Věta 6.7 Jestliže $\sum |f_n|$ konverguje na Y, pak i řada $\sum f_n$ konverguje na Y a platí $|\sum f_n| \leq \sum |f_n|$.

Důkaz: $\underline{\sum |f_n|}$ konverguje

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall n_1 \geq n_2 \geq n_0$ platí, že
$|f_{n_1}(x)| + \_\_ + |f_n(x)| < \varepsilon$

$\varepsilon > 0 \quad n_0$ máme $n_1 \geq n_2 \geq n_0$
$|f_{n_1}(x) + \_\_ + f_{n_2}(x)| \leq |f_{n_1}(x)| + \_\_ + |f_{n_2}(x)| < \varepsilon$

Věta 6.8. Nechť $(f_n), (g_n)$ posl. funkcí na X a jestliže $(|f_n|) \leq (g_n)$ a řada $\sum g_n$ konverguje stejnoměrně na $Y \subset X$, pak řada $\underline{\sum f_n}$ konver. absolutně stejnoměrně.

Důkaz $\sum g_n$ splňuje Cauchy-Bolzanovu podmínku
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall n_2 \geq n_1 \geq n_0 \quad ||g_{n_1}| + \_\_ + |g_{n_2}|| < \varepsilon$

$|g_{n_1}| + \_\_ + |g_{n_2}| < \varepsilon$

$|f_n| \leq g_n = |g_n|$

$$\begin{array}{ccc} |g_{n_1}| + \_\_ + & |g_{n_2}| & < \varepsilon \\ \vee\!| & \vee\!| & \\ |f_{n_1}| + \_\_ + & |f_{n_2}| & < \varepsilon \end{array}$$

$\boxed{\sum |f_n|}$

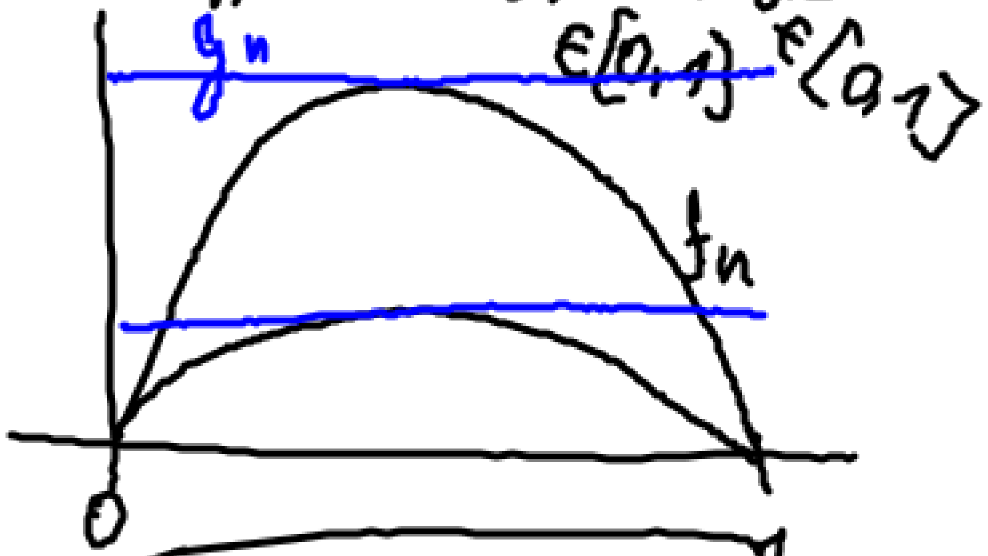
$\varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall n_2 \geq n_1 \geq n_0 : |f_{n_1}| + \_\_ + |f_{n_2}| < \varepsilon$

Př.: $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ $f_n(x) = \frac{1}{n^2} x \underbrace{(1-x)}_{}$ $\in [0,1]$

$|f_n| < g_n$

$g_n = \frac{1}{n^2}$

$\sum \frac{1}{n^2}$ – konverguje absolutně a stejnoměrně



$$\boxed{\sum \frac{1}{n^2} x(1-x)}$$

$$\sum \frac{1}{n^2}$$

Věta 6.9.

Nechť (f_n) - posl. spojitých funkcí a $\sum f_n$ konverguje na Y stejnoměrně k funkci f. Potom f je spojitá na Y.

Důkaz: $\sum f_n$ konverguje na Y stejnoměrně.

