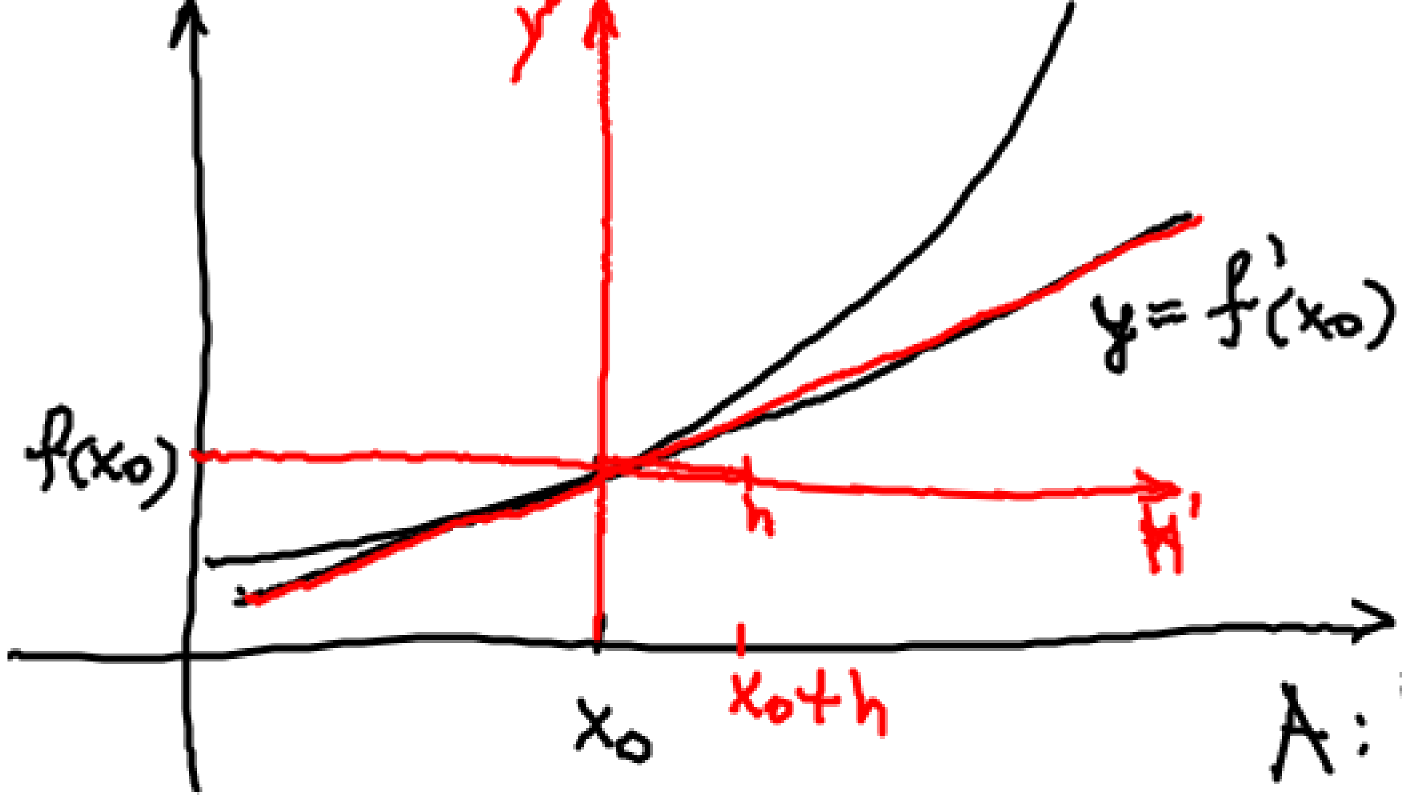
