Matematická analýza II
přednášky M. Málka
cvičení A. Hakové a R. Otáhalové
Semestr letní 2005

8. Integrální počet v $\mathbb{R}$

8.1 Riemannův intergrál. V celé této kapitole budeme uvažovat interval $[a, b]$ a funkci $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takovou, že $[a, b] \subset X$ a f je na $[a, b]$ omezená.

Dělením intervalu $[a, b]$ rozumíme libovolnou uspořádanou $(n+1)$-tici $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ reálných čísel takovou, že $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Číslo

$$|\Delta| = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1 \dots, x_n - x_{n-1}\} \tag{8.1.1}$$

nazýváme *norma dělení* Δ. Dělení $\Delta' = (y_0, y_1, \dots, y_m)$ je *zjemnění* dělení $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ jestliže pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ existuje $j \in \{1, \dots, m\}$ takové, že $x_i = y_j$.[1] Pod pojmem *společné zjemnění* dělení Δ' a Δ'' myslíme dělení obsahující právě ty body, které patří do dělení Δ' nebo do dělení Δ''.

Množinu všech dělení intervalu $[a, b]$ budeme označovat $D[a, b]$. Nechť $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ je dělení intervalu $[a, b]$. Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ klademe[2]

$$m_i(f, \Delta) = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x),$$
$$M_i(f, \Delta) = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x),$$

(supremum i infimum vždy existují a leží v $\mathbb{R}$, neboť f je na $[a, b]$ omezená). Dále klademe

$$s(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}),$$
$$S(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}).$$

Číslo $s(f, \Delta)$ nazýváme *dolní integrální součet funkce* f *vzhledem k dělení* Δ. Podobně číslo $S(f, \Delta)$ nazýváme *horní integrální součet funkce* f *vzhledem k dělení* Δ.

Konečně klademe

$$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \sup_{\Delta \in D[a,b]} s(f, \Delta) \tag{8.1.2}$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \inf_{\Delta \in D[a,b]} S(f, \Delta) \tag{8.1.3}$$

(supremum i infimum vždy existuje (jedná se o neprázdné množiny) a leží v $\mathbb{R}$, neboť je f na $[a, b]$ omezená leží v $\mathbb{R}$). Číslo $\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$ nazýváme *dolní integrál funkce* f *na intervalu* $[a, b]$, číslo $\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$ nazýváme *horní integrál funkce* f *na intervalu* $[a, b]$.

Funkce f se nazývá *integrovatelná na intervalu* $[a, b]$, je-li splněna podmínka

[1] Dělení D' obsahuje všechny body dělení D. Evidentně musí být $m \geq n$.

[2] Co máme na mysli, napíšeme-li $\sum_{i=1}^{n} x_i$, jsme zatím nevysvětlili, spoléháme na tebe čtenáři.

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f\mathrm{d}x. \tag{8.1.4}$$

Číslo $\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f\mathrm{d}x$ se označuje symbolem $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ a nazývá *(Riemannův) integrál funkce f na intervalu* $[a,b]$. Dále klademe $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ a $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$.

Uvažujme konstantní funkci $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, tedy $f(x) = c$, pro všechna $x \in [a,b]$; ukážeme, že funkce f je integrovatelná na $[a,b]$ a $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = c(b-a)$. Je-li $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ libovolné dělení intervalu $[a,b]$, pak protože je f konstantní, máme $M_i(f,\Delta) = m_i(f,\Delta) = c$ pro každé $i = 1,\dots,n$. Následně

$$S(f,\Delta) = s(f,\Delta) = c\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = c(b-a).$$

Jelikož toto platí pro každé dělení $\Delta \in D[a,b]$, dostáváme, že $\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = c(b-a)$. To znamená, že je f integrovatelná na $[a,b]$ a platí

$$\int_a^b c\mathrm{d}x = c(b-a). \tag{8.1.5}$$

Uvažujme Dirichletovu funkci ϱ.[3)] Je-li $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ dělení intervalu $[a,b]$, pak pro každé $i = 1,\dots,n$ je $M_i(\varrho,\Delta) = 1$ (interval (x_i, x_{i-1}) obsahuje racionální číslo) a $m_i(\varrho,\Delta) = 0$ (proč?). To znamená, že

$$S(\varrho,\Delta) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = b-a \quad \text{a} \quad s(\varrho,\Delta) = 0. \tag{8.1.6}$$

Rovnice (8.1.6) platí pro každé dělení $\Delta \in D[a,b]$, platí

$$\overline{\int_a^b} \varrho(x)\mathrm{d}x = b-a \quad \text{a} \quad \underline{\int_a^b} \varrho(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Tedy ϱ není na $[a,b]$ integrovatelná.

Lemma 8.1. *Je-li Δ' zjemněním dělení Δ, potom $s(f,\Delta) \le s(f,\Delta')$ a $S(f,\Delta) \ge S(f,\Delta')$.*
D ů k a z. Nechť $\Delta' = (y_0, y_1, \dots, y_m)$ je zjemněním $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_n)$. Zvolme $i \in \{1,\dots,n\}$, jelikož Δ' je zjemněním Δ, existují $k, l \in \{1,\dots m\}$, $k < l$ takové, že $(x_{i-1}, x_i) = (y_k, y_l)$. Je-li $l = k+1$, potom $m_i(f,\Delta) = \inf_{x\in[y_k,y_l]} f(x)$ a $M_i(f,\Delta) = \sup_{x\in[y_k,y_l]} f(x)$. Ovšem je-li $l > k+1$, pak

$$m_i(f,\Delta) \le m_{k+1}(f,\Delta'), \quad m_i(f,\Delta) \le m_{k+2}(f,\Delta'), \quad \dots, \quad m_i(f,\Delta) \le m_l(f,\Delta')$$

a

$$M_i(f,\Delta) \ge M_{k+1}(f,\Delta'), \quad M_i(f,\Delta) \ge M_{k+2}(f,\Delta'), \quad \dots, \quad M_i(f,\Delta) \ge M_l(f,\Delta').$$

Odtud dostáváme

$$m_i(f,\Delta)(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{j=k+1}^{l} m_j(f,\Delta')(y_{j-1} - y_j)$$

a

$$M_i(f,\Delta)(x_i - x_{i-1}) \ge \sum_{j=k+1}^{l} M_j(f,\Delta')(y_{j-1} - y_j).$$

Z posledních rovnic dostáváme

[3)]Zopakujme si, že $\varrho(x) = 1$, je-li x racionální a $\varrho(x) = 0$, je-li x iracionální.

$$s(f,\Delta)=\sum_{i=1}^{n} m_i(f,\Delta)(x_i-x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{m} m_i(f,\Delta')(y_i-y_{i-1}) = s(f,\Delta')$$

a

$$S(f,\Delta)=\sum_{i=1}^{n} M_i(f,\Delta)(x_i-x_{i-1}) \ge \sum_{i=1}^{m} M_i(f,\Delta')(y_i-y_{i-1}) = S(f,\Delta').$$

Lemma 8.2. *Nechť f je omezená na intervalu $[a,b]$, pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že je-li Δ dělení $[a,b]$ s $|\Delta| < \delta$ potom*

$$S(f,\Delta) - \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x < \varepsilon, \tag{8.1.7}$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x - s(f,\Delta) < \varepsilon. \tag{8.1.8}$$

D ů k a z. Provedeme pouze důkaz vztahu (8.1.7), důkaz vztahu (8.1.8) je obdobný.

Zvolme $\varepsilon > 0$, k tomuto číslu existuje dělení $\Delta' = (y_0, y_1, \dots, y_p)$ intervalu $[a,b]$ takové, že

$$S(f,\Delta') - \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8.1.9}$$

Neboť f je omezená existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že $|f(x)| \le K$ pro každé $x \in [a,b]$. Položme $\delta = \varepsilon/4Kp$.

Nyní ukážeme, že je-li $\Delta(x_0, x_1, \dots, x_n)$ dělení $[a,b]$ s $|\Delta| < \delta$, potom $S(f,\Delta') - S(f,\Delta) < \varepsilon/2$. Toto spolu s rovnicí (8.1.9) dokáže (8.1.7).

