Matematická analýza I
přednášky M. Málka
cvičení A. Hakové a R. Otáhalové
Zimní semestr 2004/05

4. Topologické vlastnosti množiny reálných čísel

V této kapitole definujeme přirozenou topologii na množině reálných čísel a uvádíme její základní vlastnosti: charakterizujeme souvislé a kompaktní množiny v $\mathbb{R}$ uvádíme (jako důsledek obecných topologických tvrzení z předchozí kapitoly) Bolzanovu a Weierstrassovu větu.

Dále se zabýváme základními vlastnostmi spojitých funkcí reálné proměnné a definujeme pojem limity.

Na konec kapitoly byla naplánována obecná definice mocninné, exponenciální a logaritmické funkce (pomocí výsledků této kapitoly); v této verzi textu ji tam ale bohužel nenajdete.

4.1 Přirozená topologie na $\mathbb{R}$. Množina $U \subset \mathbb{R}$ se nazývá *otevřená*, jestliže ke každému bodu $x \in U$ existuje otevřený interval I takový, že $x \in I \subset U$.

Věta 4.1. *Systém všech otevřených množin $U \subset \mathbb{R}$ je topologie na $\mathbb{R}$.*
D ů k a z. Pro prázdnou množinu a celé $\mathbb{R}$ definice platí první axiom topologie je tedy splněn.

Nechť U, V jsou otevřené, pak pro bod $x \in U \cap V$ existují otevřené intervaly I, J takové, že $x \in I \subset U$ a $x \in J \subset V$. Ovšem $I \cap J$ je otevřený interval a platí $x \in I \cap J \subset U \cap V$, to znamená, že $U \cap J$ je otevřená a je splněn druhý axiom topologie.

Nechť S je systém otevřených množin, zvolme libovolný prvek $x \in \cup S$. Potom existuje $U \in S$ tak, že $x \in U$. Protože U je otevřená, existuje otevřený interval I tak, že $x \in I \subset U$. Z definice sjednocení systému víme, že $x \in I \subset U \subset \cup S$. To dokazuje platnost třetího axiomu topologie.

Nebude-li uvedeno jinak, budeme vždy množinu $\mathbb{R}$ uvažovat s přirozenou topologií.

Snadno se lze přesvědčit, že $\mathbb{R}$ s přirozenou topologií je Hausdorffův topologický prostor.

Podívejme se, jak vypadají souvislé a kompaktní množiny v $\mathbb{R}$. Nejprve uvedeme jednoduché pomocné tvrzení:

Lemma 4.2. *Nechť $X \subset \mathbb{R}$ je množina taková, že pro každé $x, y \in X$, $x < y$, platí $[x, y] \subset X$. Pak X je interval.*[1)]
D ů k a z. Přenecháme čtenáři.

Věta 4.3. *Nechť X je neprázdná podmnožina. Následující dvě podmínky jsou ekvivalentní:*
1. X je souvislá,
2. X je interval.
D ů k a z. Předpokládejme, že množina X není interval. Podle předchozího lemmatu tedy existují body x, y, z takové, že $x < z < y$, $x, y \in X$ a $z \notin X$. Pak ale množiny $(-\infty, z) \cap X$ a $(z, \infty) \cap X$ jsou neprázdné, otevřené v X a tvoří rozklad množiny X. To ovšem znamená, že X není souvislá množina. Dokázali jsme tedy, že každá neprázdná souvislá množina je interval.

Nechť X je interval a předpokládejme, že je nesouvislý. Existují tedy množiny U, V otevřené v $\mathbb{R}$ takové, že $U \cap X$ a $V \cap X$ jsou neprázdné a $X = (U \cap X) \cup (V \cap X)$. Zvolme tedy $x \in U \cap X$ a $y \in V \cap X$, můžeme předpokládat, že $x < y$. Protože X je interval, platí $[x, y] \subset X$. Položme $z = \sup(U \cap (x, y))$, to určitě existuje a platí pro něj, že $x < z < y$ ($z \neq y$, protože V je otevřená množina a existoval by interval J tak, aby $y \in J \subset V$). Bod z leží v $(x, y) \subset X$ leží tedy v jedné z množin $(x, y) \cap U$, $(x, y) \cap V$. V množině $(x, y) \cap U$ ale ležet nemůže, protože by existoval otevřený interval $I \ni z$ tak, že $I \subset (x, y) \cap U$ a z by nebylo horní závora $\sup(U \cap [x, y])$. V množině $(x, y) \cap V$ ležet také nemůže, protože by existoval otevřený interval $J \ni z$ tak, že $J \subset (x, y) \cap V$ a z by nebylo nejmenší horní závora $\sup(U \cap [x, y])$. To je ale ve sporu s $X = (U \cap X) \cup (V \cap X)$.

[1)] Množina $\mathbb{R}$ je ovšem taky interval (poopravte si definici uvedenou dříve).

Důsledek 4.4 (Bolzano). *Je-li $I \subset \mathbb{R}$ interval a $f : I \to \mathbb{R}$ spojitá funkce, pak $f(I)$ je interval.*
D ů k a z. Plyne z předchozí věty a z věty 3.7.

