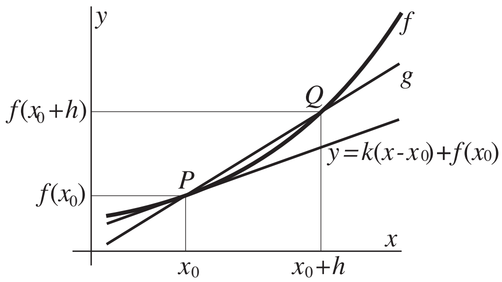
Matematická analýza II
přednášky M. Málka
cvičení A. Hakové a R. Otáhalové
*Semestr letní 2005*

# 7. Diferenciální počet v $\mathbb{R}$

V této kapitole se dostáváme k jednomu z nejdůležitějších pojmů matematické analýzy k derivaci. Nejprve definujeme pojem *derivace* funkce reálné proměnné, následují základní vlastnosti derivace a derivace základních funkcí.

V dalších odstavcích se postupně věnujeme užití derivací při hledání extrémů funkcí, výpočtu limit a odhadu hodnoty funkce.




**7.1 Derivace.** Postupnými úvahami se pokusíme definovat pojem tečny ke grafu funkce. Uvažujme funkci $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou na otevřeném intervalu $I$. Zvolme si libovolný bod $x_0 \in I$ a kladné číslo $h \in \mathbb{R}$ volme tak, aby $x_0 + h \in I$. Označme si $P = (x_0, f(x_0))$ a $Q = (x_0 + h, f(x_0 + h))$ jim odpovídající body na grafu funkce $f$. Jak již víme (věta 2.13), grafem afinní funkce je přímka, není těžké ověřit, že přímka procházející body $P$ a $Q$ je grafem afinní funkce $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0) + f(x_0). \tag{7.1.1}$$

Směrnice této přímky je $(f(x_0 + h) - f(x_0))/h$.

Limitu směrnic těchto přímek, pokud existuje, nazýváme *derivace funkce $f$ v bodě $x_0$* a značíme $f'(x_0)$. Tedy

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad \left(\text{případně} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right). \tag{7.1.2}$$

Pokud ve vzorci (7.1.2) nahradíme limitu limitou zleva (případně zprava) dostaneme *derivaci zleva (zprava) funkce $f$ v bodě $x_0$*, značíme ji $f'_-(x_0)$ ($f'_+(x_0)$). Je-li limita v (7.1.2) nevlastní říkáme, že $f$ má v $x_0$ *nevlastní derivace*, obdobně pro *vlastní derivaci*. Označení derivace tedy symbol $f'(x_0)$, připomíná hodnotu nějaké funkce, je to záměrné. Mějme funkci $f : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $X \subset J$ je množina obsahující všechny body ve kterých má $f$ vlastní derivaci, pak funkci $f' : X \to \mathbb{R}$, která bodu z $X$ přiřadí derivaci funkce $f$ v tomto bodě nazveme *derivace funkce*.

Je-li $f$ konstantní funkce potom $f' = 0$, skutečně pokud $f(x) = c$ máme

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Další funkcí, jejíž derivaci můžeme spočítat přímo pomocí definice derivace, je mocninná funkce. Nechť tedy $n \in \mathbb{N}$ spočítejme derivaci funkce $\mathrm{pow}_n$. Máme

$$\begin{aligned}
\mathrm{pow}'_n(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{pow}_n(x_0 + h) - \mathrm{pow}_n(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x_0^n + n x_0^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \ldots + h^n - x_0^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{n x_0^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \ldots + h^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left( n x_0^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-1} h + \ldots + h^{n-1} \right) = n x_0^{n-1} = n\,\mathrm{pow}_{n-1}(x_0).
\end{aligned}$$

Celkově tedy máme $(\text{pow}_n)' = n\,\text{pow}_{n-1}$, zjednodušeně zapisujeme $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Nyní již máme dostatečný aparát k tomu, abychom mohli nadefinovat pojem tečny. Přímka procházející bodem $(x_0, f(x_0))$ a mající směrnici $f'(x_0)$ je *tečna ke grafu funkce* $f$ *v bodě* $(x_0, f(x_0))$. Rovnice této tečny je $y = f'(x_0)(x - x_0) - f(x_0)$.

Úmluva: Nadále, v rámci této kapitoly, bude $I \subset \mathbb{R}$ představovat otevřený interval.

Následující věta je jednoduchým důsledkem věty 4.27, proto ji uvádíme bez důkazu.

**Věta 7.1.** *Funkce* $f : J \to \mathbb{R}$ *má v bodě* $x_0 \in J$ *derivaci* $f'(x_0)$ *(vlastní nebo nevlastní), právě když existují* $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$ *a platí* $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0)$.

Funkce absolutní hodnota má v bodě 0 derivaci zleva rovnu $-1$ a derivaci zprava rovnu 1, proto podle předchozí věty v nule nemá derivaci.

Souvislost mezi existencí derivace v bodě a spojitostí v tomto bodě popisuje následující věta.

**Věta 7.2.** *Nechť* $f : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *má v bodě* $x_0 \in J$ *konečnou derivaci, potom* $f$ *je v* $x_0$ *spojitá.*

D ů k a z. Počítejme limitu $\lim_{h\to 0}(f(x_0 + h) - f(x_0))$, je-li $f'(x_0)$ vlastní potom

$$\lim_{h\to 0}(f(x_0+h) - f(x_0)) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} h =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \lim_{h\to 0} h = f'(x_0)0 = 0.$$

Což dokazuje, že $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ a tedy i spojitost v $x_0$.

Podmínka, že derivace v bodě $x_0$ musí být konečná se nedá vynechat, to je vidět na funkci signum. Funkce signum má v bodě $x_0 = 0$ nevlastní derivaci rovnu $+\infty$ ale není v něm spojitá.

Na druhou stranu, nevlastní derivace nemusí nutně znamenat nespojitost. Uvažujme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$, tato funkce je spojitá, neboť je to inverze k homeomorfismu (funkce $x^3$ homeomorfismus podle vět 2.15 4.14, a 4.21) máme ale

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{2/3}} = \infty.$$

**7.2 Vlastnosti derivace.** Následující věta nám bude velmi užitečná pro výpočet derivací funkcí definovaných jako součet řady funkcí, její důkaz bezprostředně vyplývá z důsledku 6.10.

**Věta 7.3.** *Buď* $(f_n)$ *posloupnost funkcí* $f_n : J \to \mathbb{R}$, $x_0 \in J$. *Pokud řada* $\sum f_n$ *stejnoměrně konverguje na množině* $J$ *k funkci* $f$ *a pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *existuje* $f'_n(x_0) = a_n$. *Pak řada* $\sum a_n$ *konverguje, derivace* $f'(x_0)$ *existuje a platí*

$$\sum a_n = f'(x_0), \quad \left(\textit{nebo-li } f'(x_0) = \sum f'_n(x_0)\right).$$

**Důsledek 7.4.** *1.* $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$.
*2.* $\sin'(x) = \cos(x)$.
*3.* $\cos'(x) = -\sin(x)$.