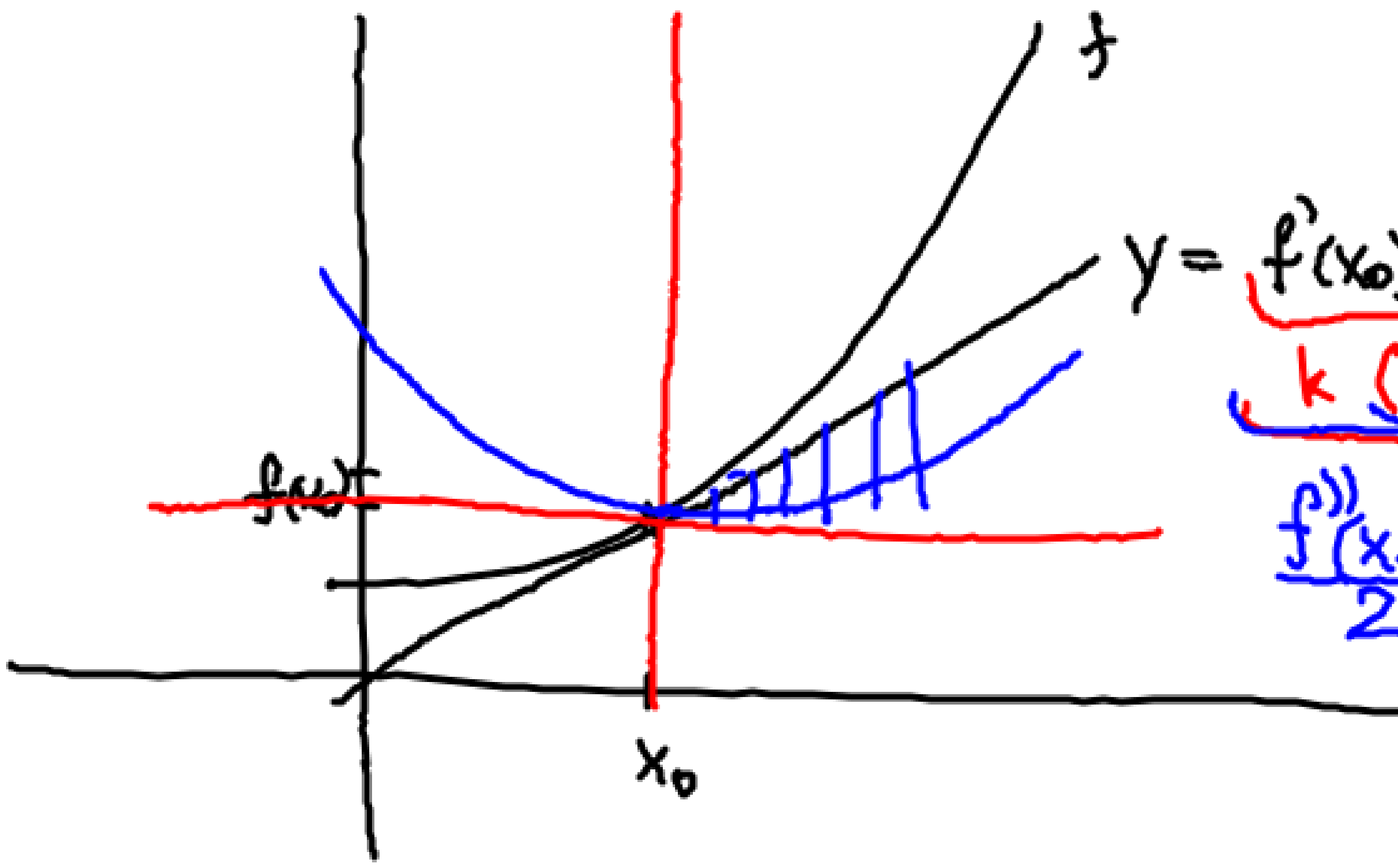


