \lim_{y\to a+}\int_y^c f(x)\mathrm{d}x + \lim_{z\to b-}\int_c^d f(x)\mathrm{d}x \int_c^z f(x)\mathrm{d}x \\
&= \lim_{y\to a+}\int_y^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^d f(x)\mathrm{d}x + \lim_{z\to b-}\int_d^z f(x)\mathrm{d}x \\
&= \lim_{y\to a+}\int_y^d f(x)\mathrm{d}x + \lim_{z\to b-}\int_d^z f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_a^d f(x)\mathrm{d}x + \int_d^b f(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Chceme-li pomocí právě uvedené definice vypočítat integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1},$$

musíme si zvolit nějaký bod $c\in(-\infty,\infty)$ a vypočítat dílčí integrály $\int_{-\infty}^c 1/(x^2+1)\mathrm{d}x$ a $\int_c^\infty 1/(x^2+1)\mathrm{d}x$ podle definice uvedené na začátku tohoto odstavce.

Zvolme za $c=0$ a počítejme nejprve $\int_{-\infty}^c 1/(x^2+1)\mathrm{d}x$, máme

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^0\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} &= \lim_{y\to-\infty}\int_y^0\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \qquad\qquad \text{(definice nevlastního integrálu)}\\
&= \lim_{y\to-\infty}\Big[\arctan(x)\Big]_y^0 = \lim_{y\to-\infty}(\arctan(0)-\arctan(y)) = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Obdobným způsobem dostaneme, že také $\int_0^\infty 1/(x^2+1)\mathrm{d}x = \pi/2$. Jelikož existují oba dílčí nevlastní integrály, platí

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \int_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} + \int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \pi.$$

Následující věta nám dává silný nástroj pro zjišťování konvergence řad.

Věta 8.19 (Integrální kritérium). *Nechť $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ je spojitá nezáporná nerostoucí funkce, pak řada $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ konverguje právě, když existuje integrál $\int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x$.*

D ů k a z. Nechť (s_n) je posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^\infty f(n)$. Jelikož f je nerostoucí pro každé $n>1$ platí $f|_{(n-1,n)} \ge f(n) \ge f|_{(n,n+1)}$ a protože f je integrovatelná na každém $(n,n+1)$ platí $\int_{n-1}^n f(x)\mathrm{d}x \ge (n-n+1)f(n) \ge \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x$. To znamená, že řada $\sum_{n=2}^\infty \int_{n-1}^n f(x)\mathrm{d}x$ je majoranta řady $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ a minorantou téže řady je řada $\sum_{n=2}^\infty \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x$.

???

Uvažujme řadu $\sum 1/n^\alpha$, kde $\alpha\in\mathbb{R}$, definujeme funkci $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ předpisem $f(x)=1/x^\alpha$. Řady

$\sum 1/n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ jsou totožné (zamyslete se nad tím!). Prozkoumejme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ užitím kritéria 8.19. Jelikož

$$\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}} = \lim_{y\to\infty} \int_1^{y} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}} =$$

pro $\alpha \neq 1$, máme

$$= \lim_{y\to\infty} \left[\frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}\right]_1^y = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{(1-\alpha)y^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha} \tag{8.3.3}$$

pro $\alpha = 1$

$$= \lim_{y\to\infty} \Big[\ln(x)\Big]_1^y = \lim_{y\to\infty} \ln(y) = \infty$$

Limita v (8.3.3) je vlastní pro $\alpha > 1$. Celkově tedy $\sum 1/n^{\alpha}$ konverguje pro $\alpha > 1$ a diverguje pro $\alpha \leq 1$.

Neurčitý integrál — příklady a cvičení

8.4 Základní vzorce.

$$\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \text{ pro } n \neq -1;$$

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x|;$$

$$\int \cos(x)\mathrm{d}x = \sin(x);$$

$$\int \sin(x)\mathrm{d}x = -\cos(x);$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2(x)} = -\operatorname{cotan}(x);$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(x)} = \tan(x);$$

$$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln(a)};$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{b^2x^2 - a^2} = \frac{1}{2ab} \ln\left|\frac{bx-a}{bx+a}\right|, \text{ pro } a, b \neq 0;$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{b^2x^2 + a^2} = \frac{1}{ab} \arctan\frac{bx}{a}, \text{ pro } a, b \neq 0;$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 - x^2} = \arcsin\frac{x}{a}, \text{ pro } a \neq 0;$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+b}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+b}\right|, \text{ pro } b > 0;$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \ln|f(x)|;$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+ax+b)^n} = \frac{x+\frac{a}{2}}{2(n-1)\Big(b-\frac{a^2}{4}\Big)} \frac{1}{(x^2+ax+b)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)\Big(b-\frac{a^2}{4}\Big)} \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+ax+b)^{n-1}}$$

8.5 Často používané substituce. V následujících vztazích $R()$ označuje racionální funkci.