Nechť $\Delta'' = (z_0, z_1, \dots, z_m)$ je společné zjemnění dělení Δ' a Δ, podle Lemma 8.1 platí

$$S(f,\Delta'') \le S(f,\Delta') \quad \text{a} \quad s(f,\Delta'') \ge s(f,\Delta'). \tag{8.1.10}$$

Počítejme rozdíl $S(f,\Delta) - S(f,\Delta'')$. Je-li $(x_i, x_{i-1}) = (z_k, z_{k-1})$ interval neobsahující žádný z z_j, potom $M_i(f,\Delta)(x_i - x_{i-1}) = M_k(f,\Delta'')(z_k - z_{k-1})$. Rozdíl $S(f,\Delta) - S(f,\Delta'')$ tedy stačí počítat pouze na intervalech $(x_i, x_{i-1}) = (z_s, z_r)$, kde $s - r > 1$. V tomto případě platí

$$\left|\sum_{k=r+1}^{s} M_k(f,\Delta'')(z_{k-1}-z_k)\right| \le K \sum_{k=r+1}^{s} (z_{k-1}-z_k) = K(z_r - z_s) = K(x_i - x_{i-1}) < K\delta.$$

Protože každý takový interval obsahuje některý bod x_i, jejich počet je nanejvýš p. Dostáváme

$$|S(f,\Delta) - S(f,\Delta'')| < p2K\delta = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Jelikož Δ'' je zjemněním Δ je absolutní hodnota v předchozí rovnici zbytečná. Spolu s (8.1.10) dostáváme

$$S(f,\Delta) - S(f,\Delta') < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8.1.11}$$

Nakonec, (8.1.11) a (8.1.9) dává

$$S(f,\Delta) - \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = S(f,\Delta) - S(f,\Delta') + S(f,\Delta') - \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Věta 8.3. *Nechť f je omezená na $[a,b]$.*
1. Je-li f integrovatelná na $[a,b]$, pak pro každou posloupnost (Δ_n) dělení intervalu $[a,b]$ s $\lim |\Delta_n| = 0$ platí

$$\lim_{n\to\infty} s(f,\Delta_n) = \lim_{n\to\infty} S(f,\Delta_n) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{8.1.12}$$

2. Existuje-li posloupnost (Δ_n)*,* $\Delta_n \in D[a,b]$ *s* $\lim |\Delta_n| = 0$ *a* $\lim_{n\to\infty} s(f,\Delta_n) = \lim_{n\to\infty} S(f,\Delta_n)$*, pak je* f *integrovatelná na* $[a,b]$ *a platí (8.1.12).*

D ů k a z. 1. Nechť integrál $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ existuje, dokážeme rovnost (8.1.12) pro limitu horních součtů. Zvolme $\varepsilon > 0$, podle Lemma 8.2 existuje $\delta > 0$ takové, že

$$S(f,\Delta) - \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = S(f,\Delta) - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x < \varepsilon, \tag{8.1.13}$$

pro Δ s $|\Delta| < \delta$. Jelikož $\lim_{n\to\infty} |\Delta_n| = 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n > n_0$ je $|\Delta_n| < \delta$; to znamená že pro ně platí (8.1.13).

Bod 2. plyne z toho, že $\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$ a z toho že podle Lemmatu 8.2 musí být $\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x < \varepsilon$, pro každé $\varepsilon > 0$.

Příklad 8.4. Nechť $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je funkce taková, že $f(x) = 0$ pro všechna $x \in [a,b]$ až na $x \in \{c_1, c_2, \dots c_k\}$, ukážeme, že $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$.

Uvažujme posloupnost dělení (Δ_n) takovou, že $|\Delta_n| < 1/2kMn$, kde $M = \max\{|f(c_1)|, |f(c_2)|, \dots, |f(c_k)|\}$. Obsahuje-li interval $[x_{i-1}, x_i]$ některý z bodů c_j, platí $0 < M_i(f,\Delta_n) \leq M$, a $-M \leq m_i(f,\Delta_n) < 0$; jinak $M_i(f,\Delta) = 0$ a $m_i(f,\Delta_n) = 0$. Protože každé z čísel c_j může náležet nanejvýše dvěma intervalům ze systému $\{[x_{i-1}, x_i] \mid i = 1,\dots,n\}$, máme

$$S(f,\Delta_n) \leq 2kM|\Delta_n| < 1/n \quad \text{a} \quad s(f,\Delta_n) \geq -2kM|\Delta_n| > -1/n.$$

Limity $\lim S(f,\Delta_n)$, $\lim s(f,\Delta_n)$ existují, rovnají se a podle věty 8.3 je f integrovatelná a platí

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \pm\frac{1}{n} = 0.$$

Uvažujme funkci $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ na intervalu $[0,1]$, dále mějme posloupnost dělení (Δ_n), $\Delta_n = (0, 1/n, 2/n, \dots, n/n = 1)$. Jelikož $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ je na intervalu $[i/n, (i+1)/n]$ rostoucí, platí $M_i(\mathrm{id}_{\mathbb{R}},\Delta_n) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}((i+1)/n) = (i+1)/n$ a $m_i(\mathrm{id}_{\mathbb{R}},\Delta_n) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}(i/n) = i/n$. Proto

$$S(\mathrm{id}_{\mathbb{R}},\Delta_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{n}\frac{1}{n} = \frac{1+n}{2n}, \qquad \text{(ověřte!)}$$

$$s(\mathrm{id}_{\mathbb{R}},\Delta_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}\frac{1}{n} = \frac{n-1}{2n}. \qquad \text{(ověřte!)}$$

Pro funkci $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ a posloupnost dělení (Δ_n) jsou splněny předpoklady věty 8.3 (speciálně, $\lim S(f,\Delta_n) = \lim s(f,\Delta_n) = \frac{1}{2}$) a proto

$$\int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

Věta 8.5. *Je-li* f *spojitá na* $[a,b]$*, pak je* f *na* $[a,b]$ *integrovatelná.*

D ů k a z. Využijeme toho, že spojitá funkce je na uzavřeném intervalu stejnoměrně spojitá.[4)]

Uvažujme posloupnost dělení (Δ_n) intervalu $[a,b]$ takovou, že $\lim_{n\to\infty} |\Delta_n| = 0$. Ukážeme, že pro

[4)]Funkce $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *stejnoměrně spojitá na* $Y \subset X$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x, y \in Y$ takové že $|x-y| < \delta$ je $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > n_0$ je $|S(f, \Delta_n) - s(f, \Delta_n)| < \varepsilon$. To je postačující pro existenci integrálu $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (proč?).

Nechť $\varepsilon > 0$, ze stejnoměrné spojitosti plyne existence $\delta > 0$ takového, že pro libovolné $x, y \in [a, b]$ pro které je $|x - y| < \delta$, platí $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/(b - a)$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n > n_0$ je $|\Delta_n| < \delta$ (to lze udělat, protože $\lim_{n\to\infty} |\Delta_n| = 0$). Nyní je-li $[x_{i-1}, x_i]$ interval dělení Δn, pro každé $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$ platí $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/(b - a)$. Proto

$$M_i(f, \Delta_n) - m_i(f, \Delta_n) < \frac{\varepsilon}{b-a}. \qquad \text{(ověřte!)} \tag{8.1.14}$$

Odtud dostáváme

$$\begin{aligned} S(f, \Delta_n) - s(f, \Delta_n) &= \sum_{i=1}^{m} M_i(f, \Delta_n)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{m} m_i(f, \Delta_n)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{m} (M_i(f, \Delta_n) - m_i(f, \Delta_n))(x_i - x_{i-1}) \\ &< \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{m} (x_i - x_{i-1}) \qquad \text{(podle (8.1.14))} \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a}(b - a) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Nyní použijeme větu 8.3 a důkaz je ukončen.

Věta 8.6. *Buďte $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ omezené a budiž $c \in \mathbb{R}$, existují-li integrály $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ a $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$, pak existují integrály $\int_a^b (f + g)(x)\mathrm{d}x$, $\int_a^b (cf)(x)\mathrm{d}x$ a platí*
1. $\int_a^b (f + g)(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$;
2. $\int_a^b (cf)(x)\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.
Důkaz. 1. Jelikož supremum součtu funkcí na množině je rovno součtu suprem funkcí na téže množině (ověřte!), pro každé dělení Δ intervalu $[a, b]$ platí

$$s(f + g, \Delta) = s(f, \Delta) + s(g, \Delta) \quad \text{a} \quad S(f + g, \Delta) = S(f, \Delta) + S(g, \Delta). \tag{8.1.15}$$

Nechť (Δ_n) je posloupnost dělení intervalu $[a, b]$ taková, že $\lim_{n\to\infty} |\Delta_n| = 0$. Jelikož limity $\lim_{n\to\infty} s(f, \Delta_n)$, $\lim_{n\to\infty} S(f, \Delta_n)$, (respektive $\lim_{n\to\infty} s(g, \Delta_n)$ a $\lim_{n\to\infty} s(g, \Delta_n)$) existují a rovnají se integrálu $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (respektive $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$), existují i následující limity a podle (8.1.15) platí rovnosti

$$\lim_{n\to\infty} s(f + g, \Delta_n) = \lim_{n\to\infty} s(f, \Delta_n) + \lim_{n\to\infty} s(g, \Delta_n) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$
$$\lim_{n\to\infty} S(f + g, \Delta_n) = \lim_{n\to\infty} S(f, \Delta_n) + \lim_{n\to\infty} S(g, \Delta_n) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Nyní již můžeme aplikovat větu 8.3.

Důkaz bodu 2. je ještě o poznání jednodušší a proto jej přenecháváme čtenáři.