$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$A: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto k \cdot x$

$k = f'(x_0)$



$y = \underbrace{\underbrace{f'(x_0)(x - x_0)}_{k(x-x_0)} + \underbrace{f(x_0)}}$

$\frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$

$\underbrace{\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2} + \underbrace{f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)}$

$f' = 2x + 1$

$f'' = 2$

$x^2 + x + 1 \qquad x_0 = 1$

$\cancel{2}(x-1)^2 + 3(x-1) + 3$

$x^2 - 2x + 1 + 3x - 3 + 3 = x^2 + x + 1$

7.5 Extrémy $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ $x_0 \in X$

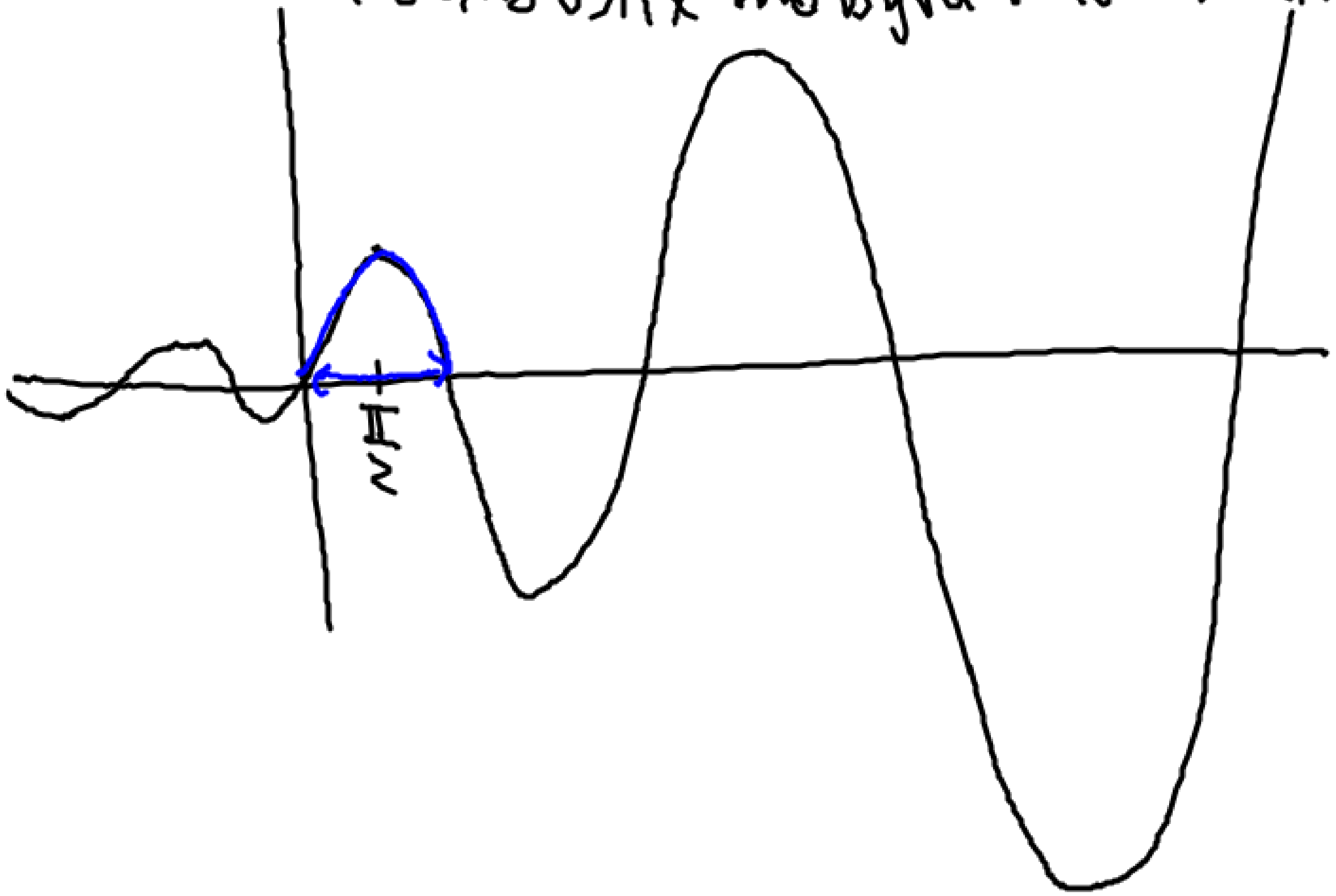
f je <u>rostoucí</u> v x_0 $\exists (x_0-\delta, x_0+\delta)$ takové, že
$f((x_0-\delta, x_0)\cap X) < f(x_0)$; $f(x_0) < f((x_0, x_0+\delta)\cap X)$

<u>klesající</u> x_0 $\exists (x_0-\delta, x_0+\delta)$

$f((x_0-\delta, x_0)\cap X) > f(x_0)$; $f(x_0) > f((x_0, x_0+\delta)\cap X)$

---

f nabývá v x_0 <u>lokální maximum</u> $\exists \underbrace{(x_0-\delta, x_0+\delta)}_{U}$
takové, že $f|_{(x_0-\delta, x_0+\delta)\cap X}$ nabývá v x_0 maximu