$\int f(x)\mathrm{d}x$	Substituce
$f(x) = R(x, x^{1/k_1}, \dots, x^{1/k_n})$, kde $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$	$t = x^{1/k}$, k je nejmenší společný násobek $k_1, \dots, k_n$.
$f(x) = R\Big(x, \Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)^{1/k_1}, \dots, \Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)^{1/k_n}\Big)$, kde $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$, a $ad - bc \neq 0$,	$t = \Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)^{1/k}$, k je nejmenší společný násobek $k_1, \dots, k_n$.
$f(x) = R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$	Eulerova
(a) $a > 0$,	$t = \sqrt{ax^2+bx+c} \pm x\sqrt{a}$;
(b) $c \geq 0$,	$xt = \sqrt{ax^2+bx+c} \pm \sqrt{c}$;
(c) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ jsou kořeny ax^2+bx+c,	$t = \sqrt{a\frac{x-\beta}{x-\alpha}}$.

$f(x) = x^m(a+bx^n)^p$, $m, n, p \in \mathbb{Q}$ (binomický integrál)

(a) $p \in \mathbb{N}$,		použijeme binomickou větu;
(b) $p \in \mathbb{Z}$,		$x = t^s$, s společný jmenovatel m a n;
(c) $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$,		$a + bx = t^s$, s je jmenovatel p;
(d) $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$,		$ax^{-n} + b = t^s$, s je jmenovatel p.

$f(x) = R(\sin(x), \cos(x))$ — označme $u = \sin(x)$, $v = \cos(x)$;

(a) $R(u, v) = -\mathbb{R}(-u, v)$,		$t = \cos(x)$;
(b) $R(u, v) = -\mathbb{R}(u, -v)$,		$t = \sin(x)$;
(c) $R(u, v) = \mathbb{R}(-u, -v)$,		$t = \tan(x)$;
		univerzální substituce $t = \tan(x/2)$.

$f(x) = \sin^m(x)\cos^n(x)$

(a) $m, n \in \mathbb{Q}$		$t = \sin(x)$ nebo $t = \cos(x)$;
(b) $m, n \in \mathbb{Z}$	(1) m je liché,	$t = \cos(x)$;
	(2) n je liché,	$t = \sin(x)$;
	(3) m, n jsou sudá,	$t = \tan(x)$;
	(4) m, n jsou sudá nezáporná	$\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$, $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$.

Příklady

1. *Spočítejte integrál*

$$\int \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x.$$

Použijeme metodu per partes. Označme si $u(x) = \arcsin(x)$ a $v'(x) = (x+1)^{-1/2}$. Potom (porovnej s (8.2.3))

$$\int \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = \arcsin(x) & u' = (1-x^2)^{-1/2} \\ v' = (x+1)^{-1/2} & v = 2\sqrt{x+1} \end{matrix} \right| =$$
$$= 2\sqrt{x+1}\arcsin(x) - 2\int \frac{\sqrt{x+1}}{1-x^2}\mathrm{d}x = 2\sqrt{x+1}\arcsin(x) - 2\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}$$
$$= 2\sqrt{x+1}\arcsin(x) + 4\sqrt{1-x}.$$

2. *Spočtěte integrál*

$$\int \frac{\ln(\tan(x))}{\sin(x)\cos(x)}\mathrm{d}x.$$

Řešení: Použijeme první substituční metodu. Zaveďme substituci $t(x) = \tan(x)$.

$$\int \frac{\ln(\tan(x))}{\sin(x)\cos(x)}\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} t = \tan(x) \\ \sin(x) = t/\sqrt{1+t^2} \\ \cos(x) = 1/\sqrt{1+t^2} \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t/(1+t^2) \end{matrix} \right| = \int \frac{\ln(t)}{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \tag{8.5.1}$$

$$= \int \frac{\ln(t)}{t} \mathrm{d}t$$

Poslední integrál vypočteme metodou per partes. Tedy

$$\int \frac{\ln(t)}{t} \mathrm{d}t = \begin{vmatrix} u = \ln(t) & u' = 1/t \\ v' = \ln(t) & v = \ln(t) \end{vmatrix} = \ln^2(x) - \int \frac{\ln(t)}{t} \mathrm{d}t.$$

$$\int \frac{\ln(t)}{t} \mathrm{d}t = \tfrac{1}{2} \ln^2(t).$$

Vrátíme-li se k (8.5.1), s požitím předchozí rovnice a použité subtituce dostaneme

$$\int \frac{\ln(\tan(x))}{\sin(x)\cos(x)} \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2} \ln^2(t) = \tfrac{1}{2} \ln^2(\tan(x)).$$