Věta 8.7. *Nechť f je omezená funkce na $[a, b]$ a $c \in (a, b)$. Integrál $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ existuje, právě když existují integrály $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$, $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ a platí*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x. \qquad \textit{(aditivita)} \tag{8.1.16}$$

D ů k a z. Nechť (Δ_n^L) je posloupnost dělení intervalu $[a, c]$ a (Δ_n^P) posloupnost dělení intervalu $[c, b]$ takové, že $\lim_{n\to\infty} |\Delta_n^P| = \lim_{n\to\infty} |\Delta_n^L| = 0$. Definujme posloupnost dělení (Δ_n) intervalu $[a, b]$ takto: je-li $\Delta_n^L = (a = x_0, x_1, \ldots, x_k = c)$ a $\Delta_n^P = (c = y_0, y_1, \ldots, y_l = b)$, položme $\Delta = (a = x_0, x_1, \ldots, x_k = c, y_1, y_2, \ldots y_l = b)$. Navíc platí $\lim_{n\to\infty} |\Delta_n| = \lim_{n\to\infty} \max\{|\Delta_n^L|, |\Delta_n^P|\} = 0$ a

$$s(f, \Delta_n) = \sum_{i=1}^{k} m_i(f, \Delta_n^L)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{l} m_i(f, \Delta_n^P)(y_i - y_{i-1}) = s(f, \Delta_n^L) + s(f, \Delta_n^P),$$
$$S(f, \Delta_n) = \sum_{i=1}^{k} M_i(f, \Delta_n^L)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{l} M_i(f, \Delta_n^P)(y_i - y_{i-1}) = S(f, \Delta_n^L) + S(f, \Delta_n^P).$$

Použijeme věty o počítání s limitami a větu 8.3, pro $n \to \infty$ dostaneme (8.1.16).

Věta 8.8. *Buďte $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ takové, že $f(x) = g(x)$ pro $x \in [a, b] \setminus \{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$. Potom je-li g integrovatelná na $[a, b]$, je integrovatelná na $[a, b]$ i f a platí $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.*
D ů k a z. Položme $h = f - g$. Platí tedy, že $f = h + g$. Funkce h je rovna nule na celém $[a, b]$ vyjma bodů $c_1, c_2, \ldots, c_k$, podle příkladu 8.4 to znamená, že je integrovatelná a $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0$. Podle věty 8.6 integrál z f na $[a, b]$ existuje a platí $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b h(x)\mathrm{d}x \int_a^b +g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

8.2 Integrál jako funkce horní meze, primitivní funkce, neučitý integrál. Uvažujme funkci $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, funkce $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ nazveme *primitivní funkce k funkce f* jestliže platí $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in (a, b)$. Primitivní funkce není k funkci f určena jednoznačně, jejich vztah ukazuje následující věta.

Věta 8.9. *Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ spojitá a F, G dvě primitivní funkce k f, potom $F - G$ je konstantní.*
D ů k a z. Položme $H = F - G$, ukážeme, že $H(x) = H(y)$ pro každé $x, y \in [a, b]$, tím bude ukázáno, že $F - G$ je konstantní (proč?). Podle věty o střední hodnotě (věta 7.14) existuje $\xi \in (x, y)$, takové, že $H(y) - H(x) = H'(\xi)(y - x)$. Využijeme definici funkce H a toho, že F i G jsou primitivní k f a dostaneme $H(y) - H(x) = (F'(\xi) - G'(\xi))(y - x) = (f(\xi) - f(\xi))(y - x) = 0$. To znamená $H(x) = H(y)$.

Na tomto místě bychom rádi definovali neurčitý integrál z funkce jako k ní primitivní funkci, jenomže vzhledem k tomu, že k dané funkci existuje bezpočet primitivních funkcí, nebyl by definovaný pojem určen jednoznačně. Naštěstí podle věty 8.9 je-li f definována na intervalu liší se jedna primitivní funkce od druhé jen o konstantní funkci. To nám umožní následující.

Pod pojmem *neurčitý integrál funkce f na intervalu J* rozumíme množinu všech primitivních funkcí k f na J.[5)] Vzhledem k řečenému ji lze charakterizovat jen jedinou z nich. Neurčitý integrál z f značíme $\int f(x)\mathrm{d}x$, je-li F nějaká primitivní funkce k f na J, píšeme

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + c.$$

Symbol c zastupuje všechny možné konstantní funkce a říkáme mu *integrační konstanta*. Nebude-li to nezbytně nutné, nebudeme ji pro přehlednost, většinou psát. Čtenář by si její přítomnost měl i přesto uvědomovat.

Uvažujme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$, pro $x \neq 0$ a $f(x) = 1$, pro $x = 0$. Kdyby k této funkci existovala primitivní funkce F, musela by být konstantní na intervalech $(-\infty, 0)$ i $(0, \infty)$ (o tom se lze přesvědčit pomocí věty o střední hodnotě). Označme tyto konstanty a, b. Kdyby $a \neq b$, pak je $F'(0)$ nevlastní nebo neexistuje, ale $F'(0)$ má být rovno 1; v případě $a = b$ dostaneme $F'(0) = 0$, což je také špatně.

Věta 8.10. *Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá na (a, b) a $c \in (a, b)$ libovolný bod, potom $F(x) = \int_c^x f(t)\mathrm{d}t$ je primitivní funkce k f.*

[5)] Jde vlastně o třídu ekvivalence na množině funkcí vzhledem k ekvivalenci „rozdíl je konstantní funkce."

D ů k a z. Dokážeme, že pro každé $\varepsilon > 0$ a každý bod $x_0 \in (a, b)$ platí $f(x_0) - \varepsilon \leq F'(x_0) \leq f(x_0) + \varepsilon$, tím bude ukázáno, že $F'(x_0) = f(x_0)$. Provedeme výpočet pouze pro derivaci zprava.

Pro zvolené $h > 0$ a x_0 platí

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_c^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t - \int_c^{x_0} f(t)\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t. \tag{8.2.1}$$

Protože f je spojitá v x_0 ke zvolenému ε existuje $\delta > 0$ takové, že $f(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$. To znamená, že je-li $0 < h < \delta$ platí

$$f(x_0) - \varepsilon \leq f|_{[x_0-h, x_0+h]} \leq f(x_0) + \varepsilon \tag{8.2.2}$$

Snadno si jistě odvodíte, že je-li $g \leq f$ na $[a, b]$, potom $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$; odtud a z (8.2.2) dostáváme

$$(f(x_0) - \varepsilon)h \leq \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t \leq (f(x_0) + \varepsilon)h,$$

$$f(x_0) - \varepsilon \leq \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t \leq f(x_0) + \varepsilon,$$

$$f(x_0) - \varepsilon \leq F'(x_0) \leq f(x_0) + \varepsilon. \qquad \text{(podle (8.2.1) pro } h \to 0)$$

Věta 8.11. *Předpokládejme, že existují neurčité integrály z f a g na intervalu $[a, b]$ a nechť $c \in \mathbb{R}$, potom existují neurčité integrály $\int f(x) + g(x)\mathrm{d}x$ a $\int (cf)(x)\mathrm{d}x$ a platí*
1. $\int f(x) + g(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$.
2. $\int (cf)(x)\mathrm{d}x = c\int f(x)\mathrm{d}x$.
D ů k a z. Označme si F primitivní funkci k f a G primitivní funkci k g obě na intervalu (a, b). Podle věty 7.5 platí $(F + G)' = F' + G' = f + g$. To znamená, že $F + G$ je primitivní k $f + g$.

Opět podle věty 7.5 platí $(cF)' = cF' = cf$, tedy cF je primitivní funkce k cf.

Věta 8.12 (Per partes). *Nechť $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ jsou funkce, které mají v $[a, b]$ spojité derivace. Potom platí*

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x. \tag{8.2.3}$$

D ů k a z. Předně, všechny integrály v (8.2.3) existují podle věty 8.10; jedná se o spojité funkce.

Platí $(uv)' = u'v + uv'$, primitivní funkce k funkci $(uv)'$ je uv, proto $uv(x) = \int u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\mathrm{d}x = \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x + \int u(x)v'(x)\mathrm{d}x$ (podle věty 8.11). Odtud již (8.2.3) přímo plyne.

Příklady

Věta 8.13 (Substituční metoda I. druhu). *Buď f spojitá v (a, b), nechť $\varphi : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ má derivaci v (α, β), potom je-li F primitivní funkce k f, na intervalu (a, b) platí*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = F(\varphi(t)). \tag{8.2.4}$$

D ů k a z. Máme ukázat, že na intervalu (α, β) je $F \circ \varphi$ primitivní k $(f \circ \varphi)\varphi'$. To ale plyne z toho, že pro $t \in (\alpha, \beta)$ platí $(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

Příklady

Předchozí věta slouží k výpočtu integrálu z funkce ve tvaru $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, známe-li integrál z $f(x)$. Někdy může být ale výhodné vypočítat integrál z $f(x)$ pomocí integrálu z $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ pro nějakou vhodně zvolenou funkci φ. Za jakých podmínek je to možné, nám říká následující věta.