Lemma 4.5 (Heine-Borel). *Každý interval $[x, y] \subset \mathbb{R}$ je kompaktní množina.*
D ů k a z. Nechť S je otevřené pokrytí intervalu $[x, y]$. Označme A množinu všech $z \in [x, y]$ takových, že existuje konečné podpokrytí $T \subset S$ intervalu $[x, z]$. Jistě $x \in A$ a $y \geq A$. Existuje tedy $z_0 = \sup A$. Nyní ověříme dvě věci: 1. $z_0 \in A$, 2. $z_0 = y$. Tím bude náhle tvrzení dokázáno.

1. Předpokládejme, že $z_0 \notin A$ a zvolme $U \in S$ tak, že $z_0 \in U$. Jelikož $z_0 = \sup A$, jistě existuje prvek $z \in A$, který leží v nějakém otevřeném intervalu, obsahujícím z_0. Nechť $T \subset S$ je konečné pokrytí intervalu $[x, z]$. Pak $T \cup \{U\} \subset S$ je konečné pokrytí intervalu $[x, z_0]$, $z_0 \in A$ a dostáváme spor.

2. Předpokládejme, že $z_0 < y$ a označme $T \subset S$ konečné podpokrytí intervalu $[x, z_0]$. Množina $U \in T$, která obsahuje bod z_0, obsahuje i nějaký otevřený interval $I \subset [x, y]$ takový, že $z_0 \in I$. Pro libovolný bod $z \in I$, $z > z_0$, nyní T pokrývá interval $[x, z]$. To znamená, že $z \in A$ a dostáváme spor s tím, že $z_0 = \sup A$.

Věta 4.6. *Nechť $X \subset \mathbb{R}$ je neprázdná podmnožina. Následující dvě podmínky jsou ekvivalentní:*
1. X je kompaktní,
2. X je uzavřená a ohraničená.
D ů k a z. Předpokládejme, že množina X je kompaktní. Podle věty 3.2 je X uzavřená. Předpokládejme, že množina X není ohraničená. Pak systém $\{(-n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ je její otevřené pokrytí, které nemá konečné podpokrytí. To ale znamená, že je ohraničená.

Předpokládejme, že množina X je uzavřená a ohraničená. Pak existuje uzavřený interval $[x, y] \subset \mathbb{R}$ takový, že $X \subset [x, y]$. Tento interval je kompaktní (podle předchozího lemmatu), X je jeho uzavřená podmnožina a podle věty 3.3 je tedy kompaktní.

Důsledek 4.7. *Každá neprázdná kompaktní podmnožina $\mathbb{R}$ má maximum a minimum.*
D ů k a z. Plyne z předchozí věty a z toho, že každá neprázdná uzavřená ohraničená množina v $\mathbb{R}$ má maximum a minimum (proč?).

Důsledek 4.8 (Weierstrass). *Každá spojitá funkce, definovaná na neprázdné kompaktní podmnožině $\mathbb{R}$ má maximum a minimum.*
D ů k a z. Plyne z toho, že spojitý obraz kompaktní množiny je kompaktní množina (věta 3.6), z věty 4.6 a předchozího důsledku.

4.2 Vlastnosti spojitých funkcí v $\mathbb{R}$. Funkce $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se nazývá *spojitá zleva* (případně *zprava*) v bodě $x_0 \in X$, je-li v tomto bodě spojité její zúžení na množinu $X \cap (-\infty, x_0]$ (případně $[x_0, \infty)$). Veškeré výsledky o spojitosti funkce v bodě, které uvedeme, se dají snadno převést na spojitost zprava a zleva. Následující tvrzení je jednoduchým důsledkem definic:

Věta 4.9. *Funkce $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá v bodě $x_0 \in X$, právě když je v tomto bodě spojitá zleva i zprava.*

Věta 4.10. *Funkce $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá v bodě $x_0 \in X$, právě když ke každému otevřenému intervalu J se středem v bodě $f(x_0)$ existuje otevřený interval I se středem v bodě x_0 tak, že $f(I \cap X) \subset J$.*
D ů k a z. Nechť f je spojitá v x_0. Pak k otevřenému intervalu J se středem v bodě $f(x_0)$ existuje okolí U bodu x_0 v topologii $\mathbb{R}$ tak, že $f(U \cap X) \subset J$ (to plyne z definic indukované topologie a spojitosti). Podle definice přirozené topologie toto okolí ovšem obsahuje nějaký otevřený interval I se středem v x_0. Platí $f(I \cap X) \subset J$.

Zvolme nyní naopak libovolné okolí V bodu $f(x_0)$. Podle definice přirozené topologie toto okolí obsahuje nějaký otevřený interval J se středem v $f(x_0)$. K němu ovšem podle předpokladu najdeme otevřený interval I se středem v bodě x_0 tak, že $f(I \cap X) \subset J \subset V$. Tím je dokázána spojitost funkce f v bodě x_0.

Důsledek 4.11. *Funkce $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá v bodě x_0, právě když ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in X$, které splňuje $|x - x_0| < \delta$, platí $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.*
D ů k a z. Stačí si uvědomit, že množina všech $x \in \mathbb{R}$ takových, že $|x - x_0| < \delta$, je interval $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ a množina $\{y \in \mathbb{R} \mid |y - f(x_0)| < \varepsilon\}$, interval $(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$.