3. *Spočtěte integrál*

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}.$$

Řešení: Opět použijeme první substituční metodu, tentokráte pro $t = \sqrt{(1-x)/(1+x)}$, dostaneme

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \begin{vmatrix} t = \sqrt{(1-x)/(1+x)} \\ x = (1-t^2)/(1+t^2) \\ \mathrm{d}x = -4t\mathrm{d}t/(1-t^2)^2 \end{vmatrix} = \int t \frac{(1+t^2)^2}{4} \frac{-4t}{(1+t^2)^2} \mathrm{d}t =$$

$$= -\int t^2 \mathrm{d}t = -\frac{t^3}{3} = -\frac{1}{3} \sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3}.$$

4. *Spočtěte integrál*

$$\int \sqrt{1+\sin(x)} \mathrm{d}x.$$

Řešení: Tento příklad budeme řešit dvěma způsoby:

První způsob: použijeme první substituční metodu pro $t = \tan(x/2)$, tedy

$$\int \sqrt{1+\sin(x)} \mathrm{d}x = \begin{vmatrix} x = 2\arctan(t) \\ \sin(x) = 2t/(1+t^2) \\ \cos(x) = 2/(1+t^2) \\ \mathrm{d}x = 2\mathrm{d}t/(1+t^2) \end{vmatrix} = \int \sqrt{1 + \frac{2t}{1+t^2}} \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

$$= 2\int (1+t)(1+t^2)^{-3/2} \mathrm{d}t = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{3/2}} + 2\int \frac{t}{(1+t^2)^{3/2}} \mathrm{d}t.$$

Poslední dva integrály si spočítáme zvlášť, na první z nich použijeme první substituční metodu pro $z = \sqrt{1+t^2}$

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{3/2}} = \begin{vmatrix} z = \sqrt{1+t^2} \\ t = -1/\sqrt{z^2-1} \\ \mathrm{d}t = -z/(z^2-1)^{3/2}\mathrm{d}z \end{vmatrix} = -\int \frac{1}{z^2} \mathrm{d}z = \frac{1}{z} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Na druhý integrál použijeme substituci $u = \sqrt{1+t^2}$, máme

$$\int \frac{t}{(1+t^2)^{3/2}}\mathrm{d}t = \left| \begin{matrix} u = \sqrt{1+t^2} \\ u\mathrm{d}u = t\mathrm{d}t \end{matrix} \right| = \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = -\frac{1}{u} = -\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Celkově tedy dostáváme

$$\int \sqrt{1+\sin(x)}\mathrm{d}x = 2\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right) = 2(\sin(x/2) - \cos(x/2)).$$

Druhý způsob: Použijeme druhou substituční metodu, položme $1+\sin(x) = t^2$, dostaneme

$$\int \sqrt{1+\sin(x)}\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} \sin(x) = t^2 - 1 \\ \cos(x) = t\sqrt{2-t^2} \\ \mathrm{d}x = 2\mathrm{d}t/\sqrt{2-t^2} \end{matrix} \right| = 2\int \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\mathrm{d}t$$

Opět použijeme druhou substituční metodu, tentokrát položíme $z^2 = 2 - t^2$ a máme

$$\int \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\mathrm{d}t = \left| \begin{matrix} z^2 = 2 - t^2 \\ 2z\mathrm{d}z = 2t\mathrm{d}t \end{matrix} \right| = -\int \frac{z}{z}\mathrm{d}z = -z = -\sqrt{2-t^2}.$$

Celkově tedy máme

$$\int \sqrt{1+\sin(x)}\mathrm{d}x = -2\sqrt{2-t^2} = -2\sqrt{1-\sin(x)}.$$

Cvičení

1. Metoda per partes

a) $\int x^n \sin(2x)\mathrm{d}x$; b) $\int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$; c) $\int x3^x\mathrm{d}x$;
d) $\int x^n \ln(x)\mathrm{d}x$; e) $\int x \arctan(x)\mathrm{d}x$; f) $\int \arccos(x)\mathrm{d}x$;
g) $\int \arctan(\sqrt{x})\mathrm{d}x$; h) $\int \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$; i) $\int x \tan^2(x)\mathrm{d}x$;
j) $\int x \cos^2(x)\mathrm{d}x$; k) $\int \ln(x^2+1)\mathrm{d}x$; l) $\int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$;
m) $\int \mathrm{e}^x \sin(x)\mathrm{d}x$; n) $\int \sin(\ln(x))\mathrm{d}x$; o) $\int \frac{x^2}{(x+2)^2}\mathrm{d}x$.