Věta 8.14 (Substituční metoda II. druhu). *Nechť $\varphi : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ je surjekce a φ' existuje na (α, β), nechť $\psi : (a, b) \to (\alpha, \beta)$ je zobrazení, pro které $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{(a,b)}$.*[6] *Potom, je-li f spojitá, platí*

$$\int f(x)\mathrm{d}x = G(\psi(x)), \quad \textit{kde } G(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t. \tag{8.2.5}$$

D ů k a z. Označme F primitivní funkci k f na (a, b), máme dokázat, že $F(x) = G(\psi(x)) + c$. Platí $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$ pro $t \in (\alpha, \beta)$, to podle věty 8.9 znamená, že na intervalu (α, β) platí $G(t) = F(\varphi(t)) + c$. Ke každému $x \in (a, b)$ existuje $t \in (\alpha, \beta)$ tak, že $\psi(x) = t$, proto na (a, b) platí $G(\psi(x)) = F(\varphi(\psi(x))) + c = F(x) + c$.

Příklady

Věta 8.15 (Newton-Leibnitzova formule). *Buď $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ omezená, F primitivní funkce k f. Předpokládejme, že existuje $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, potom*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a). \qquad \textit{(Newton-Leibnitzova formule)} \tag{8.2.6}$$

D ů k a z. Je-li $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_m)$ libovolné dělení intervalu $[a, b]$, pak podle věty o střední hodnotě pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$ existuje $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ takové, že

$$F'(\xi_i) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}.$$

Jelikož F je primitivní funkce k f dostaneme

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

To znamená, že pro každé dělení Δ platí

$$\begin{aligned} s(f, \Delta) &= \sum_{i=1}^m m_i(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^m f'(\xi)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^m F(x_i) - F(x_{i-1}) = \\ &= F(b) - F(a) \le \sum_{i=1}^m M_i(x_i - x_{i-1}) = S(f, \Delta) \end{aligned} \tag{8.2.7}$$

Nechť (Δ_n) je posloupnost dělení intervalu $[a, b]$ taková, že $\lim |\Delta_n| = 0$. Pro každé dělení Δ_n platí (8.2.7). Nyní využijeme větu o třech limitách a dostaneme

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} s(f, \Delta_n) \le F(b) - F(a) \le \lim_{n\to\infty} S(f, \Delta_n) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Důsledek 8.16 (Newton-Leibnitzova formule pro per partes). *Nechť $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ jsou funkce, které mají v $[a, b]$ spojité derivace. Potom existuje integrál $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ a platí*[7]

$$\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x \tag{8.2.8}$$

D ů k a z. Integrály $\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$ a $\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x$ existují podle věty 8.5, zbývá tedy pouze dokázat

[6] Funkci ψ říkáme *pravá inverze*. Snadno se přesvědčíte, že každá surjekce má pravou inverzi.

[7] Často se setkáte se setkáte se zápisem $\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x$

vztah (8.2.8). Označme si $f(x) = u'(x)v(x)$, podle věty 8.12 je $F(x) = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\mathrm{d}x$ primitivní funkce k f. Nyní využijeme Newton-Leibnitzovy formule a dostaneme (8.2.8).

Důsledek 8.17 (Newton-Leibnitzova formule pro substituci). *Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \to [A, B]$ má v $[\alpha, \beta]$ spojitou derivaci a f nechť je spojitá v $[A, B]$, potom integrály v (8.2.9) existují a*

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\mathrm{d}x \tag{8.2.9}$$

D ů k a z. Funkce f a $(f \circ \varphi)\varphi'$ jsou spojité a integrály v (8.2.9) tedy existují podle věty 8.5. Jde tedy jen o dokázání rovnosti (8.2.9). Podle věty 8.14 (její předpoklady jsou splněny (ověřte!)) je $F \circ \varphi$ primitivní k $(f \circ \varphi)\varphi'$ na $[\alpha, \beta]$, F jsme si dovolili označit primitivní funkci f f na $[A, B]$ (ta dozajista existuje podle věty 8.10). Podle věty 8.15 je $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = (F \circ \varphi)(\beta) - (F \circ \varphi)(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$. Podle téže věty pravá strana rovnice má tvar $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\mathrm{d}x = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$.

Ještě více příkladů

8.3 Nevlastní Riemannův integrál. V tomto odstavci se pokusíme rozšířit pojem určitého integrálu i na funkce, které nejsou na intervalu $[a, b]$ (případně (a, b)) omezené a také o integrál na nevlastním intervalu.

Nejprve rozšíříme pojem určitého integrálu z funkce f na intervalu $[a, b)$ (případně $(a, b]$). Nechť $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ (případně $f : (a, b] \to \mathbb{R}$), ne nutně omezená, připouštíme také případ $b = \infty$ (případně $a = -\infty$) taková, že $\int_a^y f(x)\mathrm{d}x$ (případně $\int_y^b f(x)\mathrm{d}x$) existuje pro každé $y \in (a, b)$.[8)] Existuje-li vlastní limita

$$\lim_{y \to b+} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad \left(\text{případně } \lim_{y \to a-} \int_y^b f(x)\mathrm{d}x\right), \tag{8.3.1}$$

nazveme tuto limitu *nevlastní integrál z f na* $[a, b)$ (případně $(a, b]$) a značíme jej $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Je-li limita v (8.3.1) nevlastní, říkáme, že integrál $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ diverguje.

Zkusme, pomocí předchozí definice vypočítat

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 1}.$$

Pro každé $y \in [0, \infty)$ platí

$$\int_0^y \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 1} = \Big[\arctan(x)\Big]_0^y = \arctan(y) - \arctan(0) = \arctan(y).$$

Tedy, podle předchozí definice je

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 1} = \lim_{y \to \infty} \arctan(y) = \frac{\pi}{2}.$$

Nyní nechť $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ je funkce (ne nutně omezená), která má Reimannův integrál $\int_c^d f(x)\mathrm{d}x$ pro každý interval $[c, d] \subset (a, b)$ (i zde připouštíme možnost, že (a, b) je nevlastní), definujeme *nevlastní integrál z f na* (a, b) tak, že zvolme $c \in (a, b)$, pokud existují nevlastní integrály[9)] $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ a $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$,

Definovaný integrál z funkce f na intervalu (a, b), pokud existuje, nesmí záviset na volbě dělícího bodu $c \in (a, b)$, to ukazuje následující lemma.

[8)]To mimochodem znamená, že funkce f je omezená na $[a, y]$ (případně $[y, b]$).

[9)]Aby nešlo k omylu hned z počátku, existuje-li nevlastní integrál, znamená to, že limita v (8.3.1) je vlastní.

Lemma 8.18. *Buď $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ splňující podmínky definice nevlastního integrálu na intervalu (a,b) a $c, d \in (a,b)$, $c < d$, potom*

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^d f(x)\mathrm{d}x + \int_d^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{8.3.2}$$

D ů k a z. Provedeme ověření vztahu (8.3.2), v následujícím výpočtu jsme využili aditivity integrálu (věta 8.7) a několikrát vět 4.29, 4.30 zejména pro případ, kdy limity vycházejí nevlastní. Pozná čtenář kde?

$$\begin{aligned}
\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x &= \lim_{y\to a+}\int_y^c f(x)\mathrm{d}x + \lim_{z\to b-}\int_c^z f(x)\mathrm{d}x = \\
&= \lim_{y\to a+}\int_y^c f(x)\mathrm{d}x + \lim_{z\to b-}\int_c^d f(x)\mathrm{d}x \int_c^z f(x)\mathrm{d}x \\
&= \lim_{y\to a+}\int_y^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^d f(x)\mathrm{d}x + \lim_{z\to b-}\int_d^z f(x)\mathrm{d}x \\
&= \lim_{y\to a+}\int_y^d f(x)\mathrm{d}x + \lim_{z\to b-}\int_d^z f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_a^d f(x)\mathrm{d}x + \int_d^b f(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Chceme-li pomocí právě uvedené definice vypočítat integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1},$$

musíme si zvolit nějaký bod $c \in (-\infty, \infty)$ a vypočítat dílčí integrály $\int_{-\infty}^c 1/(x^2+1)\mathrm{d}x$ a $\int_c^\infty 1/(x^2+1)\mathrm{d}x$ podle definice uvedené na začátku tohoto odstavce.

Zvolme za $c = 0$ a počítejme nejprve $\int_{-\infty}^c 1/(x^2+1)\mathrm{d}x$, máme

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} &= \lim_{y\to-\infty}\int_y^0 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = && \text{(definice nevlastního integrálu)} \\
&= \lim_{y\to-\infty}\Big[\arctan(x)\Big]_y^0 = \lim_{y\to-\infty}(\arctan(0) - \arctan(y)) = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Obdobným způsobem dostaneme, že také $\int_0^\infty 1/(x^2+1)\mathrm{d}x = \pi/2$. Jelikož existují oba dílčí nevlastní integrály, platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} + \int_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \pi.$$

Následující věta nám dává silný nástroj pro zjišťování konvergence řad.

