# Absolutně konvergentní řady

Věta 5.25
Konverguje-li řada $\sum |x_n|$, konverguje i řada $\sum x_n$
a platí $|\sum x_n| \leq \sum |x_n|$.
Řady $\underline{\sum x_n}$ $\sum |x_n|$ – konvergují
$\sum |x_n|$ nekonverguje $\underline{\sum x_n}$ konverguje

Věta 5.26. Mějme posloupnosti $(x_n), (y_n)$ a reálné číslo c.
Jestliže řady $\sum x_n$ a $\sum y_n$ absolutně konvergují, pak absolutně konvergují i řady $\sum (x_n + y_n)$ a $\sum c x_n$ a platí

$$\sum (x_n + y_n) = \sum x_n + \sum y_n, \qquad (*)$$

$$\sum c x_n = c \sum x_n. \qquad (**)$$

Důkaz:
Podle věty 5.14 řady vlevo od = v $(*)$, $(**)$ konvergují

$$|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n|$$

$$\sum (|x_n| + |y_n|)$$

$$|c x_n| \leq |c|\,|x_n|$$

Věta 5.27 Máme-li $\sum x_n$ – absol. konvergentní, $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekce, potom řada $\sum y_n$, kde $y_n = x_{\sigma(n)}$ absolutně konvergentní a platí, že $\sum y_n = \sum x_n$

| $\sigma(1)$ | $\sigma(2)$ | $\sigma(3)$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 2 | 5 | 4 | 7 | 6 | ... |

Důkaz: $(\overline{s_n}) \dots \sum |x_n|$, $(\overline{t_n}) \dots \sum |y_n|$

$m_\sigma(n) = \sigma(\{1, 2, \dots, n\})$

$m = (1, 3, 3, 5, 5, \dots)$

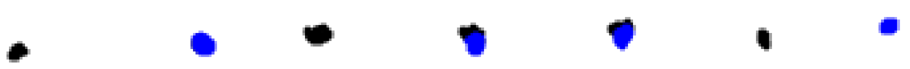
$k_n$ – rostoucí podposloupnost

$k_n = (1, 3, 5, 7, \dots)$

$\sum |y_n|$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\lvert x \rvert$: | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
| $\lvert y \rvert$: | $x_1$ | $x_3$ | $x_2$ | $x_5$ | $x_4$ |
| | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ | $s_5$ |
| | $t_1$ | $t_2$ | $t_3$ | | |

$s_n$



$\overline{s}_{k_n}$

$t_{k_n}$

$$\sum y_n = \sum x_n$$

Věta 5.30 (Riemannova přerovnávací)

$\sum x_n$ – neabsolutně konvergentní, $x \in \mathbb{R}$

existuje $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\sum x_{\sigma(n)} = x$

$\sum x_n \qquad \sum y_n \qquad s_n, t_n$

$x_1 \cdot y_1$

$(x_1+x_2)(y_1+y_2) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_2 + x_2y_1$

$(x_1+x_2+x_3)(y_1+y_2+y_3) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_2 + x_2y_1 +$

$+ x_3y_1 + x_3y_2 + x_3y_3 + x_2y_3 + x_1y_3$

$\vdots$

$= \ldots$

$s_1t_1 \quad (*) \qquad z_n \quad x_ny_1 + x_ny_2 + \ldots + x_ny_n + x_1y_n + \ldots + x_{n-1}y_n$

$s_2t_2$

$s_nt_n - s_{n-1}t_{n-1}$

Veta 6.1, $\sum z_n$ def. (*), $\sum x_n, \sum y_n$ konvergujú potom konverguje i $\sum z_n$ a platí

$$\sum z_n = \sum x_n \cdot \sum y_n$$

---

$$\begin{array}{cccc}
x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 & \cdots \\
x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 & \cdots \\
x_3y_1 & x_3y_2 & x_3y_3 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