2. Substituční metoda

a) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$; c) $\displaystyle\int \frac{4x+3}{(x-2)^3}\mathrm{d}x$;
d) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$; e) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}\mathrm{d}x$; f) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$;
g) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$; h) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\ln(x)}}{x\ln(x)}\mathrm{d}x$; i) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x$;
j) $\displaystyle\int \frac{x^2}{a^2+x^2}\mathrm{d}x$; k) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$; l) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$;

m) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}+e^{x}}{e^{4x}-e^{2x}+1}\mathrm{d}x$; n) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}}\mathrm{d}x$;

o) $\displaystyle\int \sqrt{1+\cos^2(x)}\,\sin(2x)\cos(2x)\mathrm{d}x$.

3. Racionální funkce

a) $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)(2x+1)}\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int \frac{2x^2}{2x^2-3x-2}\mathrm{d}x$; c) $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}\mathrm{d}x$;

d) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4}\mathrm{d}x$; e) $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}\mathrm{d}x$; f) $\displaystyle\int \frac{x^5}{(x-1)^2(x^2-1)}\mathrm{d}x$;

g) $\displaystyle\int \frac{7x^3-9}{x^4-5x^3+6x^2}\mathrm{d}x$; h) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^3}\mathrm{d}x$; i) $\displaystyle\int \frac{(x+1)^4}{(x^2+2x+2)^3}\mathrm{d}x$;

j) $\displaystyle\int \frac{1}{x(4+x^2)^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$; k) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^4}\mathrm{d}x$; l) $\displaystyle\int \frac{x^9}{(x^4-1})^2\mathrm{d}x$.

4. Goniometrické funkce

a) $\displaystyle\int \sin^3(x)\cos^2(x)\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos(x)\sin^3(x)}\mathrm{d}x$; c) $\displaystyle\int \frac{\sin^4(x)}{\cos^2(x)}\mathrm{d}x$;

d) $\displaystyle\int \frac{\sin(x)}{(1-\cos(x))^2}\mathrm{d}x$; e) $\displaystyle\int \frac{\cos^4(x)+\sin^4(x)}{\cos^2(x)-\sin^2(x)}\mathrm{d}x$; f) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x)+\cos(x)}$;

g) $\displaystyle\int \frac{1}{\tan(x)\cos(2x)}\mathrm{d}x$; h) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\tan(x)}\mathrm{d}x$; i) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin^2(x)}\mathrm{d}x$;

j) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{4+\tan(x)+4\operatorname{cotan}(x)}$; k) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{5-4\sin(x)+3\cos(x)}$; l) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2(x)+\tan^2(x)}$;

m) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\tan(x)}}{\sin(x)\cos(x)}\mathrm{d}x$; n) $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{\sin^3(x)-\cos^3(x)}\mathrm{d}x$; o) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^4(x)}}\mathrm{d}x$.

5. Funkce typu $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$

a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$; b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2x+x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$; c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{2+x-x^2}}$;

d) $\displaystyle\int \sqrt{1-4x-x^2}\mathrm{d}x$; e) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$; f) $\displaystyle\int \frac{3x^2-5x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\mathrm{d}x$;

g) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(x+\sqrt[3]{1+x^2})}$; h) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}}\mathrm{d}x$; i) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x}}{2+x^2}\mathrm{d}x$.

6. Binomické integrály

a) $\displaystyle\int \sqrt{x}(1+\sqrt{x})^4\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{1+x^2}}$; c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+x^3}}$;

d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1+x^4}}$; e) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}\mathrm{d}x$; f) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;

g) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2}\mathrm{d}x$; h) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}\mathrm{d}x$; i) $\displaystyle\int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\mathrm{d}x$.

7. Funkce typu $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$

a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2})}$; b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}}$; c) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\mathrm{d}x$;

d) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x$; e) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\mathrm{d}x$; f) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x-x^2}$.

8. Různé

a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)}\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x$; c) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2}\mathrm{d}x$;

d) $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{(1-\cos(x))^2}\mathrm{d}x$; e) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3(x)}$; f) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+x+1}}$;

g) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1-2x-x^2}$; h) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(\sqrt[3]{x}+1)}$; i) $\displaystyle\int \frac{\tan(x)}{1+\tan(x)+\tan^2(x)}\mathrm{d}x$;

j) $\displaystyle\int \frac{\arctan(x)}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$; k) $\displaystyle\int \arctan(1+\sqrt{x})\mathrm{d}x$; l) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin^3(x)\cos^2(x)}}\mathrm{d}x$;

m) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{3x}(\sin(2x)-\cos(2x))\mathrm{d}x$; n) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\sin(x)}\frac{x\cos^3(x)-\sin(x)}{\cos^2(x)}\mathrm{d}x$;

o) $\displaystyle\int \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\mathrm{d}x$.

9. Dokažte následující tvrzení: Jestliže ke dvěma z funkcí $f, g, f+g : J \to \mathbb{R}$ existuje na J primitivní funkce, pak existuje i ke třetí. Uveďte příklad funkcí, f, g takových, že k funkci $f+g$ existuje na J primitivní funkce, ale ani k funkci f ani k funkci g primitivní funkce neexistuje.