D ů k a z. 1. Na definici funkce $\mathrm{e}^x$ aplikujeme větu 7.3, máme

$$(\mathrm{e}^x)' = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right)' =$$
$$= (1)' + \left(\frac{x}{1!}\right)' + \left(\frac{x^2}{2!}\right)' + \left(\frac{x^3}{3!}\right)' + \dots \qquad \text{(věta 7.3)}$$
$$= 0 + \frac{1}{1!} + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \dots = \mathrm{e}^x.$$

Body 2. a 3. se dokáží obdobně.

**Věta 7.5.** *Buďte $f, g : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkce mající derivaci v $x_0 \in J$ a $c \in \mathbb{R}$, potom*
*1.* $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
*2.* $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.
*3.* $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$.
D ů k a z. První dva body dokážeme přímým výpočtem, tedy

$$
\begin{aligned}
(f+g)'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) + g(x_0+h) - (f(x_0) + g(x_0))}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \\
&= f'(x_0) + g'(x_0).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(fg)'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0+h) + f(x_0)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} g(x_0+h)\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \lim_{h\to 0} f(x_0)\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} g(x_0+h) \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + f(x_0) \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \\
&= g(x_0)f'(x_0) + f(x_0)g'(x_0).
\end{aligned}
$$

Třetí bod je důsledkem bodu 2. této věty a toho, že derivace konstantní funkce je 0.

**Věta 7.6 (Derivace složené funkce).** *Nechť $f : J \to \mathbb{R}$, $g : I \to J$, $x_0 \in I$ a nechť existují vlastní derivace $g'(x_0)$ a $f'(g(x_0))$, potom existuje vlastní derivace $(f \circ g)'(x_0)$ a platí*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0). \tag{7.2.1}$$

D ů k a z. Označme $y_0 = g(x_0)$, definujme funkci $F : J \to \mathbb{R}$ takto

$$
F(y) = \begin{cases} \dfrac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} & \text{pro } y \neq y_0, \\ f'(y_0) & \text{pro } y = y_0. \end{cases}
$$

Je jasné, že je funkce $F$ spojitá (druhá větev vznikla, jako limita první). Pro tuto funkci a libovolný bod $y \in J$ platí

$$(y - y_0)F(y) = f(y) - f(y_0) \tag{7.2.2}$$

a to i pro $y = y_0$ (ověřte si!), toho za chvíli využijeme.

Nyní, počítejme derivaci funkce $(f \circ g)$ v $x_0$. Máme

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{(g(x) - g(x_0))F(g(x))}{x - x_0} && \text{(viz. (7.2.2) pro } y = g(x)) \\
&= \lim_{x\to x_0} F(g(x)) \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= F(\lim_{x\to x_0} g(x))g'(x_0) && \text{(věta 4.24)}
\end{aligned}
$$

$$= F(y_0)g'(x_0) = f'(y_0)g(x_0). \qquad \text{(definice } F\text{)}$$

**Důsledek 7.7.** *Buďte $f, g : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkce mající derivaci v $x_0 \in J$ a $g(x_0) \neq 0$, potom* $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

D ů k a z. V následujícím výpočtu jsme využili věty 7.6 a 7.5 (kde?).

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f\frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)(x_0) + f(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)$$
$$= \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} + f(x_0)\left(-\frac{1}{g^2}\right)(x_0)g'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

**Věta 7.8 (Derivace inverzní funkce).** *Nechť $f : J \to I \subset \mathbb{R}$ je spojitá funkce rostoucí nebo klesající, $x_0 \in J$, $f^{-1} : I \to J$ inverze $f$. Pokud existuje vlastní $f'(x_0) \neq 0$, potom existuje vlastní $(f^{-1})'(f(x_0))$ a platí*

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}, \quad \left(\textit{nebo také } f'(x_0) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x_0))}\right). \tag{7.2.3}$$

D ů k a z. Využijeme (jak?) větu o derivaci složené funkce. Máme

$$1 = (\mathrm{id}_J)'(x_0) = (f^{-1} \circ f)'(x_0) = (f^{-1})'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Odtud již výsledek přímo plyne.

**Důsledek 7.9.** *1.* $\ln'(x) = 1/x$.
*2.* $\arcsin'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$.
*3.* $\arccos'(x) = -1/\sqrt{1-x^2}$.
*4.* $\arctan'(x) = 1/(1+x^2)$.
*5.* $\mathrm{arccotan}'(x) = -1/(1+x^2)$.
*6. Pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ platí $(x^a)' = ax^{a-1}$.*
*7. Pro libovolné $a > 0$ platí $(a^x)' = a^x \ln(a)$.*

D ů k a z. 1. Ve vzorci (7.2.3) položíme $f = \ln$, máme $f^{-1} = \exp$

$$f'(x) = \ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}.$$

Důkazy bodů 2.–5. jsou obdobné, proto je zde neuvádíme.

6. Podle věty 7.6 a bodu 1. tohoto důsledku máme

$$(x^a)' = (\mathrm{e}^{a\ln(x)})' = \mathrm{e}^{a\ln(x)}(a\ln(x))' = \frac{ax^a}{x} = ax^{a-1}.$$

Obdobně, lze postupovat při důkazu bodu 7.

**7.3 Diferenciál funkce.** Uvažujme funkci $f : J \to \mathbb{R}$ a $x_0 \in J$, lineární zobrazení $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazýváme *diferenciál funkce $f$ v bodě $x_0$* jestliže

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - A(h)}{h} = 0. \tag{7.3.1}$$

Diferenciál funkce $f$ v bodě $x_0$ označujeme $\mathrm{d}f(x_0)$.

Souvislost diferenciálu a derivace objasňuje následující věta

**Věta 7.10.** *Funkce $f : J \to \mathbb{R}$ má diferenciál v bodě $x_0 \in J$, právě když má v tomto bodě derivaci a platí $\mathrm{d}f(x_0)(h) = f'(x_0)h$.*

D ů k a z. Lineární zobrazení $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má tvar $k \cdot h$ pro nějaké $k \in \mathbb{R}$. Vzorec (7.3.1) nám dává

$$k = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

To znamená, že $k = f'(x_0)$.

Lineární zobrazení zobrazení $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lze předpisem zapsat $A(x) = kx$, pro pevné $k \in \mathbb{R}$. Proto občas ztotožňujeme lineární zobrazení $A$ s číslem $k$. Derivace funkce $f$ v bodě $x_0$ je také reálné číslo, a vzhledem k předchozí větě, míváme tendence ztotožňovat i diferenciál funkce v bodě s derivací funkce v tomto bodě. U funkcí jedné reálné proměnné je to přijatelné, u funkcí více proměnných je tento rozdíl již výraznější.

**7.4 Derivace vyšších řádů.** Má-li funkce $f : J \to \mathbb{R}$ derivaci ve všech bodech nějakého okolí $U$ bodu $x_0 \in J$, můžeme uvažovat o existenci derivace funkce $f'$ v bodě $x_0$. Pokud existuje, tuto hodnotu nazýváme *druhá derivace funkce $f$ v bodě $x_0$* a označujeme ji $f''(x_0)$.

Postupně se takto můžeme propracovat k definici *derivace $n$-tého řádu v bodě $x_0$* (označujeme $f^{(n)}(x)$), jako derivaci funkce $n-1$-řádu ($f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0)$).