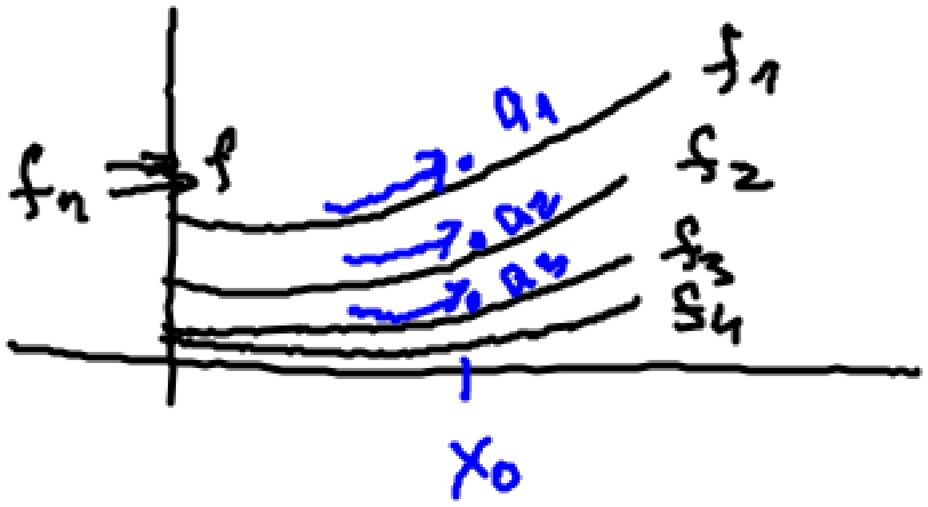
$h_n := f_1 + \dots + f_n$ (h_n) konverguje na Y stejnoměrně

$$\underline{(h_n)} \rightrightarrows f$$

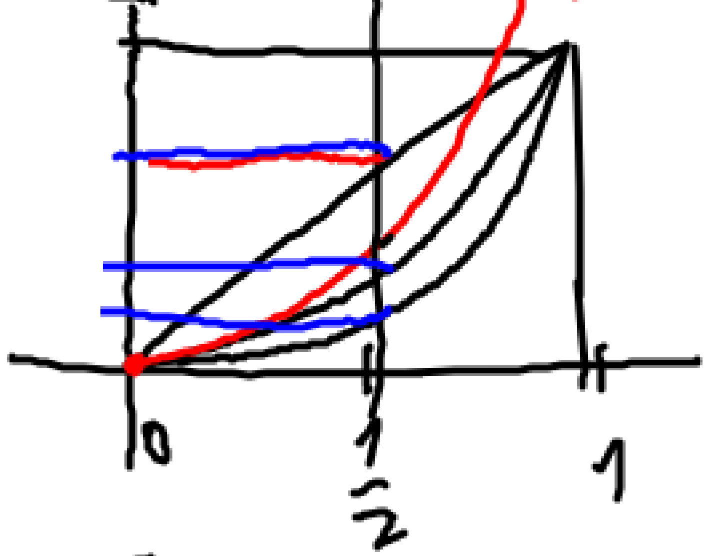
Důsledek 6.10 $\sum f_n \rightrightarrows$ na Y k funkci f a $\forall n \ \exists \lim_{x \to x_0} f_n(x) = a_n$. Potom $\sum a_n \to$

$$\sum a_n = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

$\sum f_n \rightrightarrows f$



$\sum x^n$



$$\sum x^n = x \cdot \frac{1}{1-x} = f$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x}{1-x} = +\infty$$

$$\sum x^n =$$

Mocninné řady

$$\begin{cases} f_1(x) = a_1 \\ f_n(x) = a_n (x-x_0)^{n-1} \end{cases} \qquad \sum f_n$$

Věta 6.11 Oborem konvergence mocninné řady $\sum a_n (x-x_0)^{n-1}$ je neprázdný interval se středem v x_0 nebo $\mathbb{R}$. V prvním případě je poloměr intervalu $1/p$

$$p = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Důkaz: $x \neq x_0$ $\quad p = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$

$$\sum |a_n (x-x_0)^{n-1}| = \sum |a_n| |x-x_0|^{n-1}$$

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n| |x-x_0|^{n-1}} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \sqrt[n]{\frac{|x-x_0|^n}{|x-x_0|}} =$$

$$= \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \frac{|x-x_0|}{\sqrt[n]{|x-x_0|}} = |x-x_0| \underbrace{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}_{}$$

$$|x-x_0| p < 1 \qquad\qquad |x-x_0| p > 1 \quad p \neq 0$$

$$|x-x_0| < \frac{1}{p} \qquad\qquad |x-x_0| > \frac{1}{p}$$

$$x \in \left(x_0 - \frac{1}{p}, x_0 + \frac{1}{p}\right) \qquad\qquad x \notin \left[x_0 - \frac{1}{p}, x_0 + \frac{1}{p}\right]$$

$$\ldots \sum |a_n (x-x_0)^{n-1}| \to \qquad\qquad \sum |a_n (x-x_0)^{n-1}|$$

$$\sum a_n (x-x_0)^{n-1}$$

$$\sum \underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{a_n}(x+1)^{n-1} \qquad x_0=-1$$

$$p = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|} =$$

$$= \limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \limsup \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