10. Existují funkce $f, g : J \to \mathbb{R}$, pro které platí $\int f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \int g(x)\mathrm{d}x$?

Určitý integrál — příklady a cvičení

8.6 Základní vzorce.

Plocha podgrafu funkce f na intervalu $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Plocha oblasti ohraničené křivkou, která je zadána parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [\alpha, \beta]$:

$$\left|\int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t\right|.$$

Plocha oblasti ohraničené křivkou, která je zadána v polárních souřadnicích rovnicí $\varrho = f(\varphi), \varphi \in [\alpha, \beta]$:

$$\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \varrho^2(\varphi)\mathrm{d}\varphi.$$

Délka rovinné křivky $y = f(x), x \in [a, b]$:

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f')^2(x)}\mathrm{d}x.$$

Délka křivky $(x(t), y(t), z(t)), t \in [\alpha, \beta]$

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{(x')^2(t) + (y')^2(t) + (z')^2(t)}\mathrm{d}t.$$

Délka křivky $\varrho = f(\varphi), \varphi \in [\alpha, \beta]$:

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{(\varrho')^2(\varphi) + \varrho^2(\varphi)}\mathrm{d}\varphi.$$

Objem prostorového útvaru, ležícího nad intervalem $[a, b]$ na ose x, jehož řez rovinou, procházející bodem $x \in [a, b]$, rovnoběžnou s rovinou yz, má plochu $A(x)$:

$$\int_a^b A(x)\mathrm{d}x. \quad \text{(Cavalieriho princip)}$$

Objem rotačního tělesa, vzniklého rotací podgrafu funkce f na intervalu $[a, b]$ kolem osy x (respektive y):

$$\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \quad \left(\text{respektive } 2\pi\int_a^b x f(x)\mathrm{d}x\right).$$

Povrch rotačního tělesa, vzniklého rotací grafu funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kolem osy x (respektive y):

$$2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f')^2(x)}\mathrm{d}x$$

$$\left(\text{respektive } 2\pi\int_a^b x\sqrt{1 + (f')^2(x)}\mathrm{d}x\right).$$

Povrch rotačního tělesa, vzniklého rotací křivky $x = \psi(t), y = \varphi(t), t \in [\alpha, \beta]$ kolem osy x:

$$2\pi\int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{(\varphi')^2(t) + (\psi')^2(t)}\mathrm{d}t.$$

Povrch rotačního tělesa, vzniklého rotací křivky $\varphi = f(\varphi), \varphi \in [\alpha, \beta]$ kolem osy x:

$$2\pi\int_\alpha^\beta |\varphi\sin(\varphi)|\sqrt{(\varrho')^2(\varphi) + \varrho^2(\varphi)}\mathrm{d}\varphi.$$

Příklady

5. *Odvodłe vzorec pro obsah kruhu*

a) v kartézských souřadnicích; *b) v parametrických souřadnicích;*

c) v polárních souřadnicích.

Řešení: a) Uvažujme tu část kruhu $x^2 + y^2 \leq r^2$, která leží v prvním kvadrantu. Jedná se tedy o podgraf funkce $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ na intervalu $[0, r]$. Obsah kruhu je čtyřnásobkem obsahu tohoto podgrafu. Tedy $S = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\mathrm{d}x$. V následujícím výpočtu, použijeme substituci $x = r\sin(t)$:

$$S = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x = r\sin(t) \\ \mathrm{d}x = r\cos(t)\mathrm{d}t \end{array} \right| = 4r^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\mathrm{d}t =$$
$$= 4r^2\Big[\tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{4}\sin(2t)\Big]_0^{\pi/2} = \pi r^2.$$

b) Parametricky kružnici zadáme takto: $x = r\cos(t), y = r\sin(t), t \in [0, 2\pi]$. Po dosazení do příslušného vzorce tedy dostaneme:

$$S = \left| \int_0^{2\pi} r\sin(t)(-\sin(t))\mathrm{d}t \right| = \left| -r^2 \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2t)}{2}\mathrm{d}t \right| =$$
$$= \left| -\frac{r^2}{2}\Big[t\Big]_0^{2\pi} + \frac{1}{4}r^2\Big[\sin(2t)\Big]_0^{2\pi} \right| = \left| -\pi r^2 \right| = \pi r^2.$$

c) Kružnici o poloměru r se středem v bodě $(0, 0)$ zadáme v polárních souřadnicích takto: $\varrho = r, \varphi \in [0, 2\pi]$. Podle příslušného vzorce tedy dostaneme:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}r^2\Big[\varphi\Big]_0^{2\pi} = \pi r^2.$$