**7.5 Extrémy.** Nechť $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, řekneme, že funkce $f$ je *rostoucí* (respektive *klesající, nerostoucí, neklesající*) *v bodě $x_0 \in X$,* jestliže existuje okolí $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ bodu $x_0$ takové, že $f((x_0 - \delta, x_0) \cap X) < f(x_0) < f((x_0, x_0 + \delta) \cap X)$ (respektive $f((x_0 - \delta, x_0) \cap X) > f(x_0) > f((x_0, x_0 + \delta) \cap X)$, $f((x_0 - \delta, x_0) \cap X) \leq f(x_0) \leq f((x_0, x_0 + \delta) \cap X)$, $f((x_0 - \delta, x_0) \cap X) \geq f(x_0) \geq f((x_0, x_0 + \delta) \cap X)$). Řekneme, že funkce $f$ na bývá v $x_0$ *lokálního maxima (minima)* jestliže existuje okolí $U$ bodu $x_0$ takové, že $f|_{U\cap X}$ nabývá v $x_0$ maxima (minima).

Je vidět, že pokud je funkce rostoucí v každém bodě množiny $X$, pak je rostoucí na $X$, a že pokud je rostoucí na $X$ pak je rostoucí v každém bodě množiny $X$. Obdobně i pro další typy extrémů.

**Věta 7.11.** *Buď $f : J \to \mathbb{R}$ potom*
*1. Je-li $f'(x_0) > 0$ (případně je-li $f'(x_0) = \infty$) potom je $f$ v bodě $x_0$ rostoucí.*
*2. Je-li $f'(x_0) < 0$ (případně je-li $f'(x_0) = -\infty$) potom je $f$ v bodě $x_0$ klesající.*

D ů k a z. Z věty dokážeme pouze bod 1. Jelikož $f'(x_0) > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0. \tag{7.5.1}$$

Pro $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ je $x - x_0 > 0$ a tedy z rovnice (7.5.1) plyne $f(x) > f(x_0)$, což dokazuje, že $f(x_0) < f(x_0, x_0 + \delta)$. Pro $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ je $x - x_0 < 0$ a z (7.5.1) plyne $f(x) < f(x_0)$ odtud $f(x_0 - \delta, x_0) < f(x_0)$. Dohromady dostáváme, že $f(x_0 - \delta, x_0) < f(x_0 < f(x_0, x_0 + \delta)$, to znamená, že $f$ je v $x_0$ rostoucí.

**Důsledek 7.12.** *Je-li $x_0 \in J$ bodem extrému funkce $f : J \to \mathbb{R}$ a existuje-li $f'(x_0)$, potom $f'(x_0) = 0$.*

**Věta 7.13 (Rolleova).** *Buď $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ spojitá mající derivaci (vlastní nebo nevlastní) v každém vnitřním bodě $[a, b]$. Pokud $f(a) = f(b) = 0$, potom existuje $c \in (a, b)$ takové, že $f'(c) = 0$.*

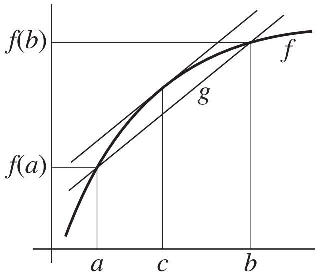
D ů k a z. Je-li $f$ konstantní, pak $c$ je libovolný bod intervalu $(a, b)$.

Uvažujme dva možné případy. První: Existuje-li bod v $(a, b)$, v němž je funkce $f$ kladná, potom vezměme za $c$ bod v němž funkce $f$ nabývá na $[a, b]$ svého maxima. Takový bod existuje podle věty 4.8 a je různý od $a$ i $b$, protože $f$ je kladná v nějakém bodě $(a, b)$.

Zbývá ukázat, že $f'(c) = 0$. Předně $f'(c)$ existuje, jako v každém jiném bodě $(a, b)$. Kdyby $f'(c) > 0$ nebo $\infty$, pak by $f$ byla v $c$ rostoucí a to by znamenalo, že $f$ nenabývá v $c$ svého maxima.

Druhý případ se dokáže obdobně.

Podmínka, že funkce musí mít derivaci v každém bodě $(a, b)$ se nedá vynechat, důkazem toho je funkce $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x| - 1$. Funkční hodnota v $-1$ i v $1$ je rovna 0 ale v intervalu, $(-1, 1)$ není žádný bod v němž by byla derivace rovna 0.




**Věta 7.14 (o střední hodnotě).** *Buď $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ spojitá mající derivaci (vlastní nebo nevlastní) v každém vnitřním bodě $[a, b]$. Potom existuje $c \in (a, b)$ takové, že*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{7.5.2}$$

D ů k a z. Větu dokážeme pomocí Rolleovy věty tak, že ji aplikujeme na rozdíl funkce $f$ a afinní funkce $g$ procházející body $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$ (obdobně jako v (7.1.1)). Tedy uvažujme funkci $F : [a, b] :\to \mathbb{R}$,

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(x_0).$$

Tato funkce splňuje všechny předpoklady věty 7.13 (ověřte!). A tedy existuje $c \in (a, b)$ takové, že $F'(c) = 0$. Protože

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

pro $x = c$ dostáváme

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Odtud již (7.5.2) plyne.

Větu o střední hodnotě ještě zobecníme.

**Věta 7.15.** *Buďte $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ spojité funkce a nechť existuje v každém bodě $x \in (a, b)$ derivace $f'(x)$ (vlastní nebo nevlastní) a vlastní derivace $g'(x) \neq 0$. Potom existuje $c \in (a, b)$ takové, že*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \tag{7.5.3}$$

D ů k a z. Větu dokážeme obdobným způsobem jako předchozí větu. Nejprve, protože $g'(x) \neq 0$ na $(a, b)$ podle věty 7.14 máme, že $g(a) \neq g(b)$. Definujeme funkci $F : [a, b] \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = (f(x) - f(a))(g(b) - g(a)) - (g(x) - g(a))(f(b) - f(a)).$$

Tato funkce splňuje podmínky věty 7.13 a proto existuje $c \in (a, b)$ takové, že $F'(c) = 0$, tedy

$$F'(c) = f'(x)(g(b) - g(a)) - g'(c)(f(b) - f(a)) = 0.$$

Odtud, protože $g(a) \neq g(b)$, již (7.5.3) plyne.

Uvažujme funkci $f = \ln$ na intervalu $[a, b] = [5, 10]$ podle věty o střední existuje $c \in (5, 10)$ takové, že

$$(10 - 5)\ln'(c) = 5/c = \ln(10) - \ln(5) = \ln(2).$$

Protože $5 < c < 10$, znamená to, že $\frac{5}{10} < 5/c = \ln(2) < \frac{5}{5}$. Dostáváme první odhad hodnoty funkce ln v bodě 2,

$$\tfrac{1}{2} < \ln(2) < 1.$$

Pokračujme dále, z nerovnice $1 < 2\ln(2)$ a z monotonosti funkce exp dostaneme

$$e = \exp(1) < \exp(2\ln(2)) = 4. \tag{7.5.4}$$

Číslo e je tedy menší než 4. Později v odstavci Taylorova řada, se dozvíme, jak tyto odhady zpřesnit.

**Věta 7.16.** *Buď $f : J \to \mathbb{R}$ potom*
*1. Je-li $f'(x) > 0$, pro $x \in (a, b)$ (případně je-li $f'(x) = \infty$), pak je $f$ na $J$ rostoucí.*
*2. Je-li $f'(x) < 0$, pro $x \in (a, b)$ (případně je-li $f'(x) = -\infty$), pak je $f$ na $J$ klesající.*
D ů k a z. 1. Zvolme $x, y \in J$, $x < y$, pak podle věty 7.14 existuje $c \in (x, y)$ takově, že $f'(c) = (f(y) - f(x))/(y - x)$. To znamená, že $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) > 0$.