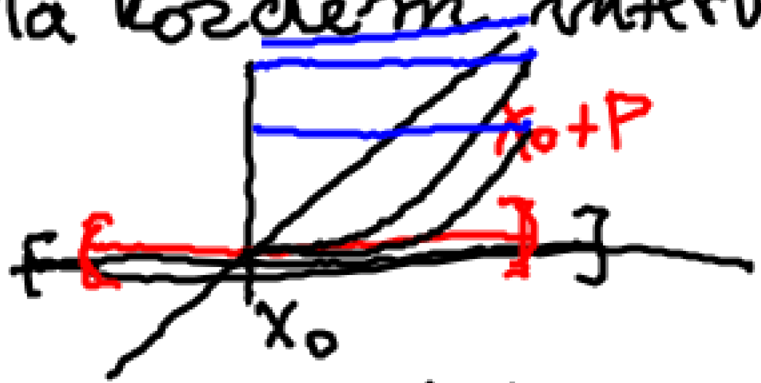
$$(-2,0) = (x_0 - r, x_0 + r) \qquad r = \frac{1}{p}$$

$$\sum \frac{(-1)^n}{n}(-2+1)^{n-1} = \sum \frac{(-1)^n}{n}\cdot(-1)^{n-1} = \sum \frac{(-1)^{2n-1}}{n} = -\sum \frac{1}{n}$$

$$\sum \frac{(-1)^n}{n}(0+1)^{n-1} = \sum \frac{(-1)^n}{n} \to$$

$$(-2, 0]$$

Věta 6.8 Mocninná řada $\sum a_n (x-x_0)^{n-1}$ s poloměrem konvergence r. konverguje absolutně stejnoměrně na každém intervalu $[x_0-p, x_0+p]$ $p<r$.



Důkaz: $\sum |a_n(x-x_0)^{n-1}|$

$$|a_n(x-x_0)^{n-1}| = |a_n||x-x_0|^{n-1} \leq$$

$$\leq \underbrace{|a_n||x_0+p|^{n-1}}_{g_n} \qquad \sum |a_n||x_0+p|^{n-1}$$

$p<r$

Exponenciální funkce

$\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \_\_$$

$\exp(1) = e$

Věta 6.14 1. exp je spojitá;

2. $\forall x,y \in \mathbb{R}$ $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$;

3. exp je rostoucí;

4. $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$ a $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$

Důkaz 2.

$$\exp(x)\cdot\exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \frac{y\,x^{n-1}}{1!(n-1)!} + \_\_ + \frac{y^n}{n!} =$$

$$= \sum \frac{1}{n!}\left(\frac{n!\,x^n}{n!} + \frac{n!}{1!(n-1)!}\,y\,x^{n-1} + \_\_ + \frac{n!}{n!}\,y^n \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x+y)^n = \exp(x+y)$$

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$\exp(y) = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \ldots$$

$$\begin{array}{llllll}
 & \boxed{1} & x & \frac{x^2}{2!} & \frac{x^3}{3!} & \frac{x^4}{4!} \quad \ldots \\
1 & & & & & \\
x+y & y & xy & \frac{x^2 y}{2!} & \frac{x^3 y}{3!} & \ldots \\
\frac{y^2}{2!}+xy+\frac{x^2}{2!} & \frac{y^2}{2!} & \frac{x y^2}{2!} & \frac{x^2 y^2}{2!\,2!} & \ldots & \\
 & \frac{y^3}{3!} & \frac{x y^3}{3!} & \ldots & & \\
 & \frac{y^4}{4!} & \ldots & & &
\end{array}$$

$$\frac{x^n}{n!} + \frac{y x^{n-1}}{1!\,(n-1)!} + \frac{y^2 x^{n-2}}{2!\,(n-2)!} + \ldots$$

$$\ldots \frac{y^n}{n!}$$