6. *Spočtěte integrál*

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$$

Řešení: Opět použijeme druhou substituční metodu, tentokráte pro $x = t^2$

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x = t^2 \\ \mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{t}{1+t}2t\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{t^2}{1+t}\mathrm{d}t =$$
$$= 2\int_0^1 t - 1 + \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t = 2\Big[\frac{t^2}{2} - t + \ln|1+t|\Big]_0^1 = 2(\tfrac{1}{2} - 1 + \ln(2)) = -1 + \ln(2).$$

7. *Vypočtěte obsah části roviny ohraničené křivkami $xy = 4, x + y = 5$.*
Řešení: Najdeme x-ové souřadnice průsečíků daných křivek tak, že vyjádříme y z druhé rovnice a dosadíme do první: $x^2 - 5x = 4$. Z této kvadratické rovnice dostaneme kořeny $x_1 = 1$ a $x_2 = 4$. Neboť na intervalu $[1, 4]$ je funkce $5 - x$ větší nebo rovna funkci $4/x$, obsah je tedy roven

$$S = \int_1^4 5 - x - \frac{4}{x}\mathrm{d}x = \Big[5x - \frac{x^2}{2} - 4\ln(x)\Big]_1^4 = 20 - 8 - 4\ln(4) - 5 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{15}{2} - 8\ln(2).$$

Cvičení

11. Uveďte příklad ohraničené funkce f, která není integrovatelná na $[a, b]$ ale $|f|$ je integrovatelná na $[a, b]$.

12. Uveďte příklad ohraničených funkcí $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ takových, že f, g nejsou integrovatelné na $[a, b]$, ale

a) $f + g$ je integrovatelná na $[a, b]$; b) fg je integrovatelná na $[a, b]$.

13. Ukažte, přímo z definice Riemannova integrálu, že funkce $f(x) = x$ je integrovatelná na $[-1, 1]$ a vypočtěte $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ bez použití Newton-Leibnitzovy formule.

14. Spočtěte integrály:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int_0^1 x^2 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$; c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$;

d) $\displaystyle\int_1^2 \ln(x)\mathrm{d}x$; e) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} x^2 \operatorname{arccotan}(x)\mathrm{d}x$; f) $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos(x)\mathrm{d}x$;

g) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2(x)}{\cos^6(x)}\mathrm{d}x$; h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+x^3}}$; i) $\displaystyle\int_0^1 x \arctan(\sqrt{x})\mathrm{d}x$.

j) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1-\sin(x)}{1+\cos(x)}\mathrm{d}x$; k) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1-2x}{x^6+1}\mathrm{d}x$; l) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x+2}\mathrm{d}x$;

m) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2x+2)^2}$; n) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2x-2)^2}$; o) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+3\cos^2(x)}$;

p) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$; q) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(4-x^2)^{3/2}}$; [10] r) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^4(x)\cos^2(x)\mathrm{d}x$;

s) $\displaystyle\int_{-1/4}^{5/4} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{1}{2}+x-x^2}}$; t) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}\mathrm{d}x$.

15. Nalezněte plochu oblasti ohraničené:

a) křivkami $x = y^2$, $x = y^3$;

b) křivkou $y = x^2 - 7$, osou x a přímkami $x = 2$, $x = 4$;

c) smyčkou křivky $y^2 = x^2(4 - x)$

d) elipsou se středem v počátku a poloosami a, b;

e) křivkami $y = x^2/2$, $y = 2x^2$, $xy = 1$, $xy = 4$;

f) křivkou $x^2 + y^2 = 2x + 3$ a tečnami v jejích průsečících s osou y;

g) křivkou $\varrho = 2a\cos(\varphi)$;

h) křivkami $y^2 = x + 4$, $x - 2y + 1 = 0$;

i) přímkami o rovnicích $2x - y = 0$, $4y - x = 0$, $x + y - 2 = 0$, $x + y = 4$.

16. Uvažujme oblast, ležící v prvním kvadrantu, ohraničenou křivkami $x = y^2$, $x = y^4$. Nalezněte objem tělesa, vzniklého rotací této oblasti kolem osy y.

17. Vypočtěte objem anuloidu vzniklého rotací kružnice $x^2 + (y - 2)^2 = 1$ kolem osy x.

18. Vypočtěte objem anuloidu vzniklého rotací kružnice $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ kolem osy y.

19. Vypočtěte následující nevlastní integrály, případně integrály, které po substituci vedou na nevlastní integrály

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)\mathrm{d}x,\ a > 0$; c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)\mathrm{d}x,\ a > 0$;

d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$; e) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{x^4+1}\mathrm{d}x$; f) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\mathrm{d}x$;

g) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x^3}{x^4+1}\mathrm{d}x$; h) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$; i) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{x^3+1}\mathrm{d}x$;

[10] Použijte substituci $t = (2 - x)/(2 + x)$.

j) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$; k) $\displaystyle\int_1^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$; l) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$;

m) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$; n) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$; o) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$;

p) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$; q) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}}$; r) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}}$;

s) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}$; t) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}$.