Věta 8.19 (Integrální kritérium). *Nechť $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ je spojitá nezáporná nerostoucí funkce, pak řada $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ konverguje právě, když existuje integrál $\int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x$.*

D ů k a z. Nechť (s_n) je posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^\infty f(n)$. Jelikož f je nerostoucí pro každé $n > 1$ platí $f|_{(n-1,n)} \ge f(n) \ge f|_{(n,n+1)}$ a protože f je integrovatelná na každém $(n, n+1)$ platí $\int_{n-1}^n f(x)\mathrm{d}x \ge (n-n+1)f(n) \ge \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x$. To znamená, že řada $\sum_{n=2}^\infty \int_{n-1}^n f(x)\mathrm{d}x$ je majoranta řady $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ a minorantou téže řady je řada $\sum_{n=2}^\infty \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x$.

???

Uvažujme řadu $\sum 1/n^\alpha$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$, definujeme funkci $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ předpisem $f(x) = 1/x^\alpha$. Řady

$\sum 1/n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ jsou totožné (zamyslete se nad tím!). Prozkoumejme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ užitím kritéria 8.19. Jelikož

$$\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}} = \lim_{y\to\infty} \int_1^{y} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}} =$$

pro $\alpha \neq 1$, máme

$$= \lim_{y\to\infty} \left[\frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}\right]_1^y = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{(1-\alpha)y^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha} \tag{8.3.3}$$

pro $\alpha = 1$

$$= \lim_{y\to\infty} \Big[\ln(x)\Big]_1^y = \lim_{y\to\infty} \ln(y) = \infty$$

Limita v (8.3.3) je vlastní pro $\alpha > 1$. Celkově tedy $\sum 1/n^{\alpha}$ konverguje pro $\alpha > 1$ a diverguje pro $\alpha \leq 1$.

Neurčitý integrál — příklady a cvičení

8.4 Základní vzorce.

$$\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \text{ pro } n \neq -1;$$

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x|;$$

$$\int \cos(x)\mathrm{d}x = \sin(x);$$

$$\int \sin(x)\mathrm{d}x = -\cos(x);$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2(x)} = -\operatorname{cotan}(x);$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(x)} = \tan(x);$$

$$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln(a)};$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{b^2x^2 - a^2} = \frac{1}{2ab} \ln\left|\frac{bx-a}{bx+a}\right|, \text{ pro } a, b \neq 0;$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{b^2x^2 + a^2} = \frac{1}{ab} \arctan\frac{bx}{a}, \text{ pro } a, b \neq 0;$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 - x^2} = \arcsin\frac{x}{a}, \text{ pro } a \neq 0;$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+b}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+b}\right|, \text{ pro } b > 0;$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \ln|f(x)|;$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+ax+b)^n} = \frac{x+\frac{a}{2}}{2(n-1)\Big(b-\frac{a^2}{4}\Big)} \frac{1}{(x^2+ax+b)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)\Big(b-\frac{a^2}{4}\Big)} \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+ax+b)^{n-1}}$$

8.5 Často používané substituce. V následujících vztazích $R()$ označuje racionální funkci.

$\int f(x)\mathrm{d}x$	Substituce
$f(x) = R(x, x^{1/k_1}, \dots, x^{1/k_n})$, kde $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$	$t = x^{1/k}$, k je nejmenší společný násobek $k_1, \dots, k_n$.
$f(x) = R\Big(x, \Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)^{1/k_1}, \dots, \Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)^{1/k_n}\Big)$, kde $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$, a $ad - bc \neq 0$,	$t = \Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)^{1/k}$, k je nejmenší společný násobek $k_1, \dots, k_n$.
$f(x) = R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$	Eulerova
(a) $a > 0$,	$t = \sqrt{ax^2+bx+c} \pm x\sqrt{a}$;
(b) $c \geq 0$,	$xt = \sqrt{ax^2+bx+c} \pm \sqrt{c}$;
(c) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ jsou kořeny ax^2+bx+c,	$t = \sqrt{a\frac{x-\beta}{x-\alpha}}$.

$f(x) = x^m(a+bx^n)^p$, $m, n, p \in \mathbb{Q}$ (binomický integrál)

(a) $p \in \mathbb{N}$,	použijeme binomickou větu;
(b) $p \in \mathbb{Z}$,	$x = t^s$, s společný jmenovatel m a n;
(c) $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$,	$a + bx = t^s$, s je jmenovatel p;
(d) $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$,	$ax^{-n} + b = t^s$, s je jmenovatel p.

$f(x) = R(\sin(x), \cos(x))$	označme $u = \sin(x)$, $v = \cos(x)$;
(a) $R(u, v) = -\mathbb{R}(-u, v)$,	$t = \cos(x)$;
(b) $R(u, v) = -\mathbb{R}(u, -v)$,	$t = \sin(x)$;
(c) $R(u, v) = \mathbb{R}(-u, -v)$,	$t = \tan(x)$;
	univerzální substituce $t = \tan(x/2)$.

$f(x) = \sin^m(x)\cos^n(x)$

(a) $m, n \in \mathbb{Q}$		$t = \sin(x)$ nebo $t = \cos(x)$;
(b) $m, n \in \mathbb{Z}$	(1) m je liché,	$t = \cos(x)$;
	(2) n je liché,	$t = \sin(x)$;
	(3) m, n jsou sudá,	$t = \tan(x)$;
	(4) m, n jsou sudá nezáporná	$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$, $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$.

Příklady

1. *Spočítejte integrál*

$$\int \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{x+1}} \mathrm{d}x.$$

Použijeme metodu per partes. Označme si $u(x) = \arcsin(x)$ a $v'(x) = (x+1)^{-1/2}$. Potom (porovnej s (8.2.3))

$$\int \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{x+1}} \mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \arcsin(x) & u' = (1-x^2)^{-1/2} \\ v' = (x+1)^{-1/2} & v = 2\sqrt{x+1} \end{vmatrix} =$$
$$= 2\sqrt{x+1}\arcsin(x) - 2\int \frac{\sqrt{x+1}}{1-x^2} \mathrm{d}x = 2\sqrt{x+1}\arcsin(x) - 2\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}$$
$$= 2\sqrt{x+1}\arcsin(x) + 4\sqrt{1-x}.$$

2. *Spočtěte integrál*

$$\int \frac{\ln(\tan(x))}{\sin(x)\cos(x)} \mathrm{d}x.$$

Řešení: Použijeme první substituční metodu. Zaveďme substituci $t(x) = \tan(x)$.

$$\int \frac{\ln(\tan(x))}{\sin(x)\cos(x)} \mathrm{d}x = \begin{vmatrix} t = \tan(x) \\ \sin(x) = t/\sqrt{1+t^2} \\ \cos(x) = 1/\sqrt{1+t^2} \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t/(1+t^2) \end{vmatrix} = \int \frac{\ln(t)}{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}} \frac{1}{1+t^2} \mathrm{d}t = \tag{8.5.1}$$

$$= \int \frac{\ln(t)}{t} \mathrm{d}t$$

Poslední integrál vypočteme metodou per partes. Tedy

$$\int \frac{\ln(t)}{t} \mathrm{d}t = \begin{vmatrix} u = \ln(t) & u' = 1/t \\ v' = \ln(t) & v = \ln(t) \end{vmatrix} = \ln^2(x) - \int \frac{\ln(t)}{t} \mathrm{d}t.$$
$$\int \frac{\ln(t)}{t} \mathrm{d}t = \tfrac{1}{2} \ln^2(t).$$

Vrátíme-li se k (8.5.1), s požitím předchozí rovnice a použité subtituce dostaneme

$$\int \frac{\ln(\tan(x))}{\sin(x)\cos(x)} \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2} \ln^2(t) = \tfrac{1}{2} \ln^2(\tan(x)).$$

3. *Spočtěte integrál*

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}.$$

Řešení: Opět použijeme první substituční metodu, tentokráte pro $t = \sqrt{(1-x)/(1+x)}$, dostaneme

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \begin{vmatrix} t = \sqrt{(1-x)/(1+x)} \\ x = (1-t^2)/(1+t^2) \\ \mathrm{d}x = -4t\mathrm{d}t/(1-t^2)^2 \end{vmatrix} = \int t \frac{(1+t^2)^2}{4} \frac{-4t}{(1+t^2)^2} \mathrm{d}t =$$
$$= -\int t^2 \mathrm{d}t = -\frac{t^3}{3} = -\frac{1}{3} \sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3}.$$

4. *Spočtěte integrál*

$$\int \sqrt{1+\sin(x)} \mathrm{d}x.$$

Řešení: Tento příklad budeme řešit dvěma způsoby:

První způsob: použijeme první substituční metodu pro $t = \tan(x/2)$, tedy

$$\int \sqrt{1+\sin(x)} \mathrm{d}x = \begin{vmatrix} x = 2\arctan(t) \\ \sin(x) = 2t/(1+t^2) \\ \cos(x) = 2/(1+t^2) \\ \mathrm{d}x = 2\mathrm{d}t/(1+t^2) \end{vmatrix} = \int \sqrt{1 + \frac{2t}{1+t^2}} \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$$
$$= 2\int (1+t)(1+t^2)^{-3/2} \mathrm{d}t = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{3/2}} + 2\int \frac{t}{(1+t^2)^{3/2}} \mathrm{d}t.$$