Věta 6.2 Pokud máme $\sum x_n$ $\sum y_n$ absolutně konvergentní řady $\sum z_n$ $x_i y_j$ $i,j \in \mathbb{N}$ potom $\sum z_n$ absolutně konvergují

$$\sum z_n = \sum x_n \cdot \sum y_n$$

---

Důsl. 6.3 $\underline{(z_n) = (x_1y_1, x_1y_2 + x_2y_1, x_1y_3 + x_2y_2 + x_3y_1, \ldots)}$

$$\sum z_n = \sum x_n \cdot \sum y_n$$

---

Důkaz: Protože $\sum |x_n|$ $\sum |y_n|$ konvergují podle věty 5.20 konvergují i rada $\underline{\sum |z|}$

$z_1 = x_1 y_1$, $z_2 = x_1y_2 + x_2y_2 + x_2y_1$, ---

$\underline{\sum |x_n|, \sum |y_n|}$

- $z_1 = |x_1y_1|$, $z_2 = |x_1y_2 + x_2y_2 + x_2y_1|$, ---

konvergují podle věty 6.1

- $|x_1y_2 + x_2y_2 + x_2y_1| \leq \underbrace{|x_1||y_1| + |x_2y_2| + |x_2y_1|}$

$$\sum z_n = \sum x_n \cdot \sum y_n$$

Řady funkcí

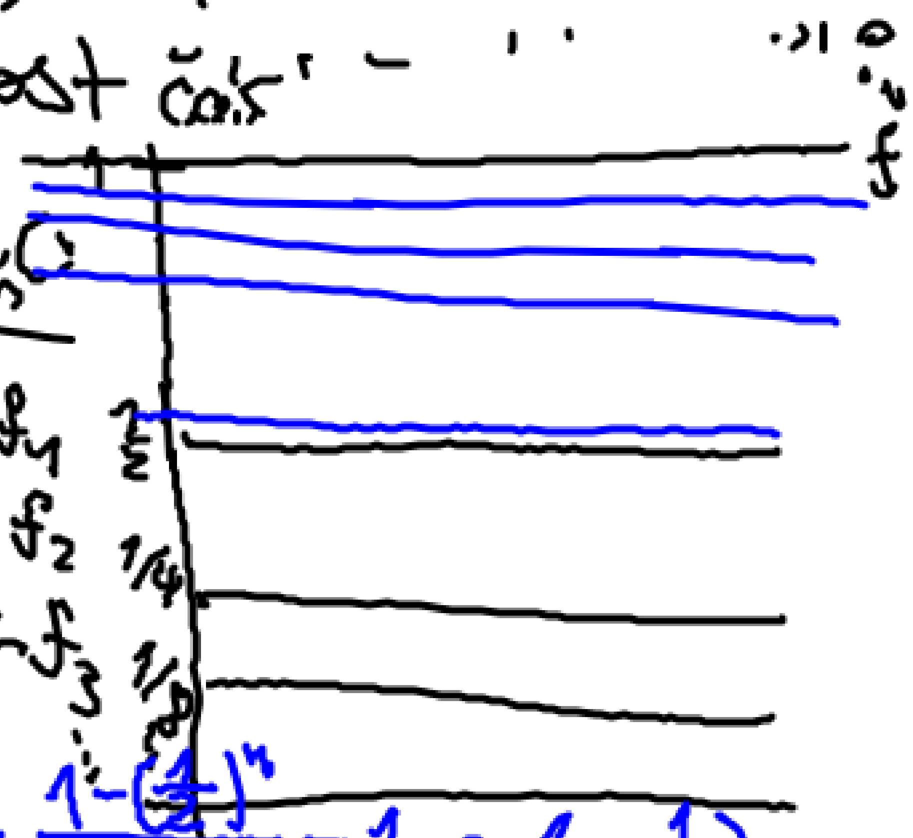
$f_n : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (f_n)$

$\sum f_n$ řadou funkcí definovanou posloupností $(f_n)$, $\sum f_n = f$, $f : Y \subset X \longrightarrow \mathbb{R}$

$\underline{\sum f_n(x) = f(x)}$, $\forall x \in Y$, $h_n : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$h_n = f_1 + \dots + f_n$ – posloupnost část. – ...