Dokažme spojitost funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Zvolme $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ a položme $\varepsilon = \delta$. Nyní pro každé $x \in \mathbb{R}$, pro které platí $|x - x_0| < \delta$, máme

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= \big||x| - |x_0|\big| \\ &\le |x - x_0| && \text{(cvičení 2.10 e))} \\ &< \delta = \varepsilon. \end{aligned}$$

Definujme funkci signum sgn : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{jestliže } x < 0, \\ 0, & \text{jestliže } x = 0, \\ 1, & \text{jestliže } x > 0. \end{cases}$$

Dokažme nespojitost funkce signum v bodě 0. Musíme najít okolí U bodu $\operatorname{sgn}(0) = 0$ tak, že pro každé okolí V bodu 0 neplatí $f(V) \subset U$. Položme $U = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, zvolme nyní libovolné okolí V bodu 0 a ukažme, že V obsahuje bod x takový, že $f(x) \notin (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, protože V je otevřená obsahuje interval I se středem v 0 zvolme $x \in I$, $x > 0$. Platí $\operatorname{sgn}(x) = 1 \notin (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Věta 4.12. *Funkce $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$ je spojitá.*
D ů k a z. Nechť $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. K číslu $\varepsilon > 0$ zvolme δ tak, aby

$$\delta < \min\left\{\frac{|x_0|}{2}, \frac{\varepsilon x_0^2}{2}\right\} \tag{4.2.1}$$

Nyní ze vztahu $|x - x_0| < \delta$ plyne jednak

$$\begin{aligned} \delta > |x - x_0| &= |x_0 - x| \\ &\ge \big||x_0| - |x|\big| && \text{(cvičení 2.10 e))} \\ &\ge |x_0| - |x|, \end{aligned}$$

což znamená, že

$$|x| > |x_0| - \delta, \tag{4.2.2}$$

dále

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| &= \left|\frac{x_0 - x}{x x_0}\right| = \frac{|x_0 - x|}{|x||x_0|} < \frac{|x_0 - x|}{(|x_0| - \delta)|x_0|} < \frac{\delta}{(|x_0| - \delta)|x_0|} < \frac{\delta}{\left(|x_0| - \dfrac{|x_0|}{2}\right)|x_0|} \\ &= \frac{2\delta}{x_0^2} = \frac{2\delta}{\varepsilon x_0^2}\varepsilon < \frac{\delta}{\delta}\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Věta 4.13. *Nechť $f, g, h : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou funkce spojité v bodě x_0, $0 \notin h(X)$. Pak následující funkce jsou rovněž spojité v bodě x_0:*
1. $f + g$,
2. $f \cdot g$,
3. f/h.
D ů k a z. 1. Zvolme $\varepsilon > 0$. Jelikož funkce f a g jsou spojité v x_0, existují čísla $\delta_1, \delta_2 > 0$ taková, že pro $x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ je $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/2$ a pro $x \in (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2)$ je $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon/2$. Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ nyní máme

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)| &\le |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

2. Zvolme $\varepsilon > 0$. Jelikož funkce f a g jsou spojité v x_0, existují čísla $\delta_1, \delta_2, M > 0$ taková, že pro $x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ je $|f(x)| < M$ (každá funkce spojitá v bodě x_0 je na nějakém jeho okolí ohraničená

— viz. cvičení 32), $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon/2|g(x_0)|$ a pro $x \in (x_0-\delta_2, x_0+\delta_2)$ je $|g(x)-g(x_0)| < \varepsilon/2M$. Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Pro $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ máme

$$\begin{aligned} &|f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)| \\ &\quad = |f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)| \\ &\quad \leq |f(x)||g(x) - g(x_0)| + |g(x_0)||f(x) - f(x_0)| \\ &\quad < M\frac{\varepsilon}{2M} + |g(x_0)|\frac{\varepsilon}{2|g(x_0)|} = \varepsilon. \end{aligned}$$

3. Plyne (jak?) z důsledku 4.11, z věty 3.5, věty 4.12 a z bodu 2. této věty.

Důsledek 4.14. *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je funkce pow_n spojitá.*
D ů k a z. Plyne matematickou indukcí ze spojitosti funkce $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ (příklad 1) a z bodu 2.

Důsledek 4.15. *Nechť $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce, $a, b \in \mathbb{R}$. Pak funkce $af + bg$ je spojitá.*
D ů k a z. Plyne ze spojitosti konstantní funkce a z bodů 1. a 2.

Důsledek 4.16. *Každá afinní funkce je spojitá.*
D ů k a z. Plyne ze spojitosti funkce $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ (příklad 1) a předchozího důsledku.

Věta 4.17. *Nechť $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce. Pak*
1. Množina všech $x \in X$ takových, že $f(x) = g(x)$, je uzavřená v X.
2. Množina všech $x \in X$ takových, že $f(x) \leq g(x)$, je uzavřená v X.
D ů k a z. Podle věty 4.13 je funkce $h = f - g$ spojitá. První množina je rovna $h^{-1}\{0\}$, druhá $h^{-1}(-\infty, 0]$. Jsou to tedy vzory uzavřených množin při spojitém zobrazení.

Důsledek 4.18. *Nechť $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce, $A \subset X$ množina hustá v X. Pak z $f|_A = g|_A$ plyne $f = g$.*
D ů k a z. Podle předchozí věty je množina B všech $x \in X$, pro něž $f(x) = g(x)$, uzavřená v X. Platí $X = \mathrm{cl}\, A \subset \mathrm{cl}\, B = B$, neboli $B = X$.