Poslední dva integrály si spočítáme zvlášť, na první z nich použijeme první substituční metodu pro $z = \sqrt{1+t^2}$

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{3/2}} = \begin{vmatrix} z = \sqrt{1+t^2} \\ t = -1/\sqrt{z^2-1} \\ \mathrm{d}t = -z/(z^2-1)^{3/2} \mathrm{d}z \end{vmatrix} = -\int \frac{1}{z^2} \mathrm{d}z = \frac{1}{z} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Na druhý integrál použijeme substituci $u = \sqrt{1+t^2}$, máme

$$\int \frac{t}{(1+t^2)^{3/2}}\mathrm{d}t = \left| \begin{matrix} u = \sqrt{1+t^2} \\ u\mathrm{d}u = t\mathrm{d}t \end{matrix} \right| = \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = -\frac{1}{u} = -\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Celkově tedy dostáváme

$$\int \sqrt{1+\sin(x)}\mathrm{d}x = 2\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right) = 2(\sin(x/2) - \cos(x/2)).$$

Druhý způsob: Použijeme druhou substituční metodu, položme $1+\sin(x) = t^2$, dostaneme

$$\int \sqrt{1+\sin(x)}\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} \sin(x) = t^2 - 1 \\ \cos(x) = t\sqrt{2-t^2} \\ \mathrm{d}x = 2\mathrm{d}t/\sqrt{2-t^2} \end{matrix} \right| = 2\int \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\mathrm{d}t$$

Opět použijeme druhou substituční metodu, tentokrát položíme $z^2 = 2 - t^2$ a máme

$$\int \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\mathrm{d}t = \left| \begin{matrix} z^2 = 2 - t^2 \\ 2z\mathrm{d}z = 2t\mathrm{d}t \end{matrix} \right| = -\int \frac{z}{z}\mathrm{d}z = -z = -\sqrt{2-t^2}.$$

Celkově tedy máme

$$\int \sqrt{1+\sin(x)}\mathrm{d}x = -2\sqrt{2-t^2} = -2\sqrt{1-\sin(x)}.$$

Cvičení

1. Metoda per partes

a) $\int x^n \sin(2x)\mathrm{d}x$; b) $\int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$; c) $\int x3^x\mathrm{d}x$;
d) $\int x^n \ln(x)\mathrm{d}x$; e) $\int x \arctan(x)\mathrm{d}x$; f) $\int \arccos(x)\mathrm{d}x$;
g) $\int \arctan(\sqrt{x})\mathrm{d}x$; h) $\int \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$; i) $\int x\tan^2(x)\mathrm{d}x$;
j) $\int x\cos^2(x)\mathrm{d}x$; k) $\int \ln(x^2+1)\mathrm{d}x$; l) $\int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$;
m) $\int \mathrm{e}^x \sin(x)\mathrm{d}x$; n) $\int \sin(\ln(x))\mathrm{d}x$; o) $\int \frac{x^2}{(x+2)^2}\mathrm{d}x$.

2. Substituční metoda

a) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$; c) $\displaystyle\int \frac{4x+3}{(x-2)^3}\mathrm{d}x$;
d) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$; e) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}\mathrm{d}x$; f) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$;
g) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$; h) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\ln(x)}}{x\ln(x)}\mathrm{d}x$; i) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x$;
j) $\displaystyle\int \frac{x^2}{a^2+x^2}\mathrm{d}x$; k) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$; l) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$;

m) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}+e^{x}}{e^{4x}-e^{2x}+1}\mathrm{d}x$; n) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}}\mathrm{d}x$;

o) $\displaystyle\int \sqrt{1+\cos^2(x)}\sin(2x)\cos(2x)\mathrm{d}x$.

3. Racionální funkce

a) $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)(2x+1)}\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int \frac{2x^2}{2x^2-3x-2}\mathrm{d}x$; c) $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}\mathrm{d}x$;

d) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4}\mathrm{d}x$; e) $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}\mathrm{d}x$; f) $\displaystyle\int \frac{x^5}{(x-1)^2(x^2-1)}\mathrm{d}x$;

g) $\displaystyle\int \frac{7x^3-9}{x^4-5x^3+6x^2}\mathrm{d}x$; h) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^3}\mathrm{d}x$; i) $\displaystyle\int \frac{(x+1)^4}{(x^2+2x+2)^3}\mathrm{d}x$;

j) $\displaystyle\int \frac{1}{x(4+x^2)^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$; k) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^4}\mathrm{d}x$; l) $\displaystyle\int \frac{x^9}{(x^4-1}\Big)^2\mathrm{d}x$.

4. Goniometrické funkce

a) $\displaystyle\int \sin^3(x)\cos^2(x)\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos(x)\sin^3(x)}\mathrm{d}x$; c) $\displaystyle\int \frac{\sin^4(x)}{\cos^2(x)}\mathrm{d}x$;

d) $\displaystyle\int \frac{\sin(x)}{(1-\cos(x))^2}\mathrm{d}x$; e) $\displaystyle\int \frac{\cos^4(x)+\sin^4(x)}{\cos^2(x)-\sin^2(x)}\mathrm{d}x$; f) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x)+\cos(x)}$;

g) $\displaystyle\int \frac{1}{\tan(x)\cos(2x)}\mathrm{d}x$; h) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\tan(x)}\mathrm{d}x$; i) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin^2(x)}\mathrm{d}x$;

j) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{4+\tan(x)+4\,\mathrm{cotan}(x)}$; k) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{5-4\sin(x)+3\cos(x)}$; l) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2(x)+\tan^2(x)}$;

m) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\tan(x)}}{\sin(x)\cos(x)}\mathrm{d}x$; n) $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{\sin^3(x)-\cos^3(x)}\mathrm{d}x$; o) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^4(x)}}\mathrm{d}x$.

5. Funkce typu $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$

a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$; b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2x+x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$; c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{2+x-x^2}}$;

d) $\displaystyle\int \sqrt{1-4x-x^2}\mathrm{d}x$; e) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$; f) $\displaystyle\int \frac{3x^2-5x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\mathrm{d}x$;

g) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(x+\sqrt[3]{1+x^2})}$; h) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}}\mathrm{d}x$; i) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x}}{2+x^2}\mathrm{d}x$.

6. Binomické integrály

a) $\displaystyle\int \sqrt{x}(1+\sqrt{x})^4\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{1+x^2}}$; c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+x^3}}$;

d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1+x^4}}$; e) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}\mathrm{d}x$; f) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;

g) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2}\mathrm{d}x$; h) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}\mathrm{d}x$; i) $\displaystyle\int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\mathrm{d}x$.

7. Funkce typu $R\left(x, \sqrt[m]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)$

a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2})}$; b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}}$; c) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\mathrm{d}x$;

d) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x$; e) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\mathrm{d}x$; f) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x-x^2}$.

8. Různé

a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)}\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x$; c) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2}\mathrm{d}x$;

d) $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{(1-\cos(x))^2}\mathrm{d}x$; e) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3(x)}$; f) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+x+1}}$;

g) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1-2x-x^2}$; h) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(\sqrt[3]{x}+1)}$; i) $\displaystyle\int \frac{\tan(x)}{1+\tan(x)+\tan^2(x)}\mathrm{d}x$;

j) $\displaystyle\int \frac{\arctan(x)}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$; k) $\displaystyle\int \arctan(1+\sqrt{x})\mathrm{d}x$; l) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin^3(x)\cos^2(x)}}\mathrm{d}x$;

m) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{3x}(\sin(2x)-\cos(2x))\mathrm{d}x$; n) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\sin(x)}\frac{x\cos^3(x)-\sin(x)}{\cos^2(x)}\mathrm{d}x$;

o) $\displaystyle\int \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\mathrm{d}x$.

9. Dokažte následující tvrzení: Jestliže ke dvěma z funkcí $f, g, f+g : J \to \mathbb{R}$ existuje na J primitivní funkce, pak existuje i ke třetí. Uveďte příklad funkcí, f, g takových, že k funkci $f+g$ existuje na J primitivní funkce, ale ani k funkci f ani k funkci g primitivní funkce neexistuje.

10. Existují funkce $f, g : J \to \mathbb{R}$, pro které platí $\int f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \int g(x)\mathrm{d}x$?

