3. Základy topologie

V této kapitole uvádíme nejzákladnější topologické pojmy nutné k porozumění následujícím kapitolám. Čtenář zde nalezne definice pojmů: topologie, indukovaná topologie, okolí bodu, kompaktní množina, spojité zobrazení, souvislá množina, homeomorfismus a další. Dále zde uvádíme některá základní tvrzení týkající se definovaných pojmů.

Příklady a cvičení k této kapitolce byly sloučeny s příklady a cvičení v následující kapitole, neboť se týkají pouze přirozené topologie na $\mathbb{R}$.

3.1 Topologický prostor. Na množině X je zadána *topologie*, je-li určen systém τ podmnožin X splňující podmínky (*axiomy topologie*):
1. $\emptyset, X \in \tau$;
2. jsou-li $Y, Z \in \tau$ potom $Y \cap Z \in \tau$;
3. je-li $S \subset \tau$ potom $\cup S \in \tau$.

Prvkům systému τ říkáme *otevřené* množiny, množině, na níž je zadána topologie, *topologický prostor*. Otevřené množině obsahující bod $x \in X$ budeme říkat *okolí bodu* x. Množina $Y \subset X$ se nazývá *uzavřená*, pokud $X \setminus Y$ je otevřená.

Často používaným kritériem toho, zda množina Y je otevřená, je to zda, ke každému bodu $y \in Y$ existuje jeho okolí U takové, že $U \subset Y$. Důkaz tohoto tvrzení přenecháváme čtenáři.

Druhý axiom topologie lze snadno rozšířit na libovolný konečný systém množin. Tohoto faktu budeme využívat.

Příkladem topologického prostoru je $\mathbb{R}$ s přirozenou topologií. Tomuto prostoru je věnována následující kapitola, pro ilustraci si uvedeme definici přirozené topologie již nyní. Množina $U \subset \mathbb{R}$ je nazývá *otevřená v přirozené topologii* $\mathbb{R}$, jestliže ke každému bodu $x \in U$ existuje otevřený interval I takový, že $x \in I \subset U$.

Snadno zjistíme, že interval $(0, 1)$ je otevřená množina, ale interval $[0, 1]$ ani $(0, 1]$ otevřenou množinou není.

Nechť $Y \subset X$ a τ topologie na X, položme

$$\tau_Y = \{Y \cap U \mid U \in \tau\}. \tag{3.1.1}$$

Věta 3.1. *Vztah (3.1.1) definuje topologii na množině Y.*

D ů k a z. Ověříme postupně všechny axiomy topologie.
Axiom 1: V definici (3.1.1) jednou z množin U je i množina $\emptyset$ (topologie na X přece splňuje první axiom topologie). Dostáváme, že $\emptyset \in \tau_Y$. Podobně jednou z množin U bude i X, máme tedy $Y \in \tau_Y$.
Axiom 2. Nechť $U', V' \in \tau_Y$ ze vztahu (3.1.1) plyne, že existují množiny $U, V \in \tau$ takové, že $U' = Y \cap U$ a $V' = Y \cap V$. Máme

$$\begin{aligned} U' \cap V' &= (Y \cap U) \cap (Y \cap V) \\ &= (Y \cap Y) \cap (U \cap V) && \text{(asociativita a komutativita)} \\ &= Y \cap (U \cap V) \in \tau_Y. && (\text{definice } \tau_Y) \end{aligned}$$

Axiom 3. Nechť $S \subset \tau_Y$, ukážeme, že $\cup S \in \tau_Y$. Ze vztahu (3.1.1) plyne, že existuje systém $S' \subset \tau$ takový, že $S = \{Y \cap U \mid U \in S'\}$.

$$\begin{aligned} \cup S &= \cup\{Y \cap U \mid U \in S'\} \\ &= Y \cap \big(\cup\{U \mid U \in S'\}\big) && \text{(ověřte!)} \\ &= Y \cap (\cup S') \in \tau_Y. && (\cup S' \in \tau) \end{aligned}$$

Topologii definované vztahem (3.1.1) se říká *indukovaná topologie* na Y. Množinu Y s touto topologií nazýváme *topologický podprostor* topologického prostoru X.