Důsledek 4.19. *Nechť $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce, $A \subset X$ množina hustá v X. Pak z $f|_A \leq g|_A$ plyne $f \leq g$.*
D ů k a z. Stejný jako důkaz předchozího důsledku.

Věta 4.20. *Libovolný otevřený interval v $\mathbb{R}$ je homeomorfní s $\mathbb{R}$.*
D ů k a z. Mějme dva otevřené intervaly (a_1, b_1) a (a_2, b_2). Funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x - b_1}{a_1 - b_1}a_2 + \frac{x - a_1}{b_1 - a_1}b_2$$

je afinní. Funkce f^{-1} existuje (jak se lze snadno přesvědčit) a je rovněž afinní. f je tedy homeomorfismus. Navíc, $f(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$. Příslušným zúžením tedy dostaneme homeomorfismus intervalů (a_1, b_1) a (a_2, b_2).

Definujme nyní zobrazení $g : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ předpisem

$$g(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

(ověřte, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ je $f(x) \in (-1, 1)$). Toto zobrazení má inverzi:

$$g^{-1}(x) = \frac{x}{1 - |x|}$$

(ověřte, že se jedná o inverzi). Zobrazení g i g^{-1} jsou spojitá (to plyne z věty 4.13 a spojitosti absolutní hodnoty) a g je homeomorfismus. Množina $\mathbb{R}$ je tedy homeomorfní s intervalem $(-1, 1)$ a tedy, podle toho, co jsme dokázali před chvílí, i s libovolným jiným ohraničeným otevřeným intervalem (kompozice dvou homeomorfismů je homeomorfismus! Věta 3.8).

Konečně, pro intervaly $(-\infty, a)$ a (b, ∞) platí $g(-\infty, a) = (-1, a/(1+|a|))$ a $g(b, \infty) = (b/(1+|b|), 1)$.

Tím je celá věta dokázána.

Věta 4.21. *Nechť I je interval. Libovolná rostoucí nebo klesající spojitá funkce f intervalu I je homeomorfismus I a $f(I)$. Libovolná prostá spojitá funkce f intervalu I je rostoucí nebo klesající.*

D ů k a z. 1. Předpokládejme například, že funkce f je spojitá a, řekněme, rostoucí. Pak f je bijekce mezi množinami I a $f(I)$ a stačí dokázat, že zobrazení $f^{-1} : f(I) \to I$[2] je spojité. Obrazem libovolného intervalu $[a, b] \subset I$ je podle důsledku 4.4 nějaký interval; jelikož funkce f je rostoucí, musí to být interval $[f(a), f(b)]$. Podobný výsledek získáme pro polootevřené a otevřené intervaly. Nyní již první část tvrzení (pro rostoucí funkci) plyne z důsledku 4.11. Pro klesající funkci lze tvrzení dokázat podobně.

2. Předpokládejme, že funkce f je spojitá a prostá a zvolme libovolně body $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$. Snadno se vidí, že platí $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$, nebo $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$. Kdyby totiž bylo například $f(x_1) < f(x_2)$ a $f(x_3) < f(x_2)$, pak by podle důsledku 4.11 existoval bod $y \in f(x_1, x_2) \cap f(x_2, x_3)$, který by měl vzor jak v intervalu (x_1, x_2), tak v intervalu (x_2, x_3). To by byl spor s injektivností funkce f.

Zvolme nyní libovolné dva body $a, b \in I$, $a < b$, a předpokládejme, že $f(a) < f(b)$. Z tohoto předpokladu odvodíme, že funkce f je rostoucí (z předpokladu $f(a) > f(b)$ se dá stejným postupem odvodit, že je klesající). Připusťme, že funkce f není rostoucí, čili, že existují body $c, d \in I$, $c < d$, s vlastností $f(c) > f(d)$. Nyní se snadno vidí, že ať je vzájemná poloha bodů a, b, c, d jakákoli, vždy z nich lze vybrat trojici $x_1 < x_2 < x_3$, která nesplňuje $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$ ani $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$.

Důkaz je hotov.

4.3 Limita. Mějme topologický prostor X, Hausdorffův topologický prostor Y, zobrazení $f : A \subset X \to Y$ a bod $x_0 \in \operatorname{cl} A$. *Limitou zobrazení f v bodě x_0*azýváme prvek $y_0 \in Y$ takový, že

1. jestliže $x_0 \in A$, pak zobrazení f je spojité v x_0 a $f(x_0) = y_0$,
2. jestliže $x_0 \notin A$, pak zobrazení $\bar{f} : A \cup \{x_0\} \to Y$, definované předpisem

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{jestliže } x \neq x_0, \\ y_0, & \text{jestliže } x = x_0, \end{cases} \tag{4.3.1}$$

je spojité v x_0.

Je-li y_0 limitou zobrazení f v bodě x_0, píšeme $y_0 = \lim_{x \to x_0} f(x)$.

Často budeme pracovat s limitou zobrazení f, zúženém na nějakou podmnožinu $A \cap B$, kde $B \subset A$. V takovém případě používáme tuto symboliku:

$$\lim_{x \to x_0} f|_{A \cap B}(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in B}} f(x). \tag{4.3.2}$$

Věta 4.22. *Nechť $f : A \subset X \to Y$. Pak $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) = y_0$, právě když ke každému okolí V bodu y_0 existuje okolí U bodu x_0 tak, že $f(U \cap A) \subset V$.*

D ů k a z. Věta je přímým důsledkem definic limity spojitého zobrazení a indukované topologie.