2. Zvolme $x, y \in J$, $x < y$, pak podle věty 7.14 existuje $c \in (x, y)$ takově, že $f'(c) = (f(y) - f(x))/(y - x)$. To znamená, že $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) < 0$.

**Věta 7.17.** *Buď $f : J \to \mathbb{R}$, $x_0 \in J$ potom*
*1. Existuje-li okolí $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tak, že pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ je $f'(x) > 0$ a pro každé $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ je $f'(x) < 0$, má $f$ v $x_0$ lokální maximum;*
*2. Existuje-li okolí $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tak, že pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ je $f'(x) < 0$ a pro každé $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ je $f'(x) > 0$, má $f$ v $x_0$ lokální minimum.*
D ů k a z. 1. Zvolme si $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ libovolně, podle věty 7.14 existuje $c \in (x, x_0)$ takové, že $f(x_0) - f(x) = (x_0 - x)f'(c)$. Podle předpokladu, $f'(c) > 0$ a proto $f(x_0) > f(x)$. Zvolíme-li si $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ podle téže věty máme $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)f'(c)$. Nyní je podle předpokladu $f'(c) < 0$ a proto opět $f(x_0) > f(x)$. To znamená, že $f$ má v $x_0$ lokální maximum.

Bod 2. se dokáže obdobně.

V kombinaci s větou 7.16 lze tuto popsat tak, že pokud funkce je na nějakém levém okolí bodu rostoucí a na nějakém pravém okolí bodu klesající má v tomto bodě lokální maximum; pokud je na nějakém levém okolí bodu klesající a na nějakém pravém okolí bodu klesající má v něm lokální minimum.

Povšimněme si, že předcházející věta nepožaduje, aby existovala derivace funkce $f$ v bodě $x_0$. Proto nám tato věta odhaluje nejen lokální minimum funkce $x^2$ v $x_0 = 0$, ale i lokální minimum funkce $|x|$ v $x_0 = 0$.

**Věta 7.18.** *Buď $f : J \to \mathbb{R}$ potom*
*1. Je-li $f''(x) > 0$, pro $x \in (a, b)$, pak je $f$ na $J$ konvexní.*
*2. Je-li $f''(x) < 0$, pro $x \in (a, b)$, pak je $f$ na $J$ konkávní.*
D ů k a z. Zvolme si body $x, y, z \in J$, $x < y < z$. Podle věty 7.14 existují body $c \in (x, y)$ a $d \in (y, z)$ tak, že $f'(c) = (f(y) - f(x))/(y - x)$ a $f'(d) = (f(z) - f(y))/(z - y)$. Odtud

$$\begin{aligned}
(f'(d) - f'(c))(y - x)(z - y) &= (f(z) - f(y))(y - x) - (f(y) - f(x))(z - y) \\
&= yf(z) - yf(y) - xf(z) + xf(y) - zf(y) + zf(x) + yf(y) - yf(x) \\
&= yf(z) - xf(z) + xf(y) - zf(y) + zf(x) - yf(x) \\
&= f(x)(z - y) + f(y)(x - z) + f(z)(y - x)
\end{aligned} \tag{7.5.5}$$

1. Je-li $f'' > 0$ na $J$, tedy $f'$ je na $J$ rostoucí, potom je $f'(d) > f'(c)$ a levá strana v (7.5.5) je kladná.
2. Je-li $f'' < 0$ na $J$, tedy $f'$ je na $J$ klasající, potom je $f'(d) < f'(c)$ a levá strana v (7.5.5) je záporná.

Nechť $f : J \to \mathbb{R}$ má derivaci v bodě $x_0 \in J$ a označme $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.[1)] Pokud existuje okolí bodu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ takové, že buďto 1. $f|_{(x_0, x_0+\delta)} > g$ a $f|_{(x_0, x_0+\delta)} < g$; nebo 2. $f|_{(x_0, x_0+\delta)} < g$ a $f|_{(x_0, x_0+\delta)} > g$, potom říkáme že funkce má v $x_0$ *inflexi*.

Podrobný pohled na tuto definici prozradí, že na okolí vlevo od inflexního bodu leží graf funkce $f$ nad tečnou v tomto bodě a vpravo pod grafem tečny, nebo naopak. Je jasné, že pokud má funkce $f$ v nějakém bodě inflexi, pak v něm nemůže mít extrém.

Funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ má v bodě $x_0 = 0$ inflexi. Skutečně, nastává zde případ 1. z definice inflexe, tečnou ke grafu funkce $x^3$ v bodě $x_0 = 0$ je přímka $g(x) = 0$, pro libovolné $\delta > 0$ platí $f(-\delta, 0) < 0$ a $f(0, \delta) > 0$.

**Věta 7.19.** *Nechť $f : J \to \mathbb{R}$, $x_0 \in J$ a nechť existuje přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$ takové, že $f^{(n)}(x_0) = 0$, ale $f^{(k)}(x_0) \neq 0$ pro $0 < k < n$. Potom*

---

[1)] Funkce $g$ je tečna k funkci $f$ v bodě $(x_0, f(x_0))$.

*1. Je-li n liché a* $f^{(n)}(x_0) > 0$*, je* $f$ *v bodě* $x_0$ *rostoucí.*
*2. Je-li n liché a* $f^{(n)}(x_0) < 0$*, je* $f$ *v bodě* $x_0$ *klesající.*
*3. Je-li n sudé a* $f^{(n)}(x_0) > 0$*, má* $f$ *v bodě* $x_0$ *lokální minimum.*
*4. Je-li n sudé a* $f^{(n)}(x_0) < 0$*, má* $f$ *v bodě* $x_0$ *lokální maximum.*

D ů k a z. Budeme větu dokazovat pouze pro případ $f^{(n)}(x_0) > 0$, případ, kdy $f^{(n)}(x_0) < 0$, lze dokázat obdobně uvažujeme-li funkci $-f$. Dokazujeme pomocí principu matematické indukce vzhledem k $n$.

Je-li $n = 1$, znamená to, že $f'(x_0) > 0$ a podle věty 7.11 je $f$ v $x_0$ rostoucí.

Nyní nechť $n > 0$ a předpokládejme, že tvrzení věty platí pro $n$ a pokusme se jej dokázat pro $n + 1$. Položme $g = f'$, platí $g^{(n)} = f^{(n+1)}$, funkce $g$ splňuje předpoklady naší věty.

Uvažujeme dva případy. Je-li $n + 1$ sudé, tedy $n$ je liché. Protože $g$ splňuje předpoklady této věty dostaneme, že $g$ a následně i $f'$ je v $x_0$ rostoucí. Protože $f'$ je v $x_0$ rostoucí a $f'(x_0) = 0$ musí na nějakém levém okolí $x_0$ být $f' < 0$ a na pravém $f' > 0$. Použijeme větu 7.17 a dostaneme, že $f$ má v $x_0$ lokální minimum.

Je-li $n + 1$ liché, to znamená $n$ sudé. Užitím této věty na funkci $g$ dostaneme, že $g$ a tedy i $f'$ má v $x_0$ lokální minimum. To ale spolu s $f'(x_0) = 0$ znamená, že na některém okolí $x_0$ je $f'(x) > 0$ pro $x \neq 0$. Proto $f$ musí být v $x_0$ rostoucí.