Nechť Y je podmnožinou X, pak prvek $x \in X$ splňuje právě jednu z následujících podmínek:
1. existuje okolí U bodu x takové, že $U \subset Y$;
2. existuje okolí U bodu x takové, že $U \subset X \setminus Y$;
3. pro každé okolí U bodu x je splněno $U \cap Y \neq \emptyset$ a $U \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset$.

Bod splňující první (resp. druhou, resp. třetí) podmínku se nazývá *vnitřním* (resp. *vnějším*, resp.*hraničním*) *bodem množiny* Y. Množinu všech vnitřních bodů množiny Y nazýváme *vnitřek* množiny Y a značíme $\operatorname{int} Y$. (Obdobně definujeme *vnějšek* množiny Y, který značíme $\operatorname{ext} Y$, a *hranici* množiny Y označovanou $\operatorname{fr} Y$.) Množinu $\operatorname{cl} Y = Y \cup \operatorname{fr} Y$ nazveme *uzávěrem* množiny Y. Množina $Y \subset X$ je *hustá* v X, pokud $\operatorname{cl} Y = X$. Bod x je *hromadný bod množiny* Y, jestliže v každém okolí x leží bod množiny Y různý od x.

Jako lehké cvičení si zkuste dokázat, že pro každou uzavřenou množinu Y platí $\operatorname{cl} Y = Y$.

To, že pro každý prvek $x \in X$ platí právě jedna z podmínek 1–3, vede k závěru, že máme-li libovolnou množinu $Y \subset X$ potom $\operatorname{int} Y \cup \operatorname{fr} Y \cup \operatorname{ext} Y = X$ a že množiny $\operatorname{int} Y$, $\operatorname{fr} Y$, $\operatorname{ext} Y$ jsou po dvou disjunktní.

Z toho, jak jsou definovány, je vidět že množiny $\operatorname{int} Y$ a $\operatorname{ext} Y$ jsou otevřené a přidáme-li fakt, že sjednocení vnitřku vnějšku a hranice je celý prostor, dostaneme, že hranice je uzavřená množina.

Topologický prostor X je *nesouvislý*, pokud existují neprázdné otevřené disjunktní množiny U, V takové, že $U \cup V = X$. Topologický prostor je *souvislý*, není-li nesouvislý. Podmnožina Y topologického prostoru X se nazývá *souvislá*, je-li souvislý topologický prostor Y s indukovanou topologií. Podobně pro nesouvislost.

Například množina $X = (0, 1) \cup \{3\}$ je v $\mathbb{R}$ nesouvislá. (Množinami U a V jsou zde $U = (0, 1)$, $V = \{3\}$[1])

Topologický prostor X se nazývá *Hausdorffův*, jestliže pro každé dva různé body $x, y \in X$ existuje okolí U bodu x a okolí V bodu y takové, že $U \cap V = \emptyset$.

Řekneme, že systém S podmnožin X *pokrývá* množinu (je *pokrytím* množiny) $A \subset X$, jestliže $\cup S \supset A$. Pokrytí se nazývá *konečné*, jestliže systém S je konečný.[2] Pokrytí je *otevřené*, jestliže všechny množiny z S jsou otevřené. Libovolnou podmnožinu $S' \subset S$ nazveme *podpokrytím* pokrytí S množiny A, jestliže S' je pokrytím A.

Podmnožina A topologického prostoru X se nazývá *kompaktní*, jestliže ke každému otevřenému pokrytí množiny A existuje jeho konečné podpokrytí množiny A.