Věta 7.11 Buď $f: J \to \mathbb{R}$ potom

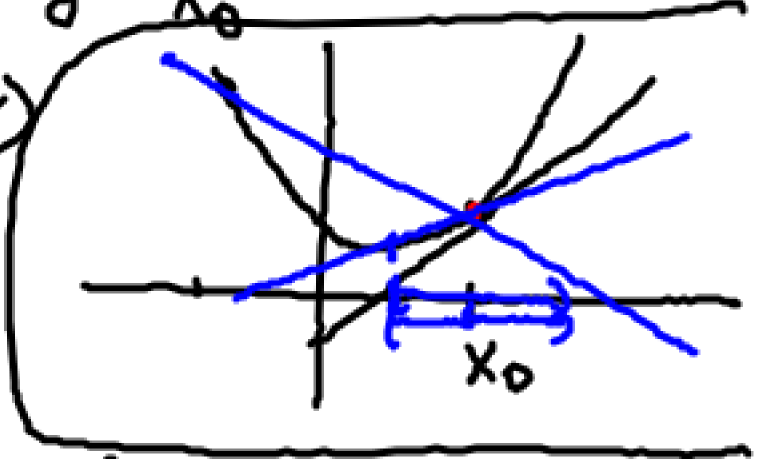
1. Je-li $f'(x_0) > 0$, pak je f v x_0 rostoucí.
2. Je-li $f'(x_0) < 0$, pak je f v x_0 klesající.

Důkaz 1. předpokládáme, že $f'(x_0) > 0$

$$\lim_{x \to x_0} \boxed{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

Existuje $\delta > 0$ že $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$$\boxed{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > c} > 0.$$



- To znamená je-li $x > x_0$

$$f(x_0, x_0 + \delta) > f(x_0)$$

$$f(x) - f(x_0) > c(x - x_0)$$

$$f(x) > f(x_0) + \underbrace{c(x - x_0)}$$

$$f(x) > f(x_0) > 0$$

- $x < x_0$

$$f(x_0 - \delta, x_0) < f(x_0)$$

$$f(x) - f(x_0) < c(x - x_0)$$

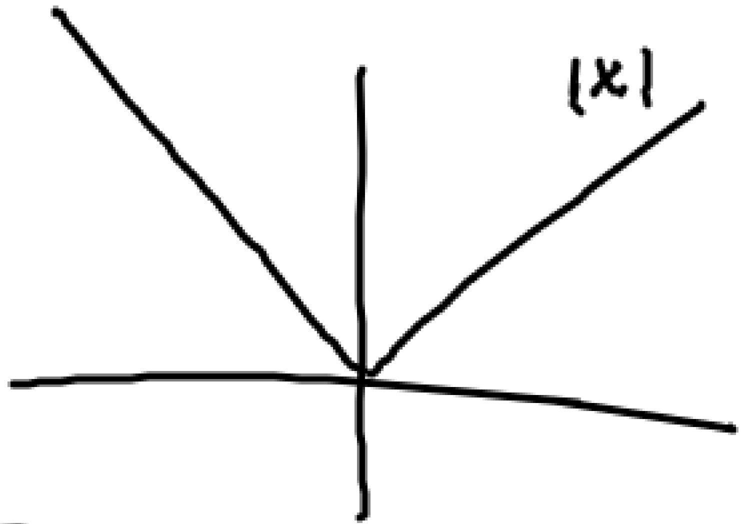
$$f(x) < f(x_0) + c(x - x_0)$$

$$f(x) < f(x_0)$$

Důsledek 7.12 $f: J \to \mathbb{R}$, $x_0 \in J$ je-li x_0 bodem lokálního extrému a existuje-li $f'(x_0)$ potom $f'(x_0) = 0$

Příklad $f(x) = |x|$

f' $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ $= \begin{cases} -1 & x<0 \\ 1 & x>0 \end{cases}$



$f' = 3x^2$ $f(x) = x^3$

$f'(0) = 0$ f nemá v 0 extrém

Věta 7.13 (Rolleova)

Buď $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f(a)=f(b)=0$, f má v (a,b) derivaci, f je spojitá.

Potom existuje $c\in(a,b)$ tak, že $f'(c)=0$.

Důkaz.

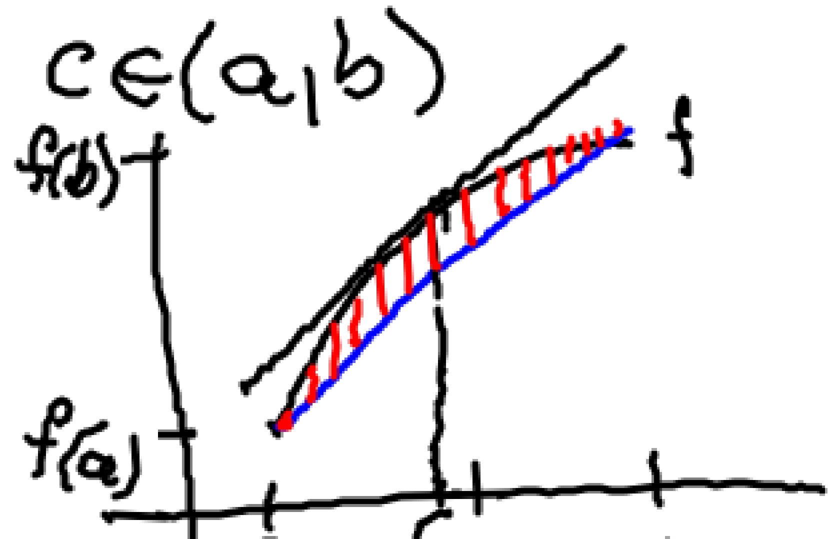
1. $f\equiv 0$
2. $f(x)>0 \ldots x\in(a,b)$