**Důsledek 7.20.** *Nechť* $f : J \to \mathbb{R}, x_0 \in J$ *a nechť existuje přirozené číslo* $n \in \mathbb{N}$ *takové, že* $f^{(n)}(x_0) = 0$*, ale* $f^{(k)}(x_0) \neq 0$ *pro* $0 < k < n$*. Potom*
*1. Je-li n sudé a* $f^{(n)}(x_0) > 0$*, je* $f$ *na okolí* $x_0$ *konvexní.*
*2. Je-li n sudé a* $f^{(n)}(x_0) < 0$*, je* $f$ *na okolí* $x_0$ *konkávní.*
*3. Je-li n liché, má* $f$ *v* $x_0$ *inflexi.*

Výsledky obdržené v tomto odstavci použijeme pro vyřešení následujícího příkladu.

Uvažujme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x/(x^2 + 1)$, najděme její lokální extrémy, inflexní body, intervaly konvexnosti, konkávnosti, kde je rostoucí a klesající.

Platí

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}.$$

Tedy $f'(x) = 0$ pouze pro $x = 1$ a $x = -1$, vzhledem k tomu, že $f'(x) > 0$ pro $-1 < x < 1$ a $f'(x) < 0$ pro $x < -1$ nebo $x > 1$, dostáváme, podle věty 7.16, $f$ je rostoucí na intervalu $(-1, 1)$ a klesající na $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Podle věty 7.17 víme, že v bodě $x = -1$ nabývá $f$ minima a v $x = 1$ maxima. Protože

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2 + 1)^2 - (1 - x^2)2(x^2 + 1)2x}{(x^2 + 1)^4} = -2x\frac{x^2 + 1 + 2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^3} = 2x\frac{x^2 - 3}{(x^2 + 1)^3}.$$

Poněvadž $f''(x) = 0$ pro $x = -\sqrt{3}, x = 0, x = \sqrt{3}$. Navíc $f'' > 0$ na množině $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, \infty)$ a z věty 7.18 plyne, že je na této množině konvexní. (To nás jen utvrzuje, že je v bodě $x = -1$ lokální minimum, viz věta 7.19 bod 3.) Obdobně dostaneme, že $f$ je konkávní na $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$. Inflexními body jsou body $x = -\sqrt{3}$, $x = 0, x = \sqrt{3}$, protože na jejich okolí se funkce $f$ mění z konvexní na konkávní nebo naopak.

**7.6 Užití derivace pro výpočet limit.** Pro výpočet limit typu $0/0$ nebo $\infty/\infty$ je velice užitečná následující věta.

**Věta 7.21 (L'Hospitalovo pravidlo).** *Buďte* $f, g : J \to \mathbb{R}, x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$. *Pokud existuje* $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *(vlastní nebo nevlastní), pak existuje i* $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *a platí*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{7.6.1}$$

D ů k a z. Nejprve dokážeme větu pro $x_0 \in \mathbb{R}$ a limitu zprava. funkce $\bar{f}, \bar{g}$ rozšíření funkcí $f, g$ tím, že položíme $\bar{f}(x_0) = 0$ a $\bar{g}(x_0) = 0$. Obě funkce $\bar{f}, \bar{g}$ jsou spojité v $x_0$. Pro každé $x \in J$ podle věty 7.15

existuje $c \in (x_0, x)$ tak, že

$$\frac{\bar{f}(x)}{\bar{g}(x)} = \frac{\bar{f}(x) - \bar{f}(x_0)}{\bar{g}(x) - \bar{g}(x_0)} = \frac{\bar{f}'(c)}{\bar{g}'(c)}.$$

Jelikož $c \in (x_0, x)$ dostáváme

$$\lim_{x \to x_{0+}} \frac{\bar{f}(x)}{\bar{g}(x)} = \lim_{c \to x_{0+}} \frac{\bar{f}'(c)}{\bar{g}'(c)}.$$

Případ $\lim_{x \to x_{0-}}$ se dokáže obdobně. Kombinací obou výsledků máme větu dokázánu pro „oboustrannou“ limitu.

Nyní nechť $x_0 = \infty$, připomeňme, že $\lim_{x \to \infty} h(x) = \lim_{x \to 0_+} h(1/x)$. Definujeme funkce $F, G : 1/(J \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}$, $F(x) = f(1/x)$ a $G(x) = g(1/x)$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \to 0_-} \frac{F(x)}{G(x)} = \\
&= \lim_{x \to 0_+} \frac{F'(x)}{G'(x)} \qquad \text{(předchozí odstavec)} \\
&= \lim_{x \to 0_+} \frac{f'(1/x)(-1/x^2)}{g'(1/x)(-1/x^2)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g(x)}.
\end{aligned}$$

Důkaz případu $\lim_{x \to -\infty}$ si jistě čtenář udělá sám.

**Věta 7.22 (L'Hospitalovo pravidlo).** *Buďte $f, g : J \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$. Pokud existuje $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (vlastní nebo nevlastní), pak existuje i $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{7.6.2}$$

D ů k a z. Bude doplněn později...

Pomocí L'Hospitalova pravidla můžeme vypočítat limity, které by jsme bez něj vypočítali jen stěží, například je-li $n \in \mathbb{N}$, potom použijeme-li L'Hospitalovo pravidlo $n$-krát dostaneme

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \ldots = \lim_{x \to \infty} \frac{n!}{e^x} = 0.$$

**7.7 Taylorův polynom, Taylorova řada.** Nechť funkce $f : J \to \mathbb{R}$ je funkce, která má derivace na $J$ až do řádu $n + 1$ v bodě $a \in J$. Polynom $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x - a)^2 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x - a)^n \tag{7.7.1}$$

nazýváme *Taylorův polynom stupně $n$ v bodě $a$*. Definováním Taylorova polynomu se snažíme najít polynom, který by se od funkce $f$ na intervalu $J$ lišil jen „velmi málo“. Tedy zda je možno k libovolně malé odchylce najít polynom $P(x)$ jehož hodnoty by se na $J$ lišily od hodnot $f$ nejvýše o tuto odchylku.

Pomocí Taylorova polynomu počítají hodnoty goniometrických (a jiných) funkcí počítače i kalkulátory. Pokud bychom měli kalkulátor, který zobrazuje pouze čtyři číslice, pak by nám pro pro výpočet hodnoty sin(2) stačil odhad provedený v příkladě 4.