Věta 4.23. *Každé zobrazení má v daném bodě nejvýše jednu limitu.*

D ů k a z. Nechť y_1, y_2 jsou dvě různé limity zobrazení $f : A \subset X \to Y$ v bodě $x_0 \in X$, V_1 a V_2 taková okolí bodů y_1 a y_2, že $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ (tato okolí existují — prostor Y je Hausdorffův). Podle věty 4.22 existují okolí U_1 a U_2 bodu x_0 taková, že $f(U_1 \cap A) \subset V_1$ a $f(U_2 \cap A) \subset V_2$. Jelikož x_0 je bod uzávěru množiny A, existuje bod $x \in A$, který leží současně v množinách U_1 a U_2. Pro tento bod ale platí $f(x) \in V_1 \cap V_2$, což je spor.

---

[2]Přesně řečeno, udělali jsme tohle: vzali jsme funkci $\bar{f} : I \to f(I)$, definovanou stejným předpisem, jako funkce f (zúžení oboru hodnot) a zjistili, že je to bijekce. Našli jsme inverzní funkci $\bar{f}^{-1}$ a označili ji f^{-1}. Je to určitá nepřesnost; proto je třeba, abys byl, milý čtenáři, při věci.

Věta 4.24 (limita složeného zobrazení). *Buďte X, Y, Z topologické prostory, x_0 bod uzávěru množiny $A \subset X$. Dále buďte $f : A \to Y$ zobrazení, které má limitu $y_0 = \lim_{x\to x_0} f(x)$, a $g : Y \to Z$ zobrazení spojité v y_0. Pak zobrazení $g \circ f$ má limitu v bodě x_0 a platí*

$$\lim_{x\to x_0} (g \circ f)(x) = g(y_0). \tag{4.3.3}$$

D ů k a z. Plyne přímo z definice limity a věty 3.5.

Než aplikujeme pojem limity na funkce reálné proměnné, zavedeme následující pomocný pojem: *Rozšířenou množinou reálných čísel* nazýváme množinu $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, kde $-\infty$ a ∞ jsou libovolné dva různé prvky, tzv. nevlastní body, které nejsou reálnými čísly.[3)]

Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ klademe $-\infty < x$ a $x < \infty$. Tím jsme rozšířili uspořádání na $\mathbb{R}$ na množinu $\overline{\mathbb{R}}$.

Ověřte, že jsme na $\overline{\mathbb{R}}$ opravdu definovali uspořádání.

Věta 4.25 (zobecněná věta o supremu a infimu). *Každá množina $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ má v $\overline{\mathbb{R}}$ supremum a infimum.*
D ů k a z. Je-li množina X neohraničená shora (případně zdola), je $\sup X = \infty$ (případně $\inf X = -\infty$). Je-li $X = \emptyset$, je $\sup X = -\infty$ a $\inf X = \infty$.[4)] Pro ostatní množiny plyne existence suprema z věty 2.5 a infima z věty 2.6.

Topologii na $\overline{\mathbb{R}}$ definujeme pomocí topologie na $\mathbb{R}$ takto: Množina $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ je otevřená, jestliže následující podmínky
1. množina $X \cap \mathbb{R}$ je otevřená v $\mathbb{R}$,
2. jestliže $-\infty \in X$, pak pro nějaké $x \in \mathbb{R}$ platí $[-\infty, x) \subset X$,
3. jestliže $\infty \in X$, pak pro nějaké $x \in \mathbb{R}$ platí $(x, \infty] \subset X$.[5)]

Limity funkcí reálné proměnné vždy uvažujeme v množině $\overline{\mathbb{R}}$. V limitě $\lim_{x\to x_0} f(x)$ tedy může být $x_0 = -\infty$ nebo $x_0 = \infty$ (pokud je $-\infty$ nebo ∞ hromadným bodem definičního oboru funkce f) a může také vyjít $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ nebo $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$. V prvním případě pak hovoříme o *limitě v nevlastním bodě*, ve druhém o *nevlastní limitě*.

Věta 4.26. *Buď $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotonní funkce. Je-li x_0 bod uzávěru množiny $(-\infty, x_0) \cap X$, pak existuje limita*

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x). \tag{4.3.4}$$

Je-li x_0 bod uzávěru množiny $(x_0, \infty) \cap X$, pak existuje limita

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x). \tag{4.3.5}$$

D ů k a z. Dokážeme existenci limity $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ pro případ, že funkce f je neklesající. Označme $y_0 = \sup_{x<x_0} f(x)$[6)] a zvolme libovolné okolí V bodu y_0. Jistě pro každý bod $x \in X$, $x < x_0$, platí $f(x) \le y_0$ a jistě existuje bod $x_1 \in X$, $x_1 < x_0$, takový, že $f(x_1) \in V$ (obojí plyne z věty 2.7). Pak ale $f((x_1, x_0) \cap X) \subset V$. Tím je tvrzení dokázáno. Kde jsme využili, že funkce f je neklesající?

Limity

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) \text{ a } \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)$$

nazýváme *limitou zleva* a *limita zprava*. Značíme je $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ a $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$.

---

3) Prvkům ∞ a $-\infty$ není třeba přikládat nějaký zvláštní význam. Jsou to prostě pomocné prvky.

4) Proč? Porovnejte vyslovená tvrzení s definicemi suprema, infima horní a dolní závory.