Věta 3.2. *V Hausdorffově topologickém prostoru je každá kompaktní množina uzavřená.*
D ů k a z. Buďte X Hausdorffův topologický prostor, A jeho kompaktní podmnožina. Pokud $X \setminus A = \emptyset$, což je otevřená množina, je A uzavřená. Předpokládejme, že $X \setminus A \neq \emptyset$, zvolme libovolné $x \in X \setminus A$, ke každému bodu $a \in A$ existuje okolí U_a bodu x a okolí V_a bodu a takové, že $U_a \cap V_a = \emptyset$.[3] Systém $\{V_a \mid a \in A\}$ je otevřeným pokrytím A, existuje tedy jeho konečné podpokrytí $S = \{V_{a_1}, \dots, V_{a_n}\}$. Položíme $U = U_{a_1} \cap \ldots \cap U_{a_n}$, že se jedná o okolí bodu x je zřejmé, navíc U je disjunktní s $\cup S$, což je nadmnožina A. Tedy U je disjunktní s A a proto $U \subset X \setminus A$. Dokázali jsme, že ke každému prvku $x \in X \setminus A$ existuje okolí U takové, že $U \subset X \setminus A$. To stačí, porovnej s poznámkou za definicí topologie, k tomu aby $X \setminus A$ byla otevřená.

Věta 3.3. *Uzavřená podmnožina kompaktní množiny je kompaktní.*
D ů k a z. Nechť A je uzavřená podmnožina kompaktní množiny Y topologického prostoru X. Zvolme libovolné otevřené pokrytí S množiny A a pokusme se najít konečné podpokrytí A. Množina $X \setminus A$ je otevřená (doplněk uzavřené množiny) a systém $S' = S \cup \{X \setminus A\}$ je otevřeným pokrytím Y. Protože Y je kompaktní, existuje jeho konečné podpokrytí $T' \subset S'$ množiny Y, pokrytí $T = T' \setminus \{X \setminus A\}$ je konečným podpokrytím S množiny A.

Buďte X, Y topologické prostory, řekneme, že zobrazení $f : X \to Y$ je *spojité v bodě* $x \in X$, jestliže pro každé okolí U bodu $f(x)$ existuje okolí V bodu x takové, že $f(V) \subset U$. Zobrazení f je *spojité*, je-li spojité v každém bodě $x \in X$. Zobrazení f je *nespojité v bodě* $x \in X$, není-li v něm spojité. Zobrazení je *nespojité*, pokud není spojité v každém bodě $x \in X$.

Pokud budeme někdy hovořit o spojitosti zobrazení $f : X \to Y$ na množině $X' \subset X$, budeme tím mít na mysli spojitost zobrazení $f|_{X'}$ vzhledem k indukované topologii na X'.

---

[1] Ano správně, množina $V = \{2\}$ je v indukované topologii na X otevřená, protože $V = (2, 4) \cap X$.

[2] To znamená, že počet prvků množiny S je konečný.

[3] Jsme přece v Hausdorfově prostoru, ne?

Věta 3.4. *Zobrazení $f : X \to Y$ je spojité právě když, vzorem každé otevřené množiny v Y je otevřená množina v X.*
D ů k a z. Budiž f spojité a U otevřená množina v Y, ukážeme, že $f^{-1}(U)$ je otevřená v X. Podle poznámky za definicí topologie stačí ukázat, že ke každému bodu $x \in f^{-1}(U)$ existuje jeho okolí V takové, že $V \subset U$. Množina U je otevřená a obsahuje bod $f(x)$, je to tedy okolí $f(x)$, k němu ze spojitosti f v bodě x existuje okolí U bodu x takové, že $f(U) \subset V$, to znamená, že $U \subset f^{-1}(V)$.

Předpokládejme nyní, že vzorem každé otevřené množiny je otevřená množina. Zvolme libovolný bod $x \in X$ a dokažme, že f je v něm spojité. Zvolme okolí U bodu $f(x)$ libovolně, U je otevřená množina a podle předpokladu je její vzor $V = f^{-1}(U)$ otevřená množina. Protože $x \in V$ a $f(f^{-1}(U)) \subset U$ [4)] našli jsme okolí V bodu x takové, že $f(V) \subset U$.

Obdobně lze dokázat, že pro spojité zobrazení platí, že vzor každé uzavřené množiny je uzavřená množina.

Věta 3.5. *Buďte $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ spojitá zobrazení pak $g \circ f$ je spojité zobrazení.*
D ů k a z. Podle věty 3.4 stačí ukázat, že vzor libovolné otevřené množiny je otevřená množina. Nechť $V \subset Z$ je otevřená potom $(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$ (ověřte!), ale $U = g^{-1}(V)$ je podle věty 3.4 otevřená a podle stejné věty je otevřená i $f^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(V))$.