**Věta 7.23 (Taylorova).** *Buďte $a, x \in \mathbb{R}$ různá, označme $I = [a, x]$ (případně $I = [x, a]$, je-li $x < a$). Nechť $f : I \to \mathbb{R}$ má v $I$ derivace až do řádu $n+1$ a nechť $\varphi : I \to \mathbb{R}$ má uvnitř $I$ nenulovou derivaci. Potom existuje $\xi \in \operatorname{int} I$*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \\ \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x-a)^n + R_{n+1}(x), \tag{7.7.2}$$

*kde*

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-\xi)^n}{n!}\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\varphi'(\xi)}f^{(n+1)}(\xi). \tag{7.7.3}$$

D ů k a z. Položme $F : I \to \mathbb{R}$,

$$F(t) = f(x) - f(t) - f'(t)\frac{x-t}{1!} - f''(t)\frac{(x-t)^2}{2!} - \dots - f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}.$$

Zřejmě $F(x) = 0$ a $F(a) = R_{n+1}(x)$. Funkce $F$ má na celém intervalu $I$ derivaci, platí

$$\begin{aligned} F'(t) = -f'(t) - \Big(-f'(t) + f''(t)\frac{x-t}{1!}\Big) - \Big(-f''(t)\frac{x-t}{1!} + f'''(t)\frac{(x-t)^2}{2!}\Big) - \\ - \dots - \Big(-f^{(n-1)}(t)\frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!} + f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\Big) - \\ -\Big(f^{(n-1)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} + f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\Big) = \\ = -f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Na funkce $F$ a $\varphi$ aplikujme větu 7.15, existuje tedy číslo $\xi \in I$ takové, že

$$\frac{F(x)-F(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)} = \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{\varphi'(\xi)}\frac{(x-\xi)^n}{n!}. \tag{7.7.4}$$

Uvědomíme-li si, že $F(x) - F(a) = -R_{n+1}(x)$ z (7.7.4) již (7.7.3) plyne.

**Důsledek 7.24.** *Za předpokladů věty 7.23,*
*1. pro $\varphi : I \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$, dostáváme Lagrangeův tvar zbytku*

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi); \tag{7.7.5}$$

*2. pro $\varphi : I \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = t$, dostáváme Cauchyův tvar zbytku*

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-\xi)^n(x-a)}{n!}f^{(n+1)}(\xi). \tag{7.7.6}$$

Budeme-li zvyšovat řád Taylorova polynomu, dospějeme nakonec k tomu, že polynom bude aproximovat funkce $f$ přesně (bezchybně), třeba i za cenu toho, že se polynom změní v mocninnou řadu? Odpověď, kdy se tak stane, dává následující věta.

**Věta 7.25 (Taylorova řada).** *Buďte $a, x \in \mathbb{R}$ různá, označme $I = [a, x]$ (případně $I = [x, a]$, je-li $x < a$). Nechť $f : I \to \mathbb{R}$ má v $I$ derivace všech řádů a $R_n(x)$ je definováno vzorcem (7.7.3), pro každé $n \in \mathbb{N}$. Potom*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \tfrac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \tfrac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3 + \dots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n, \tag{7.7.7}$$

*právě když* $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

D ů k a z. Je velice jednoduchý, stačí si uvědomit, že pro částečný součet $s_n$ řady ve vzorci (7.7.7) podle věty 7.23 platí $f(x) = s_n + R_{n+1}(x)$. Protože $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, dostaneme $f(x) = \lim s_n$.

Bývá velice výhodné rozvinout Taylorovu v bodě $a = 0$, v takovém případě hovoříme o *Maclaurinově řadě*.

Čtenáři doporučuji vypočítat si Maclaurinovy řady funkcí sin, cos a exp, výsledky potom porovnat s jejich definicemi v předchozí kapitole (měly by se shodovat). Taylorovy řady dalších funkcí například arctan nebo arcsin, zde neuvádíme a čtenář si je musí vyhledat v literatuře či sám vypočítat. Řada pro funkci ln je předmětem příkladu 3.

Pokusme se odhadnout číslo e s chybou menší než 0,001. Použitím věty 7.23 na funkci exp (střed volíme $a = 0$), dostaneme že[2)]

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x). \tag{7.7.8}$$
$$R_{n+1}(x) = \frac{x^n}{(n+1)!}\exp(\xi) < \frac{x^n}{(n+1)!}\exp(x). \qquad \text{(exp je rostoucí)}$$

Již víme z (7.5.4), že $\exp(1) = \mathrm{e} < 4$. Chceme-li mít chybu odhadu menší než 0,001 musíme najít $n$ pro nějž bude $|R_{n+1}(1)| < 0{,}001$. Máme

$$|R_{n+1}(1)| < \frac{1}{(n+1)!}4 < 0{,}001.$$

Pro $n \geq 6$ je poslední nerovnost splněna (ověřte!), stačí tedy sečíst prvních šest členů řady (7.7.8) a na intervalu $[0, 1]$ je chyba menší než 0,001. Proto

$$\exp(1) = \mathrm{e} \doteq 1 + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3!} + \tfrac{1}{4!} + \tfrac{1}{5!} + \tfrac{1}{6!} = \tfrac{1957}{720} = 2.7180555\dots$$

Hodnota $R_7(1)$ se pohybuje kolem 0,000024 a $R_9(1)$ blízko $2 \cdot 10^{-7}$, řada (7.7.8) konverguje skutečně velmi rychle.

## Příklady

1. *Nechť $g : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $x_0 \in J$ je spojitá. Pokud $g'(x_0)$ existuje a $g'(x_0) \neq 0$, potom existuje okolí $U$ bodu $x_0$ takové, že pro všechna $x \in U$, $x \neq x_0$ je $g(x_0) \neq g(x)$.*

Řešení: Jestliže $g'(x_0) > 0$ potom existuje $a > 0$ a okolí $U$ bodu $x_0$ takové, že pro každé $x \in U$, $x \neq x_0$ je

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0) > a > 0$$

To znamená, že

$$g(x) > g(x_0) + a(x - x_0) \qquad \text{(pro } x > x_0\text{)}$$
$$g(x) < g(x_0) + a(x - x_0). \qquad \text{(pro } x < x_0\text{)}$$

Případ kdy $g'(x_0) < 0$ se dokáže obdobně.

2) To už tu jednou bylo, ne?

2. *Najděte lokální extrémy, asymptoty funkce* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = 6 + \frac{5}{(x^2+1)^2},$$

*určete kde je funkce rostoucí, klesající, konvexní a kde je konkávní.*
Řešení: Spočítejme nejprve derivaci

$$f'(x) = \frac{20x}{(x^2+1)^3}. \qquad \text{(ověřte!)}$$

Derivace je rovna 0 pouze pro $x = 0$ (funkce může mít lokální extrém pouze v nule). Snadno zjistíme, že $f'(x) > 0$ pro $x < 0$ a $f'(x) < 0$ pro $x > 0$, z toho již dostáváme, že $f$ je rostoucí na intervalu $(-\infty, 0)$ a klesající na intervalu $(0, \infty)$. Z posledních výsledku plyne, že funkce nabývá lokálního maxima v bodě $x = 0$, minima funkce nenabývá.

Nyní spočítáme druhou derivaci

$$f''(x) = \frac{120x^2}{(x^2+1)^4} - \frac{20}{(x^2+1)^3}. \qquad \text{(ověřte!)}$$

Kořeny rovnice $f''(x) = 0$ jsou $x = \sqrt{5}/5$ a $x = -\sqrt{5}/5$, z toho, že $f''$ je spojitá funkce a odhadem hodnot $f''(-1)$, $f''(0)$ a $f''(1)$ dostaneme, že $f''(x) > 0$ pro $x \in (-\infty, -\sqrt{5}/5) \cup (\sqrt{5}/5, \infty)$ (a $f$ je zde tedy konvexní) a že $f''(x) < 0$ pro $x \in (-\sqrt{5}/5, \sqrt{5}/5)$ (to znamená, že $f$ je zde konkávní).