Určitý integrál — příklady a cvičení

8.6 Základní vzorce.

Plocha podgrafu funkce f na intervalu $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Plocha oblasti ohraničené křivkou, která je zadána parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [\alpha, \beta]$:

$$\left|\int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t\right|.$$

Plocha oblasti ohraničené křivkou, která je zadána v polárních souřadnicích rovnicí $\varrho = f(\varphi), \varphi \in [\alpha, \beta]$:

$$\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \varrho^2(\varphi)\mathrm{d}\varphi.$$

Délka rovinné křivky $y = f(x), x \in [a, b]$:

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f')^2(x)}\mathrm{d}x.$$

Délka křivky $(x(t), y(t), z(t)), t \in [\alpha, \beta]$

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{(x')^2(t) + (y')^2(t) + (z')^2(t)}\mathrm{d}t.$$

Délka křivky $\varrho = f(\varphi), \varphi \in [\alpha, \beta]$:

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{(\varrho')^2(\varphi) + \varrho^2(\varphi)}\mathrm{d}\varphi.$$

Objem prostorového útvaru, ležícího nad intervalem $[a, b]$ na ose x, jehož řez rovinou, procházející bodem $x \in [a, b]$, rovnoběžnou s rovinou yz, má plochu $A(x)$:

$$\int_a^b A(x)\mathrm{d}x. \quad \text{(Cavalieriho princip)}$$

Objem rotačního tělesa, vzniklého rotací podgrafu funkce f na intervalu $[a, b]$ kolem osy x (respektive y):

$$\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \qquad \left(\text{respektive } 2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\right).$$

Povrch rotačního tělesa, vzniklého rotací grafu funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kolem osy x (respektive y):

$$2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f')^2(x)}\mathrm{d}x$$

$$\left(\text{respektive } 2\pi\int_a^b x\sqrt{1 + (f')^2(x)}\mathrm{d}x\right).$$

Povrch rotačního tělesa, vzniklého rotací křivky $x = \psi(t), y = \varphi(t), t \in [\alpha, \beta]$ kolem osy x:

$$2\pi\int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{(\varphi')^2(t) + (\psi')^2(t)}\mathrm{d}t.$$

Povrch rotačního tělesa, vzniklého rotací křivky $\varphi = f(\varphi), \varphi \in [\alpha, \beta]$ kolem osy x:

$$2\pi\int_\alpha^\beta |\varphi\sin(\varphi)|\sqrt{(\varrho')^2(\varphi) + \varrho^2(\varphi)}\mathrm{d}\varphi.$$

Příklady

5. *Odvoďte vzorec pro obsah kruhu*

a) v kartézských souřadnicích; *b) v parametrických souřadnicích;*

c) v polárních souřadnicích.

Řešení: a) Uvažujme tu část kruhu $x^2 + y^2 \leq r^2$, která leží v prvním kvadrantu. Jedná se tedy o podgraf funkce $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ na intervalu $[0, r]$. Obsah kruhu je čtyřnásobkem obsahu tohoto podgrafu. Tedy $S = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\mathrm{d}x$. V následujícím výpočtu, použijeme substituci $x = r\sin(t)$:

$$S = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x = r\sin(t) \\ \mathrm{d}x = r\cos(t)\mathrm{d}t \end{array} \right| = 4r^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\mathrm{d}t =$$
$$= 4r^2\Big[\tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{4}\sin(2t)\Big]_0^{\pi/2} = \pi r^2.$$

b) Parametricky kružnici zadáme takto: $x = r\cos(t)$, $y = r\sin(t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Po dosazení do příslušného vzorce tedy dostaneme:

$$S = \left|\int_0^{2\pi} r\sin(t)(-\sin(t))\mathrm{d}t\right| = \left|-r^2\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos(2t)}{2}\mathrm{d}t\right| =$$
$$= \left|-\frac{r^2}{2}\Big[t\Big]_0^{2\pi} + \frac{1}{4}r^2\Big[\sin(2t)\Big]_0^{2\pi}\right| = \left|-\pi r^2\right| = \pi r^2.$$

c) Kružnici o poloměru r se středem v bodě $(0,0)$ zadáme v polárních souřadnicích takto: $\varrho = r$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Podle příslušného vzorce tedy dostaneme:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}r^2\Big[\varphi\Big]_0^{2\pi} = \pi r^2.$$

6. *Spočtěte integrál*

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$$

Řešení: Opět použijeme druhou substituční metodu, tentokráte pro $x = t^2$

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x = t^2 \\ \mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{t}{1+t}2t\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{t^2}{1+t}\mathrm{d}t =$$
$$= 2\int_0^1 t - 1 + \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t = 2\Big[\frac{t^2}{2} - t + \ln|1+t|\Big]_0^1 = 2(\tfrac{1}{2} - 1 + \ln(2)) = -1 + \ln(2).$$

7. *Vypočtěte obsah části roviny ohraničené křivkami $xy = 4$, $x + y = 5$.*
Řešení: Najdeme x-ové souřadnice průsečíků daných křivek tak, že vyjádříme y z druhé rovnice a dosadíme do první: $x^2 - 5x = 4$. Z této kvadratické rovnice dostaneme kořeny $x_1 = 1$ a $x_2 = 4$. Neboť na intervalu $[1, 4]$ je funkce $5 - x$ větší nebo rovna funkci $4/x$, obsah je tedy roven

$$S = \int_1^4 5 - x - \frac{4}{x}\mathrm{d}x = \Big[5x - \frac{x^2}{2} - 4\ln(x)\Big]_1^4 = 20 - 8 - 4\ln(4) - 5 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{15}{2} - 8\ln(2).$$

Cvičení

11. Uveďte příklad ohraničené funkce f, která není integrovatelná na $[a, b]$ ale $|f|$ je integrovatelná na $[a, b]$.

12. Uveďte příklad ohraničených funkcí $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ takových, že f, g nejsou integrovatelné na $[a, b]$, ale

a) $f + g$ je integrovatelná na $[a, b]$; b) fg je integrovatelná na $[a, b]$.

13. Ukažte, přímo z definice Riemannova integrálu, že funkce $f(x) = x$ je integrovatelná na $[-1, 1]$ a vypočtěte $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ bez použití Newton-Leibnitzovy formule.

14. Spočtěte integrály:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}\mathrm{d}x;$ b) $\displaystyle\int_0^1 x^2 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x;$ c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1};$

d) $\displaystyle\int_1^2 \ln(x)\mathrm{d}x;$ e) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} x^2 \operatorname{arccotan}(x)\mathrm{d}x;$ f) $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos(x)\mathrm{d}x;$

g) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2(x)}{\cos^6(x)}\mathrm{d}x;$ h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+x^3}};$ i) $\displaystyle\int_0^1 x \arctan(\sqrt{x})\mathrm{d}x.$

j) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1-\sin(x)}{1+\cos(x)}\mathrm{d}x;$ k) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1-2x}{x^6+1}\mathrm{d}x;$ l) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x+2}\mathrm{d}x;$

m) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2x+2)^2};$ n) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2x-2)^2};$ o) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+3\cos^2(x)};$

p) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1};$ q) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(4-x^2)^{3/2}};$ [10] r) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^4(x)\cos^2(x)\mathrm{d}x;$

s) $\displaystyle\int_{-1/4}^{5/4} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{1}{2}+x-x^2}};$ t) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}\mathrm{d}x.$

15. Nalezněte plochu oblasti ohraničené:

a) křivkami $x = y^2, x = y^3$;

b) křivkou $y = x^2 - 7$, osou x a přímkami $x = 2, x = 4$;

c) smyčkou křivky $y^2 = x^2(4 - x)$

d) elipsou se středem v počátku a poloosami a, b;

e) křivkami $y = x^2/2, y = 2x^2, xy = 1, xy = 4$;

f) křivkou $x^2 + y^2 = 2x + 3$ a tečnami v jejích průsečících s osou y;

g) křivkou $\varrho = 2a\cos(\varphi)$;

h) křivkami $y^2 = x + 4, x - 2y + 1 = 0$;

i) přímkami o rovnicích $2x - y = 0, 4y - x = 0, x + y - 2 = 0, x + y = 4$.

16. Uvažujme oblast, ležící v prvním kvadrantu, ohraničenou křivkami $x = y^2, x = y^4$. Nalezněte objem tělesa, vzniklého rotací této oblasti kolem osy y.

17. Vypočtěte objem anuloidu vzniklého rotací kružnice $x^2 + (y-2)^2 = 1$ kolem osy x.

18. Vypočtěte objem anuloidu vzniklého rotací kružnice $(x-2)^2 + y^2 = 1$ kolem osy y.

19. Vypočtěte následující nevlastní integrály, případně integrály, které po substituci vedou na nevlastní integrály

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^x \mathrm{d}x;$ b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)\mathrm{d}x, a > 0;$ c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)\mathrm{d}x, a > 0;$

d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1};$ e) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{x^4+1}\mathrm{d}x;$ f) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\mathrm{d}x;$

g) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x^3}{x^4+1}\mathrm{d}x;$ h) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1};$ i) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{x^3+1}\mathrm{d}x;$

[10] Použijte substituci $t = (2-x)/(2+x)$.

j) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$; k) $\displaystyle\int_1^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$; l) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$;

m) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$; n) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$; o) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$;

p) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$; q) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}}$; r) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}}$;

s) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}$; t) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}$.

20. Odvoďte vzorec pro objem koule

a) v kartezských souřadnicích; b) v parametrických souřadnicích.

21. Odvoďte vzorec pro objem

a) kužele; b) válce; c) kulové vrstvy.

22. Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací oblasti ohraničené

a) křivkami $y = x^2, x = y$ b) parabolou $x = y^2 + 2$ a přímkou $x = y + 8$
kolem osy y.

23. Vypočtěte objem kulové úseče, je-li poloměr koule r a výška úseče v.

Výsledky

1. a) $\sin(2x)/4 - x\cos(2x)/2$; **b)** $-x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}$; **c)** $x3^x/\ln(3) - 3^x/\ln^2(3)$; **d)** $x^{n+1}\ln(x)/(n+1) - x^{n+1}/(n+1)^2$; **e)** $x^2\arctan(x)/2 + \arctan(x)/2 - x/2$; **f)** $x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$; **g)** $(1+x)\arctan(\sqrt{x}) - \sqrt{x}$; **h)** $2\sqrt{x+1}\arcsin(x) - 4\sqrt{1-x}$; **i)** $x\tan(x) - x^2/2 - \ln(1+\tan^2(x))/2$; **j)** $x^2/4 + x\sin(2x)/4 + \cos(2x)/8$; **k)** $x\ln(x^2+1) - 2x + 2\arctan(x)$; **l)** $\arctan(x)/2 - x/(2+2x^2)$; **m)** $\mathrm{e}^x(\sin x - \cos x)/2$; **n)** $x(\sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x)))/2$; **o)** $x + 2 - 4/(x+2) - 4\ln(x+2)$.

2. a) $2(1+\sqrt{1+x}) - 2\ln(1+\sqrt{1+x})$; **b)** $2\sqrt{(x-1)^7}/7 + 6\sqrt{(x-1)^5}/5 + 2\sqrt{(x-1)^3} + 2\sqrt{x-1}$; **c)** $-4/(x-2) - 11/(2(x-2)^2)$; **d)** $\ln((\sqrt{x+1}-1)/(\sqrt{x+1}+1))$; **e)** $3(\sqrt[3]{x+1}+1) - 3\ln(|\sqrt[3]{x+1}+1|)$; **f)** $x + 6\sqrt[6]{x^5}/5 + 3\sqrt[3]{x^2}/2 + 2\sqrt{x} + 3\sqrt{x} + 6\sqrt[6]{x} + \ln(|\sqrt[6]{x}-1|)$; **h)** $2\sqrt{1+\ln(x)} - 2\ln((\sqrt{1+\ln(x)}-1)/(\sqrt{1+\ln(x)}+1)$; **j)** $a^2\arcsin(x/a)/2 - a^2\sin(a\arcsin(x/a))/2$; **k)** $\ln((\sqrt{1+x^2}-1)/(\sqrt{1+x^2}+1))/2$; **o)** $2\sqrt{(1+\cos^2(x))^3} - 4\sqrt{(1+\cos^2(x))^5}/5$.

3. a) $\ln((x+1)/\sqrt{2x+1})$; **b)** $x + 16\ln(|x-2|)/5 - \ln(|x+\frac{1}{2}|)/5$; **c)** $x/4 - 9\ln(2x+1)/16 - 7\ln(2x-1)/16 + \ln(x)$; **d)** $\ln(|x+1|) + 4/(x+2)$; **e)** $x + 2\ln(x-1) - \ln(x) + 1/x$; **f)** $x^2/2 + 2x + 31\ln(x-1)/8 - 1/(4(x-1)^2) - 9/(4(x-1))$; **g)** $3/2x + 20\ln(x-3) - 5\ln(x)/4 - 47\ln(x-2)/4$; **h)** $\ln(x+1)/3 - \ln(x^2-x+1)/6 + \sqrt{3}\arctan(\sqrt{3}(2x-1)/3)/3$; **i)** $(x+1)/(4(x^2+2x+2)) - 5(x+1)/(8(x^2+2x+2)) + 3\arctan(x+1)/8$; **j)** $-\ln(1+x^2)/18 + 7\ln(4+x^2)/288 + \ln(x)/16 - 1/(24(4+x^2))$; **k)** $x/(6(1+x^2)^3) + 5x/(24(1+x^2)^2) + 5x/(16(1+x^2)) + 5\arctan(x)/16$; **l)** $x^2/2 + 1/(16(x+1)) + 3\ln(x-1)/8 + 3\ln(x+1)/8 - 1/(16(x-1)) - 1/(8(1+x^2)) - 3\ln(1+x^2)/8$.

4. a) $\cos^5(x)/5 - \cos^3(x)/3$; **b)** $\ln|\tan(x)| - 1/(2\sin^2(x))$; **c)** $\tan(x)\sin^4(x) - 3x/2 + \sin(2x)/4$; **d)** $-1/(3(1-\cos^3(x)))$; **e)** $\tan(x)/(2+2\tan^2(x)) - \ln(\tan(x)-1)/4 + \ln(\tan(x)+1)/4$; **f)** $\ln|(2\arctan(x) - 1 + \sqrt{2})/(2\arctan(x) - 1 - \sqrt{2})|$; **g)** $\ln|\sin(x)/\sqrt{1-2\sin^2(x)}|$; **h)** $x/2 + \ln(1+\tan(x))/2 - \ln(1+\tan^2(x))/4$; **i)** $\sqrt{2}(\arctan(\sqrt{2}\tan(x)))/2$; **j)** $3\ln(1+\tan^2(x))/50 - 3\ln(\tan(x)+2)/25 + 2/(5\tan(x)+10) + 4x/25$; **k)** $-1/(\tan(x/2)-2)$; **l)** $-1/(2\tan(x)) - \sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}\tan(x)/2)/4$; **m)** $2\sqrt{\tan(x)}$; **n)** $\ln(\tan(x)-1)/3 - \ln(\tan^2(x)+\tan(x)+1)/6 - \sqrt{3}\arctan(2\sqrt{3}\tan(x)+\sqrt{3})/3$.

5. a) $\sqrt{2}\arctan(\sqrt{x^2+4x-4}/\sqrt{2})/2$; **b)** $\ln|(\sqrt{1+2/x}-1)/(\sqrt{1+2/x}+1)|-\sqrt{1+2/x}$; **c)** $-\sqrt{2}\,\mathrm{arctanh}(\sqrt{2}(4+x)/(4\sqrt{2+x-x^2}))/2$; **d)** $(1+x/2)\sqrt{1-4x-x^2}+5\arcsin(\sqrt{5}(2+x)/5)/2$; **e)** $x+\ln(x-1)+\sqrt{x^2-x+1}+\mathrm{arcsinh}(2\sqrt{3}(x-1/2))/2-\mathrm{arctanh}((x+1)/(2\sqrt{x^2-x+1}))$; **f)** $14\arcsin(x/2+1/2)+19\sqrt{3-2x-x^2}/2-3x\sqrt{3-2x-x^2}/2$; **g)** $\mathrm{arcsinh}(x)+x\sqrt{1+x^2}-\ln(x)-\sqrt{(1+x^2)^3}/x$; **h)** $\sqrt{2x^2-2x+1}/x$; **i)** $\mathrm{arcsinh}(x)-\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}x/(2\sqrt{1+x^2}))/2$.
10. Ano, například je-li jedna z nich nulová.
11. $f(x)=1$, je-li x racionální, $f(x)=-1$, je-li x iracionální.
12. a) $f=\varrho, g=-\varrho$; **b)** $f=\varrho, g=1-\varrho$.
13. 0.
14. a) $4(1-\ln(2))/3$; **b)** $\mathrm{e}-2$; **c)** $\pi\sqrt{3}/3$; **d)** $2\ln(2)-1$; **e)** ??; **f)** $-(\mathrm{e}^{\pi}+1)/2$; **g)** $\frac{8}{15}$; **h)** ??; **i)** ??; **j)** $1-\ln(2)$; **k)** $\ln(2+\sqrt{3})/\sqrt{3}$; **l)** $\pi(1-1/\sqrt{3})-1$; **m)** $\pi/8+\frac{1}{4}$; **n)** $\frac{1}{12}+\ln(2+\sqrt{3})/12\sqrt{3}$; **o)** $\pi/2$; **p)** $\ln(1+\sqrt{2})/2\sqrt{2}+\pi/4\sqrt{2}$; **q)** $1/4\sqrt{3}$; **r)** $\frac{4}{3}$; **s)** $2\pi/3$; **t)** $1/\sqrt{2}-1/\sqrt{5}$.
15. a) $\frac{1}{12}$; **b)** $\frac{230}{3}$; **d)** πab;
19. a) 1; **b)** $a/(a^2+b^2)$; **c)** $b/(a^2+b^2)$; **d)** $\pi/2\sqrt{2}$; **e)** $\pi/4$; **f)** $\pi/2\sqrt{2}$; **g)** diverguje; **h)** $2\pi\sqrt{3}/3$; **i)** $2\pi\sqrt{3}/3$; **j)** diverguje; **k)** π; **l)** diverguje; **m)** $2\pi/\sqrt{3}$; **n)** diverguje; **o)** $\pi/2$; **p)** diverguje; **q)** neexistuje; **r)** $\frac{3}{4}$; **s)** $\ln(1+\sqrt{2})$; **t)** diverguje.