5) Intervaly $[-\infty, x)$ a $(x, \infty]$ definujeme, jak čtenář předpokládá.

6) Tím máme samozřejmě na mysli supremum funkce f, zúžené na množinu $(-\infty, x_0)$. Podobnou symboliku používáme i dále.

Věta 4.27. *Nechť $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce, $x_0 \in \mathbb{R}$ bod uzávěru množiny $(-\infty, x_0] \cap X$ i množiny $[x_0, \infty) \cap X$. Pak limita $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existuje, právě když existují limity $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ a $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ a jsou si rovny. Platí*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) \tag{4.3.6}$$

D ů k a z. Důkaz přenecháme čtenáři.

V následující větě výjimečně předpokládáme, že funkce f, g, h mohou nabývat i nevlastních hodnot.

Věta 4.28 (o třech limitách). *Buďte $f, g, h : X \subset \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ funkce, $f \le g \le h$, $x_0 \in \operatorname{cl} X$. Existují-li limity $\lim_{x\to x_0} f(x)$ a $\lim_{x\to x_0} h(x)$ a platí-li*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = y_0, \tag{4.3.7}$$

pak existuje i limita $\lim_{x\to x_0} g(x)$ a je rovna y_0.
D ů k a z. Nechť V je okolí bodu y_0, $J \subset V$ interval, obsahující bod y_0. Z existence limit funkcí f a h plyne, že existuje okolí U bodu x_0 takové, že $f(U \cap X) \subset J$ a také $h(U \cap X) \subset J$. Z předpokladu $f \le g \le h$ ovšem plyne, že i $g(U \cap X) \subset J$.

Nyní uvedeme několik základních pravidel pro počítání s limitami.

Věta 4.29. *Nechť $f_1, f_2 : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \operatorname{cl} X$. Platí:*
1. Jestliže $\lim_{x\to x_0} f_1(x) = y_1 \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x\to x_0} f_2(x) = y_2$, pak $\lim_{x\to x_0}(f_1 + f_2)(x) = y_1 + y_2$.
2. Jestliže $\lim_{x\to x_0} f_1(x) = \infty$ a funkce f_2 je zdola ohraničená, pak $\lim_{x\to x_0}(f_1 + f_2)(x) = \infty$.
3. Jestliže $\lim_{x\to x_0} f_1(x) = -\infty$ a funkce f_2 je shora ohraničená, pak $\lim_{x\to x_0}(f_1 + f_2)(x) = -\infty$.
D ů k a z. 1. Jestliže $x_0 \in X$, pak funkce f_1 a f_2 jsou spojité v x_0 a $f_1(x_0) = y_1$, $f_2(x_0) = y_1$. To ale znamená, že funkce $f_1 + f_2$ je v tomto bodě také spojitá (věta 4.13.1.) a $(f_1 + f_2)(x_0) = y_1 + y_2$. V případě, že $x_0 \notin X$ použijeme tutéž argumentaci na funkce $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$ z definice limity.
2. Nechť m je dolní závora funkce f_2. Buď M libovolné číslo a U takové okolí bodu x_0, že $f_1(U) > M - m$. Pak pro každé $x \in U$ platí $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) > (M - m) + m = M$.
3. Dokáže se podobně jako 2.

Věta 4.30. *Nechť $f_1, f_2 : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \operatorname{cl} X$, $m \in \mathbb{R}$. Platí:*
1. Jestliže $\lim_{x\to x_0} f_1(x) = y_1 \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x\to x_0} f_2(x) = y_2 \in \mathbb{R}$, pak $\lim_{x\to x_0}(f_1 \cdot f_2)(x) = y_1 y_2$.
2. Jestliže $\lim_{x\to x_0} f_1(x) = \infty$ a $f_2 > m > 0$, pak $\lim_{x\to x_0}(f_1 \cdot f_2)(x) = \infty$.
3. Jestliže $\lim_{x\to x_0} f_1(x) = \infty$ a $f_2 < m < 0$, pak $\lim_{x\to x_0}(f_1 \cdot f_2)(x) = -\infty$.
4. Jestliže $\lim_{x\to x_0} f_1(x) = -\infty$ a $f_2 > m > 0$, pak $\lim_{x\to x_0}(f_1 \cdot f_2)(x) = -\infty$.
5. Jestliže $\lim_{x\to x_0} f_1(x) = -\infty$ a $f_2 < m < 0$, pak $\lim_{x\to x_0}(f_1 \cdot f_2)(x) = \infty$.
6. Jestliže $\lim_{x\to x_0} f_1(x) = 0$ a $|f_2| < m$, pak $\lim_{x\to x_0}(f_1 \cdot f_2)(x) = 0$.
D ů k a z. 1. Plyne z věty 4.13.2.
2. Buď M libovolné číslo a U takové okolí bodu x_0, že $f_1(U) > M/m$. Pak pro každé $x \in U$ platí $(f_1 \cdot f_2)(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) > (M/m) \cdot m = M$.
Body 3, 4, 5 se dokáží podobně jako bod 2.
6. Dokažte sami (viz cvičení).