Koeficienty v rovnici asymptoty $y = kx + q$, pro $x \to \infty$, určíme ze vzorců

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left( \frac{5}{x(x^2+1)^2} + \frac{6}{x} \right) = 0,$$
$$q = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \frac{5}{(x^2+1)^2} + 6 = 6.$$

Asymptota pro $x \to \infty$, má tedy rovnici $y = 6$. Obdobně pro $x \to -\infty$.

3. *Najděte Taylorovu řadu funkce* $f = \ln$ *se středem v* 1 *a určete její interval konvergence*.
Řešení: Taylorova řada má tvar $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$, kde $f_n(x) = f^{(n)}(x)/n! \cdot (x - x_0)^n$. Tedy $f_0 = 0$ (protože $\ln(1) = 0$), dále $f_1(x) = (x - 1)$ (protože $\ln'(x) = 1/x$ a $\ln'(1) = 1$), $f_2(x) = -(x-1)^2/2$ (protože $\ln''(x) = -1/x^2$ a $\ln''(2) = -1$) a $f_3(x) = (x-1)^3/3$ (protože $\ln'''(x) = 2/x^3$ a $\ln'''(1) = 2$). Taylorova řada pro ln v nule bude mít tvar

$$\ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (x-1)^n.$$

Poloměr konvergence této mocninné řady je $1/p$, kde $p = \limsup \sqrt[n]{n} = 1$, pro $x = 0$ řada nekonverguje pro $x = 2$ ano, intervalem konvergence je tedy $(0, 2]$.

4. *Odhadněte číslo* $\sin(2)$ *s chybou menší než* 0,001.
Řešení: Musíme zjistit kolik členů Taylorovy řady musíme sečíst abychom dosáhli požadované přesnosti. Lagrangeův tvar zbytku (7.7.5) pro funkci sinus

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-0)^{n+1}}{(n+1)!} \sin^{(n+1)}(\xi).$$

Využijeme toho, že funkce sin cos nabývají hodnot z intervalu $[-1, 1]$ a že funkce $x^{n+1}$ je rostoucí (nabývá svého maxima v krajních bodech intervalu). Máme

$$|R_{n+1}(2)| \le \frac{2^{n+1}}{n!} < 0{,}001.$$

Poslední nerovnost je splněna pro $n \ge 10$. Stačí tedy sečíst prvních deset členů taylorovy řady pro sinus a získáme požadovaný odhad $\sin(2)$:

$$\sin(2) \doteq 2 - \frac{2^3}{6} + \frac{2^5}{120} - \frac{2^7}{5040} + \frac{2^9}{362880} = \frac{2578}{2835} = 0{,}9093474427.$$

## Cvičení

1. Pomocí definice derivace, vypočítejte $f'(x_0)$ jestliže
   a) $f(x) = x^2, \quad x_0 = 1;$
   b) $f(x) = |x|, \quad x_0 = 2;$
   c) $f(x) = ax^2, \quad x_0 = 1, a \in \mathbb{R};$
   d) $f(x) = x + a, \quad x_0 = 1, a \in \mathbb{R};$
   e) $f(x) = x^2, \quad x_0 = a \in \mathbb{R};$
   f) $f(x) = |x|, \quad x_0 = a \in \mathbb{R};$
   g) $f(x) = ax^2, \quad x_0 = b, a, b \in \mathbb{R};$
   h) $f(x) = x + a, \quad x_0 = b, a, b \in \mathbb{R};$
   i) $f(x) = 1/x, \quad x_0 = a;$
   j) $f(x) = 1/x^2, \quad x_0 = 2;$
2. Najděte minimum a maximum (pokud existují) funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ na množině $A \subset \mathbb{R}$, jestliže
   a) $f(x) = x^2 + 3, \quad A = [-2, 2];$
   b) $f(x) = -(x-3)^2, \quad A = [0, 5];$
   c) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}, \quad A = [-1, 1];$
   d) $f(x) = \frac{x^2+1}{x}, \quad A = [1, 3].$
3. Najděte přímku, která se dotýká paraboly $f(x) = x^2 - 7x + 13$, v bodě $(x_0, f(x_0))$, jestliže
   a) $x_0 = 0;$
   b) $x_0 = 1;$
   c) $x_0 = a \in \mathbb{R}.$
4. Najděte kružnici o poloměru 1, která se dotýká přímky $y = f(x)$ v bodě $(x_0, f(x_0))$, jestliže
   a) $f(x) = 2, \quad x_0 = 1;$
   b) $f(x) = x, \quad x_0 = 2;$
   c) $f(x) = 3x, \quad x_0 = 3;$
   d) $f(x) = 2x + 2, \quad x_0 = 22;$
   e) $f(x) = 2x + a, \quad x_0 = 2a, a \in \mathbb{R}.$
5. Vypočtěte derivaci funkce $f$, kde
   a) $f(x) = \frac{x+2}{x};$
   b) $f(x) = \frac{(x+2)^2}{x};$
   c) $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right);$
   d) $f(x) = \ln(x+2);$
   e) $f(x) = \ln\sqrt{x^2+2};$
   f) $f(x) = \mathrm{e}^{2x^3+3x};$
   g) $f(x) = a^{x^2-1};$
   h) $f(x) = x^{x+1};$
   i) $f(x) = x^{ax+a};$
   j) $f(x) = x^{x+x^2}.$
6. Buď $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkce, která má derivaci v každém bodě $\mathbb{R}$. Vypočítejte derivaci funkce $f$, kde
   a) $f(x) = 2\sqrt{x+1} + g(x);$
   b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + g(2x+1);$
   c) $f(x) = 6x^2 + g(\sqrt{x^2+1});$
   d) $f(x) = \frac{x+1}{2} g(\mathrm{e}^{\sqrt{2x+1}});$
   e) $f(x) = \sqrt{x+1}\, g(\sqrt{x+1});$
   f) $f(x) = a^{x+1} g(\sqrt{x^2+1});$
   g) $f(x) = \ln(x) g(\mathrm{e}^{x^2+1});$
   h) $f(x) = \frac{x^2+1}{g(x+1)};$
   i) $f(x) = x^{g(2x)};$
   j) $f(x) = g(x^{2x}).$

7. Najděte Taylorův polynom funkce $f : I \to \mathbb{R}$ se středem v bodě 0, tak aby aproximoval $f$ na $I$ s přesností do 0,001, jestliže

a) $f(x) = \cos(x)$, $\quad I = [0, 2\pi]$; b) $f(x) = \sin(x)$, $\quad I = [0, 2\pi]$;

c) $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$, $\quad [0, \frac{1}{2}]$.

8. Najděte Taylorovu řadu funkce $f$ se středem v bodě $a$ a určete její interval konvergence, jestliže

a) $f(x) = \sin(x)$, $\quad a = 0$; b) $f(x) = \cos(x)$, $\quad a = 0$;

c) $f(x) = \ln(x)$, $\quad a = 1$;

d) $f(x) = \arcsin(x)$, $\quad a = 0$; e) $f(x) = \arctan(x)$, $\quad a = 0$.

9. Najděte lokální extrémy, inflexní body, asymptoty funkce $f$ a určete, kde je funkce rostoucí, klesající, konvexní, konkávní, jestliže

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$; b) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$; c) $f(x) = x^2 \mathrm{e}^{-x^2}$;

d) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$; e) $f(x) = x + \sin(x)$; f) $f(x) = (x^2-1)^{2/3}$;

g) $f(x) = (x^2-1)^3$; h) $f(x) = x - x^{2/3}$.