20. Odvoďte vzorec pro objem koule

a) v kartezských souřadnicích; b) v parametrických souřadnicích.

21. Odvoďte vzorec pro objem

a) kužele; b) válce; c) kulové vrstvy.

22. Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací oblasti ohraničené

a) křivkami $y = x^2$, $x = y$ b) parabolou $x = y^2 + 2$ a přímkou $x = y + 8$

kolem osy y.

23. Vypočtěte objem kulové úseče, je-li poloměr koule r a výška úseče v.

Výsledky

1. a) $\sin(2x)/4 - x\cos(2x)/2$; **b)** $-xe^{-x} - e^{-x}$; **c)** $x3^x/\ln(3) - 3^x/\ln^2(3)$; **d)** $x^{n+1}\ln(x)/(n+1) - x^{n+1}/(n+1)^2$; **e)** $x^2\arctan(x)/2 + \arctan(x)/2 - x/2$; **f)** $x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$; **g)** $(1+x)\arctan(\sqrt{x}) - \sqrt{x}$; **h)** $2\sqrt{x+1}\arcsin(x) - 4\sqrt{1-x}$; **i)** $x\tan(x) - x^2/2 - \ln(1+\tan^2(x))/2$; **j)** $x^2/4 + x\sin(2x)/4 + \cos(2x)/8$; **k)** $x\ln(x^2+1) - 2x + 2\arctan(x)$; **l)** $\arctan(x)/2 - x/(2+2x^2)$; **m)** $e^x(\sin x - \cos x)/2$; **n)** $x(\sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x)))/2$; **o)** $x + 2 - 4/(x+2) - 4\ln(x+2)$.

2. a) $2(1+\sqrt{1+x}) - 2\ln(1+\sqrt{1+x})$; **b)** $2\sqrt{(x-1)^7}/7 + 6\sqrt{(x-1)^5}/5 + 2\sqrt{(x-1)^3} + 2\sqrt{x-1}$; **c)** $-4/(x-2) - 11/(2(x-2)^2)$; **d)** $\ln((\sqrt{x+1}-1)/(\sqrt{x+1}+1))$; **e)** $3(\sqrt[3]{x+1}+1) - 3\ln(|\sqrt[3]{x+1}+1|)$; **f)** $x + 6\sqrt[6]{x^5}/5 + 3\sqrt[3]{x^2}/2 + 2\sqrt{x} + 3\sqrt{x} + 6\sqrt[6]{x} + \ln(|\sqrt[6]{x}-1|)$; **h)** $2\sqrt{1+\ln(x)} - 2\ln((\sqrt{1+\ln(x)} - 1)/(\sqrt{1+\ln(x)}+1)$; **j)** $a^2\arcsin(x/a)/2 - a^2\sin(a\arcsin(x/a))/2$; **k)** $\ln((\sqrt{1+x^2}-1)/(\sqrt{1+x^2}+1))/2$; **o)** $2\sqrt{(1+\cos^2(x))^3} - 4\sqrt{(1+\cos^2(x))^5}/5$.

3. a) $\ln((x+1)/\sqrt{2x+1})$; **b)** $x + 16\ln(|x-2|)/5 - \ln(|x+\frac{1}{2}|)/5$; **c)** $x/4 - 9\ln(2x+1)/16 - 7\ln(2x-1)/16 + \ln(x)$; **d)** $\ln(|x+1|) + 4/(x+2)$; **e)** $x + 2\ln(x-1) - \ln(x) + 1/x$; **f)** $x^2/2 + 2x + 31\ln(x-1)/8 - 1/(4(x-1)^2) - 9/(4(x-1))$; **g)** $3/2x + 20\ln(x-3) - 5\ln(x)/4 - 47\ln(x-2)/4$; **h)** $\ln(x+1)/3 - \ln(x^2-x+1)/6 + \sqrt{3}\arctan(\sqrt{3}(2x-1)/3)/3$; **i)** $(x+1)/(4(x^2+2x+2)) - 5(x+1)/(8(x^2+2x+2)) + 3\arctan(x+1)/8$; **j)** $-\ln(1+x^2)/18 + 7\ln(4+x^2)/288 + \ln(x)/16 - 1/(24(4+x^2))$; **k)** $x/(6(1+x^2)^3) + 5x/(24(1+x^2)^2) + 5x/(16(1+x^2)) + 5\arctan(x)/16$; **l)** $x^2/2 + 1/(16(x+1)) + 3\ln(x-1)/8 + 3\ln(x+1)/8 - 1/(16(x-1)) - 1/(8(1+x^2)) - 3\ln(1+x^2)/8$.