Příklady

1. *Ukažte, že $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ je spojité zobrazení.*
Řešení: Je nutné ukázat, že $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ je spojité a že jeho inverze je spojitá. Vzhledem k tomu, že inverze k identitě je identita, stačí ukázat, že $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ je spojitá. Musíme tedy ukázat, že je spojitá v každém bodě. Zvolme $x \in \mathbb{R}$ a ukážeme, že $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ je v něm spojitá. Zvolme libovolné okolí U bodu $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(x)$ a za okolí V bodu x vezměme $V = U$. Snadno vidíme, že $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(V) = V = U \subset U$. Tím je důkaz ukončen.

2. *Ukažte, že neexistuje homeomorfismus mezi množinami* (a, b) *a* $(c, d]$.
Řešení: Předpokládáme, že existuje homeomorfismus $h : (c, d] \to (a, b)$ potom ale $h(d) = r \in (a, b)$. Protože h je homeomorfismus, platí $h(c, d) = (a, b) \setminus \{r\}$. To znamená, že spojitým zobrazením h je souvislá množina zobrazena na nesouvislou, a to je spor s větou 3.7. Tím je důkaz ukončen.

3. *Vypočítejte*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + 5x - 15}{3x^2 + 5}.$$

Řešení: Čitatel i jmenovatel podělíme nejvyšší mocninou, která se ve zlomku vyskytuje, a využijeme pravidel pro počítání s limitami:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + 5x - 15}{3x^2 + 5} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 + 5/x - 15/x^2}{3 + 5/x^2}$$
$$= \frac{\lim_{x\to\infty} 2 + \lim_{x\to\infty} 5/x - \lim_{x\to\infty} 15/x^2}{\lim_{x\to\infty} 3 + \lim_{x\to\infty} 5/x^2} = \frac{2 + 0 - 0}{3 + 0} = \frac{3}{2}.$$

4. *Vypočítejte*

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 7x + 12}.$$

Řešení: Protože se jedná o limitu typu $\frac{0}{0}$, můžeme čitatele i jmenovatele upravit na součin kořenových činitelů a potom krátit a dále použít pravidla pro počítání s limitami. Tedy

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 7x + 12} = \lim_{x\to 4} \frac{(x - 4)^2}{(x - 4)(x - 3)} = \lim_{x\to 4} \frac{x - 4}{x - 3} = \frac{\lim_{x\to 4} x - 4}{\lim_{x\to 4} x - 3} = \frac{0}{1} = 0.$$

5. *Buďte* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a* $x_0 \in \mathbb{R}$ *takové, že* $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ *a funkce* g *je ohraničená. Ukažte, že potom* $\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = 0$.
Řešení: Protože g je ohraničená, existuje číslo M takové, že $|g(x)| < M$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Ověříme, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pokud $|x - x_0| < \delta$, potom $|f(x)g(x) - 0| < \varepsilon$. Zvolme tedy $\varepsilon > 0$. Položíme $\varepsilon' = \varepsilon/M$, a z toho že $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pokud $|x - x_0| < \delta$ potom $|f(x) - 0| < \varepsilon'$. Je třeba ověřit, že $|f(x)g(x) - 0| < \varepsilon$ pro všechna x taková, že $|x - x_0|$. Tedy $|f(x)g(x) - 0| = |f(x)||g(x)| < M\varepsilon' = \varepsilon$. Tím je důkaz ukončen.

Cvičení

1. Dokažte: Buďte $A, B \subset X$, pokud $A \subset B$, potom $\mathrm{cl}\, A \subset \mathrm{cl}\, B$.
2. Dokažte: Nechť $f : X \to Z$ je spojité zobrazení a $Y \subset X$ potom zobrazení $f|_Y$ je také spojité.
3. Uveďte příklad nekonečného systému otevřených množin v $\mathbb{R}$ tak, aby jeho průnik nebyla otevřená množina.
4. Uveďte příklad nekonečného systému uzavřených množin v $\mathbb{R}$ tak, aby jeho sjednocení nebyla otevřená množina.
5. Je sjednocení (průnik) dvou souvislých množin v $\mathbb{R}$ opět souvislá množina?
6. Je sjednocení (průnik) dvou kompaktních v $\mathbb{R}$ množin opět kompaktní množina?

7. Nalezněte vnitřek, vnějšek, hranici, uzávěr a množinu hromadných bodů v $\mathbb{R}$ množin

a) (a, b); b) $(a, b]$; c) $\mathbb{Q}$;

d) $\mathbb{N}$; e) $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$; f) $[a, b) \cup (b, c]$;

g) $(a, b) \cap \mathbb{Q}$; h) $\{n/(n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$; i) $[a, \infty)$.

8. Uvažujme $\mathbb{R}$ s přirozenou topologií, rozhodněte, zda

a) systém $S = \{(-5, 1), (0, 3), [0, 1], (2, 5), (3, 9)\}$ je otevřeným pokrytím množiny $\{1, 2, 3\}$;

b) systém $S = \{(n-1, n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$ je otevřeným pokrytím množiny $\{1\} \cup (2, 5]$ a najděte konečné podpokrytí.

9. Dokažte, že systém $S = \{(1/n, 1) \mid n \in \mathbb{N}\}$ je otevřené pokrytí intervalu $(0, 1)$, a že z něj nelze vybrat konečné podpokrytí.