   $f(c)=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ věta 7.12 $f'(c)=0$
3. $f(x)<0 \ldots x\in(a,b)$

Věta 7.14 (o střední hodnotě)

Buď $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ spojitá, která má derivaci v (a,b), potom existuje $c\in(a,b)$

$$f'(c)=\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}.$$



Důkaz $F:[a,b]\to\mathbb{R}$

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a) \qquad F(a)=F(b)=0$$

$$F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Věta 7.15 (Zobecněná věta o střední hodnotě)

Buď $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ spojitou, má derivaci v (a,b)

$g : [a,b] \to \mathbb{R}$, g' v (a,b) $g'(x) \neq 0$ v (a,b)

Potom existuje $c \in (a,b)$

$$\frac{f'(c)}{g(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Důkaz: $F : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$F(x) = (f(x)-f(a))(g(b)-g(a)) - (g(x)-g(a))(f(b)-f(a))$$

$$F'(c) = f'(c)(g(b)-g(a)) - g'(c)(f(b)-f(a)) = 0$$

$$f'(c)(g(b)-g(a)) = g'(c)(f(b)-f(a))$$

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}(g(b)-g(a)) = f(b)-f(a)$$

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

$$g'(d) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a}$$

$$\underbrace{g'(d)}_{\neq 0}\underbrace{(b-a)}_{\neq 0} = \underbrace{g(b)-g(a)}$$

$f = \ln$ $[a,b] = [5,10]$

$c \in [5,10]$ $5 < c < 10$

$1/10 < 1/c < 1/5$

$$f'(c) = \ln'(c) = \frac{1}{c} = \frac{\ln(10)-\ln(5)}{10-5} = \frac{1}{5}(\ln(10)-\ln(5)) = \frac{\ln(2)}{5}$$

$$\frac{1}{10} < \frac{\ln(2)}{5} < \frac{1}{5} \qquad \frac{1}{2} < \ln(2) < 1$$

$$\exp\left(\tfrac{1}{2}\right) < \underbrace{\exp(\ln(2))}_{2} < \exp(1)$$

$$e^{1/2} < 2$$

$$\boxed{e < 4}$$

Věta 7.16 Buď $f: J \to \mathbb{R}$,

1. Je-li $f'(x) > 0$ $\forall x \in (a,b)$ potom f rostoucí na $[a,b]$
2. Je-li $f'(x) < 0$ $\forall x \in (a,b)$ klesající

Důkaz 1. $x < y$ z (a,b) .... $f(x) < f(y)$

$\exists c \in (a,b)$ $\quad 0 < f'(c) = \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$

$0 < f'(c)(y-x) = f(y) - f(x)$ $\Rightarrow$ $f(x) < f(y)$

2. $x < y$

$$0 > f'(c) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

Věta 7.17 Buď $f: J \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in J$

1. $\exists$ okolí $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ takž, že $\forall x \in (x_0-\delta, x_0)$ je $\underline{f'(x) > 0}$ a $\forall x \in (x_0, x_0+\delta)$ je $f'(x) < 0$ potom má f v x_0 lok. maximum
2. $\exists$ $\quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0)$ je $f'(x) < 0$ a $\forall x \in (x_0, x_0+\delta)$ je $f'(x) > 0$ potom má f v x_0 lok. minimum

Důkaz: 1. Zvolíme si $x \in (x_0-\delta, x_0)$ $\quad f(x) < f(x_0)$

$x \in (x_0, x_0+\delta)$ $\quad f(x) < f(x_0)$

$0 < f'(c) = \dfrac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}$

$0 < f'(c)(x_0-x) = f(x_0) - f(x)$

$f(x) < f(x_0)$

$0 > f'(c) = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$0 > f'(c)(x-x_0) = f(x) - f(x_0)$

$f(x_0) > f(x)$