Věta 3.6. *Spojitý obraz kompaktní množiny je kompaktní množina.*
D ů k a z. Nechť $f : X \to Y$ je spojité zobrazení topologických prostorů, $A \subset X$ kompaktní podmnožina. Ověříme, že $f(A)$ je kompaktní podmnožina. Nechť S je otevřené pokrytí množiny $f(A)$, uvažujme systém $T = \{f^{-1}(U) \mid U \in S\}$, to je otevřené pokrytí A. (Že se jedná o pokrytí plyne z faktu, že pokud $f(A) \subset B$, potom $A \subset f^{-1}(B)$. Ověřte pro $B = \cup S$! Otevřenost množin $f^{-1}(U)$ plyne z věty 3.4.) Pokrytí T má konečné podpokrytí $\{f^{-1}(U_1), \dots, f^{-1}(U_n)\}$ množiny A. Hledaným podpokrytím S množiny $f(A)$ je $\{U_1, \dots, U_n\}$. [5)]

Věta 3.7. *Spojitý obraz souvislé množiny je souvislá množina.*
D ů k a z. Předpokládejme, že při spojitém zobrazení $f : X \to Y$ by obrazem souvislé množiny $A \subset X$ byla nesouvislá množina $B = f(A)$. Pak musí existovat disjunktní otevřené množiny $U, V \subset Y$ takové, že ani jedna z množin $U \cap f(A)$ a $V \cap f(A)$ není prázdná a $(U \cap f(A)) \cup (V \cap f(A)) = f(A)$.[6)] Všimněme si množin $f^{-1}(U) \cap A$ a $f^{-1}(V) \cap A$, jsou to otevřené množiny v indukované topologii na A (množiny $f^{-1}(U)$, $f^{-1}(V)$ otevřené množiny v X jako vzory otevřených množin při spojitém zobrazení věta 3.4). Dále, jsou to disjunktní množiny, protože U a V jsou disjunktní; jsou neprázdné, protože $U \cap f(A) \neq \emptyset$ a $V \cap f(A) \neq \emptyset$. Nakonec: $(f^{-1}(U) \cap A) \cup (f^{-1}(V) \cap A) \subset A$ a současně

$$
\begin{aligned}
&(f^{-1}(U) \cap A) \cup (f^{-1}(V) \cap A) \\
&\quad = A \cap (f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)) && \text{(distributivita)} \\
&\quad = A \cap f^{-1}(U \cup V) && \text{(cvičení 1.14.b))} \\
&\quad \supset A \cap f^{-1}(f(A)) && \text{(protože } U \cup V \supset f(A)\text{)} \\
&\quad = A. && \text{(proč?)}
\end{aligned}
$$

To znamená, že $(f^{-1}(U) \cap A) \cup (f^{-1}(V) \cap A) = A$ a proto je A nesouvislá. To je spor, A má být podle předpokladu souvislá.

Bijektivní zobrazení $f : X \to Y$ topologických prostorů nazveme *homeomorfismus*, pokud f i f^{-1} jsou spojitá. Existuje-li mezi dvěma topologickými prostory homeomorfismus, říkáme, že jsou *homeomorfní*.

Užitím vět 3.6 a 3.7 dostáváme, že se souvislým (resp. kompaktním) prostorem může být homeomorfní pouze souvislý (resp. kompaktní) prostor. Například $[0, 1]$ a $[0, 1) \cup 2$ nemohou být homeomorfní.

Věta 3.8. *Kompozice dvou homeomorfismů je homeomorfismus.*

---

4) Ověřte!

5) Zde jsme využili toho faktu, že máme-li $f : X \to Y$ a $X_1, \dots, X_n \subset X$ potom $f(X_1 \cup \ldots \cup X_n) = f(X_1) \cup \ldots \cup f(X_n)$ (viz. příklad 1.2) a že pokud $Y' \subset f(X)$, potom $f(f^{-1}(Y')) = Y'$.

6) Indukovaná topologie na $f(A)$!

D ů k a z. Plyne (jak?) z toho, že složení dvou bijekcí je bijekce (Kapitola 1) a složení dvou spojitých zobrazení je spojité (věta 3.5).