4. a) $\cos^5(x)/5 - \cos^3(x)/3$; **b)** $\ln|\tan(x)| - 1/(2\sin^2(x))$; **c)** $\tan(x)\sin^4(x) - 3x/2 + \sin(2x)/4$; **d)** $-1/(3(1-\cos^3(x)))$; **e)** $\tan(x)/(2+2\tan^2(x)) - \ln(\tan(x)-1)/4 + \ln(\tan(x)+1)/4$; **f)** $\ln|(2\arctan(x) - 1 + \sqrt{2})/(2\arctan(x) - 1 - \sqrt{2})|$; **g)** $\ln|\sin(x)/\sqrt{1-2\sin^2(x)}|$; **h)** $x/2 + \ln(1+\tan(x))/2 - \ln(1+\tan^2(x))/4$; **i)** $\sqrt{2}(\arctan(\sqrt{2}\tan(x)))/2$; **j)** $3\ln(1+\tan^2(x))/50 - 3\ln(\tan(x)+2)/25 + 2/(5\tan(x)+10) + 4x/25$; **k)** $-1/(\tan(x/2)-2)$; **l)** $-1/(2\tan(x)) - \sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}\tan(x)/2)/4$; **m)** $2\sqrt{\tan(x)}$; **n)** $\ln(\tan(x)-1)/3 - \ln(\tan^2(x)+\tan(x)+1)/6 - \sqrt{3}\arctan(2\sqrt{3}\tan(x)+\sqrt{3})/3$.

5. a) $\sqrt{2}\arctan(\sqrt{x^2+4x-4}/\sqrt{2})/2$; **b)** $\ln|(\sqrt{1+2/x}-1)/(\sqrt{1+2/x}+1)|-\sqrt{1+2/x}$; **c)** $-\sqrt{2}\operatorname{arctanh}(\sqrt{2}(4+x)/(4\sqrt{2+x-x^2}))/2$; **d)** $(1+x/2)\sqrt{1-4x-x^2}+5\arcsin(\sqrt{5}(2+x)/5)/2$; **e)** $x+\ln(x-1)+\sqrt{x^2-x+1}+\operatorname{arcsinh}(2\sqrt{3}(x-1/2))/2-\operatorname{arctanh}((x+1)/(2\sqrt{x^2-x+1}))$; **f)** $14\arcsin(x/2+1/2)+19\sqrt{3-2x-x^2}/2-3x\sqrt{3-2x-x^2}/2$; **g)** $\operatorname{arcsinh}(x)+x\sqrt{1+x^2}-\ln(x)-\sqrt{(1+x^2)^3}/x$; **h)** $\sqrt{2x^2-2x+1}/x$; **i)** $\operatorname{arcsinh}(x)-\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}x/(2\sqrt{1+x^2}))/2$.

10. Ano, například je-li jedna z nich nulová.

11. $f(x)=1$, je-li x racionální, $f(x)=-1$, je-li x iracionální.

12. a) $f=\varrho, g=-\varrho$; **b)** $f=\varrho, g=1-\varrho$.

13. 0.

14. a) $4(1-\ln(2))/3$; **b)** $\mathrm{e}-2$; **c)** $\pi\sqrt{3}/3$; **d)** $2\ln(2)-1$; **e)** ??; **f)** $-(\mathrm{e}^{\pi}+1)/2$; **g)** $\frac{8}{15}$; **h)** ??; **i)** ??; **j)** $1-\ln(2)$; **k)** $\ln(2+\sqrt{3})/\sqrt{3}$; **l)** $\pi(1-1/\sqrt{3})-1$; **m)** $\pi/8+\frac{1}{4}$; **n)** $\frac{1}{12}+\ln(2+\sqrt{3})/12\sqrt{3}$; **o)** $\pi/2$; **p)** $\ln(1+\sqrt{2})/2\sqrt{2}+\pi/4\sqrt{2}$; **q)** $1/4\sqrt{3}$; **r)** $\frac{4}{3}$; **s)** $2\pi/3$; **t)** $1/\sqrt{2}-1/\sqrt{5}$.

15. a) $\frac{1}{12}$; **b)** $\frac{230}{3}$; **d)** πab;

19. a) 1; **b)** $a/(a^2+b^2)$; **c)** $b/(a^2+b^2)$; **d)** $\pi/2\sqrt{2}$; **e)** $\pi/4$; **f)** $\pi/2\sqrt{2}$; **g)** diverguje; **h)** $2\pi\sqrt{3}/3$; **i)** $2\pi\sqrt{3}/3$; **j)** diverguje; **k)** π; **l)** diverguje; **m)** $2\pi/\sqrt{3}$; **n)** diverguje; **o)** $\pi/2$; **p)** diverguje; **q)** neexistuje; **r)** $\frac{3}{4}$; **s)** $\ln(1+\sqrt{2})$; **t)** diverguje.

Rejstřík