10. Pomocí L'Hospitalova pravidla vypočítejte limity

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$; b) $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\ln(x)}\right)$;

c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin(1/x)}{\sin(x)}$; d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos(x)} - \sqrt[3]{\sin(x)}}{\sin^2(x)}$;

e) $\lim_{x\to 0+} \left(\dfrac{1}{2x}\right)^{\tan(x)}$; f) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\arcsin(x)} - \dfrac{1}{\sin(x)}\right)$;

g) $\lim_{x\to 0} (\mathrm{e}^x - 1)\,\mathrm{cotan}(x)$; h) $\lim_{x\to 0} x^{1/x}$;

i) $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+a} - \sqrt{x^2+b})$; j) $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$.

11. Pomocí věty o třech limitách se pokuste dokázat, že funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

má derivaci $f'(0) = 0$.

12. Nalezněte bod $(x, y)$ na přímce $x + 2y = 5$, jehož vzdálenost od bodu $(0, 0)$ je minimální.

13. Odhadněte čísla e, $\mathrm{e}^2$, $\mathrm{e}^3$, $\mathrm{e}^{-1}$, $\ln(2)$, $\ln(\frac{1}{2})$, $\sin(5)$, $\cos(2)$, $\cos(\sqrt{2})$ s chybou menší než 0,001.

14. Pod jakým úhlem se protínají grafy funkcí $f$ a $g$ v příslušných bodech, kde

a) $f(x) = \sin(x)$ a $g(x) = \cos(x)$; b) $f(x) = x^2$ a $g(x) = x^3$;

c) $f(x) = x^2$ a $g(x) = \sqrt{x}$; d) $f(x) = \mathrm{e}^x$ a $g(x) = \mathrm{e}$.

15. Určete rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^{1-x^2}$ v průsečíku s přímkou $y = 1$.

16. Ukažte, že neplatí následující tvrzení: Jestliže existuje vlastní derivace $f'(x_0)$, pak je funkce $f$ spojitá na nějakém okolí bodu $x_0$. (Návod: Pokuste se najít protipříklad.)

17. Najděte funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pro kterou platí $f(0) = 1$, která není rostoucí na žádném okolí bodu 0.

18. Dokažte následující tvrzení: Nechť $f$ je polynom mající pouze reálné kořeny, pak i polynom $f'$ má pouze reálné kořeny. (Návod: Použijte Rolleovu větu.)

19. Dokažte: Nechť $f$ je spojitá a má vlastní nebo nevlastní derivaci na ohraničeném intervalu $(a, b)$. Je-li $f$ neohraničená na $(a, b)$, $f'$ je také neohraničená na $(a, b)$. Jak tomu bude pro neohraničený interval.

20. Dokažte, že derivace periodické funkce je periodická funkce se stejnou periodou.

21. Najděte funkce $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, aby platilo $(fg)' = f'g'$. Pokuste se najít takové nekonstantní funkce.

22. Najděte funkce $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které nejsou spojité v žádném bodě $\mathbb{R}$, ale $f \circ g$ má derivace všech řádů.

23. Ukažte, že nelze sestrojit funkci $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, která má vlastní derivaci na $(0, \infty)$ a aby $\lim_{x\to 0+} f(x) = \infty$ a $\lim_{x\to 0+} f'(x) = 1$. (Návod: Pomocí věty o střední hodnotě, že je-li $\lim_{x\to 0+} f'(x) = 1$, potom je $f$ omezená na nějakém intervalu $(0, \delta)$.)

**Problém hasiče amatéra:**
Mějme potok, který teče rovně. Hasič amatér bydlí od potoka ve vzdálenosti 40 metrů. Hořící škola je jenom 20 metrů od potoka na témže břehu jako hasičův dům. Vzdálenost kolmic na potok procházejících školou a hasičovým obydlím je 100 metrů. V jakém místě potoka musí hasič nabrat vodu do kbelíku, aby doběhl k hořící škole v nejkratším čase, víme-li, že poběží po přímkách a že s plným kbelíkem běží dvakrát pomaleji než s prázdným?

**Problém šikovného strýčka:**
Předpokládejme, že jste šikovný strýček. Váš synovec za vámi přijde s následujícím úkolem: Chtěl by z obdélníkového kusu plechu o rozměrech $50 \times 30$ centimetrů udělat krabici bez víka s co možná největším objemem. Vaším úkolem je tedy zjistit, jak moc je nutno plech nastřihnout, aby z nej utvořená krabice měla největší objem.

**Problém středověkého stavitele:**
Dejme tomu, že si vás pozve známý středověký stavitel, který potřebuje poradit s tímto problémem: Má železný pás o délce 200 palců a chtěl by z něj udělat rám románského okna. Jakou má zvolit šířku okna, aby do chrámu procházelo co nejvíce světla — tedy, aby plocha okna byla co největší?

**Problém konstruktéra firmy PEPSI:**
Předpokládejme, že jste konstruktér firmy PEPSI a dostanete následující úkol. Musíte navrhnout válcovou plechovku, aby se do ní vešlo přesně $250\pi\,\mathrm{cm}^3$ tekutiny a přitom, aby se na ní spotřebovalo co nejméně materiálu — tedy, aby měla co nejmenší povrch.

**Problém líného vrabce:**
Na plotě, jehož výška je 1 metr, sedí vrabec. Ve vzdálenosti 15 metrů od plotu roste strom, který má větev ve výšce 3 metry. Na zemi mezi plotem a stromem jsou hustě rozesety žížaly. V jaké vzdálenosti od plotu má vrabec sezobnout žížalu, aby proletěl trasu plot-žížala-větev po přímkách a po nejkratší dráze?

**Problém náruživého kávomila**
Jako milovník kávy máte následující problém. Máte papír na kávový filtr kruhového tvaru o poloměru 10cm, vystřihnutím kruhové výseče o úhlu $\alpha$ vznikne kávový filtr. Jak zvolit úhel $\alpha$ aby se do něj vešlo co nejvíce kávy. Kolik to bude?

## Výsledky

**6. a)** $1/\sqrt{x+1} + g'(x)$; **b)** $x^2 + 2g'(2x+1)$; **c)** $12x + xg'(\sqrt{x^2+1})/\sqrt{x^2+1}$; **h)** $2x/g(x+1) - (x^2+1)g'(x+1)/(g(x+1))^2$; **i)** $x^{g(2x)}(2g'(2x)\ln(x) + g(2x)/x)$; **j)** $g'(x^{2x})x^{2x}(2\ln(x)+2)$. **7. a)** $P(x) = 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + x^8/8! - x^{10}/10! + x^{12}/12!$; **b)** $P(x) = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + x^9/9! - x^{11}/11!$; **c)** $P(x) = 2x + 2x^3/3 + 2x^5/5 + 2x^7/7 + 2x^9/9$. **8. a)** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)!$, konverguje na $\mathbb{R}$; **b)** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}/(2n)!$, konverguje na $\mathbb{R}$; **c)** $\sum(-1)^{n+1}(x-1)^n/n$, konverguje na $(0,2)$; **10. a)** 1. **b)** $-\frac{1}{2}$; **c)** 0; **d)** $\infty$; **e)** 1; **f)** 0; **g)** 1; **h)** 1; **i)** $(a-b)/2$; **j)** $\mathrm{e}^a$.