2. Reálná čísla, funkce reálné proměnné

V této kapitole zavádíme množinu, na níž stojí celá matematická analýza: množinu reálných čísel. Tuto množinu definujeme *axiomaticky*: nesnažíme se ji zkonstruovat (dokonce se ani nezabýváme otázkou, co to reálná čísla jsou); vyjmenujeme jen několik vlastností, které tato množina má, a v dalších úvahách vycházíme pouze z nich.

Základní roli v definici množiny reálných čísel hraje axiom spojitosti a v dalším textu pak věta o supremu, která je s tímto axiomem ekvivalentní.

Dále definujeme ostatní základní číselné množiny: množinu přirozených, celých, racionálních a iracionálních čísel s tím, že otázku existence iracionálních čísel odsouváme na později.

Závěrem této kapitoly se zabýváme základními vlastnostmi funkcí reálné proměnné, jako jsou monotonnost, extrémy, konvexnost, parita. Definujeme také základní operace na množinách funkcí, afinní a mocninné funkce.

2.1 Binární operace. *Binární operací* na množině X rozumíme libovolné zobrazení z kartézského součinu $X \times X$ do X. Hodnotu binární operace $*$ v bodě $(x, y) \in X \times X$ označujeme $x * y$.

Nechť X je množina. Pak průnik, sjednocení a rozdíl množin definují binární operace na množině $\exp X$ (první a druhá byly definovány v (1.2.1) a (1.3.6)). Tyto operace se značí (jak jinak) $\cap$, $\cup$ a $\setminus$.

Označme Y^X množinu všech zobrazení z X do Y. Pro libovolná dvě zobrazení $f, g \in X^X$ platí $g \circ f \in X^X$. Kompozice zobrazení tedy definuje binární operaci $\circ$ na množině X^X.

Operace $*$ na množině X se nazývá *komutativní*, když pro každé dva prvky $x, y \in X$ platí

$$x * y = y * x \tag{2.1.1}$$

a *asociativní*, když pro každé tři prvky $x, y, z \in X$ platí

$$(x * y) * z = x * (y * z) \tag{2.1.2}$$

(tuto hodnotu značíme $x * y * z$).

Neutrálním prvkem operace $*$ na množině X rozumíme takový prvek $e \in X$, že pro každé $x \in X$ platí

$$\begin{aligned} e * x &= x, \\ x * e &= x. \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

Věta 2.1. *Každá binární operace má nejvýše jeden neutrální prvek.*
D ů k a z. Předpokládejme, že e_1, e_2 jsou dva neutrální prvky operace $*$. Z první rovnice (2.1.3) plyne, že $e_1 * e_2 = e_2$ (jelikož e_1 je neutrální prvek), z druhé rovnice zase $e_1 * e_2 = e_1$ (jelikož e_2 je neutrální prvek). Dostáváme $e_1 = e_2$.

Uvažujme operace průniku, sjednocení a rozdílu množin na množině $\exp X$. Z věty 1.1 plyne, že průnik a sjednocení jsou komutativní a asociativní. Neutrálním prvkem průniku je množina X (jelikož pro každé Y platí $X \cap Y = Y \cap X = Y$), neutrálním prvkem sjednocení je prázdná množina ($Y \cup \emptyset = \emptyset \cup Y = Y$). Operace rozdílu množin ukazuje, že neutrální prvek nemusí existovat (pro každé $Y \subset X$ je $Y \setminus Y = \emptyset$; odtud plyne, že jedině prázdná množina má šanci být neutrálním prvkem. Jak se ovšem snadno ověří, bude jím, jedině když $X = \emptyset$).

Má-li operace $*$ na množině X neutrální prvek e, pak *inverzním prvkem (inverzí) prvku* x (vzhledem k operaci $*$) nazveme takový prvek y, že

$$\begin{aligned} y * x &= e, \\ x * y &= e. \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

Věta 2.2. *Každý prvek množiny X s asociativní operací $*$ má vzhledem k této operaci nejvýše jednu inverzi.*
D ů k a z. Buďte e neutrální prvek operace $*$ a y_1, y_2 dvě inverze prvku $x \in X$. Pak

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1 * e && (e \text{ je neutrální prvek}) \\ &= y_1 * (x * y_2) && (y_2 \text{ je inverze prvku } x) \\ &= (y_1 * x) * y_2 && (\text{asociativita } *) \\ &= e * y_2 && (y_1 \text{ je inverze } x) \\ &= y_2. \end{aligned}$$

Inverzní prvek k prvku x je tedy u asociativních operací určen jednoznačně. Obvykle jej značíme x^{-1}. Z definice ihned plyne, že $(x^{-1})^{-1} = x$.

Důkaz předchozí věty nápadně připomíná důkaz věty 1.4. To není náhoda.

Je-li e neutrální prvek operace $*$, je $e * e = e$, a tedy $e = e^{-1}$.

Je-li operace $*$ asociativní a má-li každý z prvků x a y inverzi, pak má inverzi i prvek $x * y$ a platí $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$. Je totiž:

$$(y^{-1} * x^{-1}) * (x * y) = (y^{-1} * (x^{-1} * x)) * y = (y^{-1} * e) * y = e$$

a

$$(x * y) * (y^{-1} * x^{-1}) = (x * (y * y^{-1})) * x^{-1} = (x * e) * x^{-1} = e.$$

2.2 Pole. Množina X se nazývá *pole*, splňuje-li následující podmínky:

1. Na množině X je dána komutativní a asociativní operace s neutrálním prvkem. Každý prvek množiny X má vzhledem k této operaci inverzi.