10. Které z následujících podmnožin $\mathbb{R}$ jsou kompaktní a proč:

a) $\{0\}$; b) $\{1, \ldots, n\}$; c) $(0, 1)$;

d) $(0, 1])$; e) $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$; f) $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

11. Ukažte, že množina $\overline{\mathbb{R}}$ je kompaktní.

12. Které z následujících podmnožin $\mathbb{R}$ jsou souvislé a proč:

a) $\{1, 2\}$; b) $(0, 1)$; c) $[1, 2]$;

d) $(0, 1) \cup (1, 2]$; e) $\mathbb{R}$; f) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;

g) $\mathbb{Q}$; h) $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

13. Ukažte, že zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5x$ je spojité.

14. Ukažte, že zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ je spojité.

15. Dokažte, že

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 7x$ je spojitá v 7; b) χ je nespojitá v každém bodě;

c) $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \cdot \chi$ je spojitá pouze v nule; d) $\chi \circ \chi$ je spojitá;

e) ϱ je spojitá pouze v iracionálních číslech;

f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{4} \operatorname{sgn}(x - \frac{43}{28})$ je nespojitá v $\frac{43}{28}$.

16. Zjistěte, kde jsou následující funkce spojité:

a) $7x$; b) $3x^2$;

c) $x \cdot \operatorname{sgn}(x)$.

17. Buďte $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojité funkce a $a \in \mathbb{R}$. Dokažte, že potom $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ a $a \cdot f$ jsou spojité funkce.

18. Uveďte příklad nespojitých funkcí tak, aby jejich součet (rozdíl) byl spojitá funkce.

19. Uveďte příklad spojité funkce tak, aby její inverze byla nespojitá.

20. Uveďte příklad nespojité funkce, která nenabývá na $[a, b]$ maxima ani minima.

21. Uveďte příklad spojité funkce, která nenabývá maxima (ani minima) na intervalu (a, b).

22. Ukažte, že zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x$ (resp. $f(x) = -x$) je homeomorfismus.

23. Ukažte, že jsou-li f, g spojité funkce na $\mathbb{R}$, pak množina $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq g(x)\}$ (resp. $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < g(x)\}$) je otevřená.

24. Vyvraťte následující tvrzení: Buď A hustá množina v $\mathbb{R}$, f, g spojité funkce na $\mathbb{R}$ takové, že $f|_A < g|_A$. Potom $f < g$.

25. Najděte nějaký homeomorfismus intervalů (a, b) a , (c, d), kde $(a, b), (c, d) \subset \mathbb{R}$.

26. Ukažte, že neexistuje homeomorfismus mezi množinami:

a) (a, b) a $[c, d]$; b) $(a, b) \cup (c, d)$ a (r, s), kde $b \leq c$.

27. Uveďte příklad funkcí $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tak, aby

a) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$ a $\lim_{x\to 0} f(x)/g(x) = 256$;

b) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = \infty$ a $\lim_{x\to 0} f(x)/g(x) = 0$;

c) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = \infty$ a $\lim_{x\to 0} f(x) - g(x) = \infty$;

d) $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 0} g(x) = \infty$ a $\lim_{x\to 0} f(x) - g(x) = \mathrm{e}^{13}$.

28. Nechť $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$ a $\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = 1$. Vypočtěte $\lim_{x\to 0} g(x)$. Nechť $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ a $\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = 1$. Co platí pro limitu $\lim_{x\to 0} g(x)$?

29. Pomocí definice limity vypočtěte

a) $\lim_{x\to -\infty} 1/x$; b) $\lim_{x\to \infty} 1/x$; c) $\lim_{x\to 0^-} 1/x$;

d) $\lim_{x\to 0^+} 1/x$; e) $\lim_{x\to 0} x \cdot \chi(x)$.

30. Vypočítejte

a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{-3x^2 + 2x^2 + x}{17x^3 - x^2 + 10}$; b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + 6x + 125}{-6x^3 + 4}$; c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2 + 6x}{-6x^3}$;

d) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}$; e) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + 2x + 4}{x - 2}$; f) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2 + x} - \sqrt{2}}{x}$;

g) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{x^3}{x - 1}}$; h) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$; i) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x^3 + 6x}{5x^3 + x^2} + |x+2|$;

j) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x + 1}}$; k) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$; l) $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn}(x)$;

m) $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{2x - 1}{|x - 1|}$; n) $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{2x - 1}{|x - 1|}$; o) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x + 1} - 1}{\sqrt{x + 1} + 1}$;

p) $\lim_{x\to 2} \dfrac{2x^2 - 10x + 12}{x^2 + 5x - 14}$; q) $\lim_{x\to 4} \dfrac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 7x + 12}$; r) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + 7x - 44}{x^2 - 6x + 8}$;

s) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{x^3}{x - 1}} - x$; t) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt[5]{x^2 - 1}}{\sqrt[3]{x^3 + 1} - \sqrt[4]{x^3 - 1}}$.

31. Vypočítejte následující limity, jestliže $a > 0$:

a) $\lim_{x\to\infty} 2^{-x}$; b) $\lim_{x\to 0} 2^{-x}$; c) $\lim_{x\to 1} 2^{(x-1)/(x+2)}$;

d) $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\log_a x} - \dfrac{1}{x - 1}\right)$; e) $\lim_{x\to\infty}(\log_a(2x + 1) - \log_a(x + 2))$;

f) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\log_a^2 x}{x}$; g) $\lim_{x\to\infty} \log_a x - \log_a(3x + 2)$.

32. Dokažte, že pokud existuje konečná limita funkce v nějakém bodě, potom existuje jeho okolí, na kterém je tato funkce ohraničená.