$\sum f_n$ $\qquad \lim h_n$



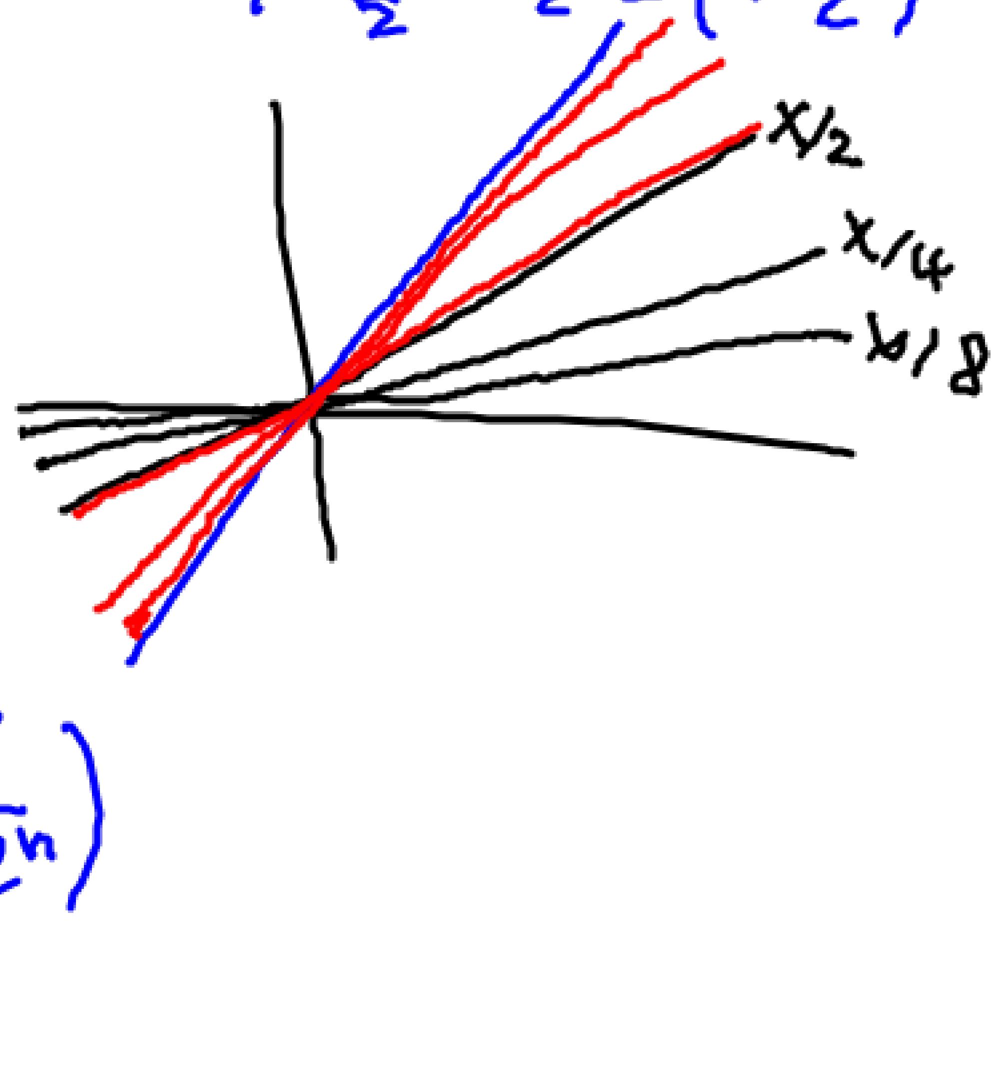

Př.: $f_n = \frac{1}{2^n}$

$$\sum \frac{1}{2^n} = 1 \qquad \sum q^{n-1} = \frac{1}{1-q}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} 2 = 1 \qquad h_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

Př.: $f_n = \frac{x}{2^n}$

$$\sum \frac{x}{2^n} = \frac{x}{2} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{x}{2} 2 = x$$




$$h_n = \frac{x}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = x\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

$\sum f_n$ konverguje stejnoměrně na $Y$
k funkci $f$. jestliže $(h_n)$ konverguje stejnoměrně