Tuto operaci budeme značit $+$ a nazývat *sčítání* v poli X. Její neutrální prvek označíme 0. Inverzní prvek k prvku x označíme $-x$.

2. Na množině X je dána komutativní a asociativní operace s neutrálním prvkem různým od 0. Každý prvek množiny $X \setminus \{0\}$ má vzhledem k této operaci inverzi.

Tuto operaci budeme značit $\cdot$ a nazývat *násobení* v poli X. Často budeme místo $x \cdot y$ psát pouze xy. Neutrální prvek označíme 1 a inverzní prvek k prvku x označíme x^{-1}. Při zápisu budeme dodržovat obvyklou přednost násobení před sčítáním.

3. Pro každé tři prvky $x, y, z \in X$ platí distributivní zákon:

$$x(y + z) = xy + xz.$$

Věta 2.3. *Pro každé pole platí: 1.* $0 \cdot x = 0$ *pro každý prvek* x.
2. 0 *nemá vzhledem k násobení inverzi.*
3. $(-1)x = -x$ *pro každý prvek* x.
D ů k a z. 1. Především, jelikož $0 + 0 = 0$ (0 je vzhledem ke sčítání neutrální prvek), máme $0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$ (distributivní zákon). Označíme-li si tedy $0 \cdot x = y$, máme $y = y + y$ a

$$\begin{aligned} y &= y + 0 && (0 \text{ je neutrální prvek}) \\ &= y + (y + (-y)) && (-y \text{ je inverze } y) \\ &= (y + y) + (-y) && (\text{asociativita sčítání}) \\ &= y + (-y) && (\text{viz. výše}) \\ &= 0. && (-y \text{ je inverze } y) \end{aligned}$$

2. Pro inverzní prvek nuly by platilo $0 \cdot 0^{-1} = 1$. Podle předchozího bodu ovšem $0 \cdot 0^{-1} = 0$. To je spor, protože z definice pole víme, že $0 \neq 1$.

3. Platí

$$\begin{aligned} x + (-1) \cdot x &= 1 \cdot x + (-1) \cdot x && (1 \text{ je neutrální prvek}) \\ &= (1 + (-1)) \cdot x && (\text{komutativita násobení a distributivita}) \\ &= 0 \cdot x && (-1 \text{ je inverze } 1) \end{aligned}$$

$= 0.$ (bod 1.)

To ovšem znamená, že inverzí prvku x vzhledem ke sčítání (tedy prvkem $-x$) je prvek $(-1)x$. Tím je důkaz hotov.

Mějme nyní na poli X dáno uspořádání $\leq$. Řekneme, že toto uspořádání je *úplné*, jestliže pro každé dva prvky $x, y \in X$ nastane alespoň jedna z možností $x \leq y$ a $y \leq x$ (prvky x a y jsou srovnatelné). Dále řekneme, že toto uspořádání je *slučitelné (kompatibilní)* se sčítáním a násobením v poli X, jestliže pro každé tři prvky $x, y, z \in X$ platí:

Jestliže $x \leq y$, pak $x + z \leq y + z$. (2.2.1)
Jestliže $0 \leq x$ a $0 \leq y$, pak $0 \leq xy$. (2.2.2)

Pole X se nazývá *uspořádané*, je-li na něm dáno úplné uspořádání, slučitelné se sčítáním a násobením.[1)]

Připomeňme, že v uspořádané množině vztah $x < y$ znamená, že $x \leq y$ a $x \neq y$.

Věta 2.4. *V každém uspořádaném poli platí: 1.* $0 < 1$.
2. Z $x + z \leq y + z$ *plyne* $x \leq y$.
3. Z $0 < x$ *plyne* $0 < x^{-1}$.
4. Je-li $0 < z$*, pak jsou vztahy* $x \leq y$ *a* $xz \leq yz$ *ekvivalentní.*

D ů k a z. 1. Kdyby $0 \not\leq 1$, muselo by být $1 \leq 0$ (uspořádání je úplné). Položíme-li v (2.2.1) $x = 1$, $y = 0$ a $z = -1$, dostaneme $1 + (-1) \leq 0 + (-1)$, neboli (protože -1 je inverze 1 a 0 je neutrální prvek) $0 \leq -1$. Teď položme v (2.2.2) $x = -1$ a $y = -1$. Dostaneme $0 \leq (-1)(-1)$. Víme ale (poznámka za větou 2.3), že $(-1)(-1) = 1$. Dostáváme tedy $0 \leq 1$, což spolu s předpokladem $1 \leq 0$ dává $1 = 0$, a to je spor s definicí pole. Z předpokladu $0 \not\leq 1$ jsme vyvodili spor, platí tedy $0 < 1$.

2. Podle (2.2.1) z $x + y \leq y + z$ plyne $(x + z) + (-z) \leq (y + z) + (-z)$ to ovšem (podle asociativního zákona, proto, že $-z$ je vzhledem ke sčítání inverze z, a proto, že 0 je vzhledem ke sčítání neutrální prvek) znamená $x \leq y$.

4. Předpokládejme, že $x \leq y$. Pak podle (2.2.1) platí $x + (-x) \leq y + (-x)$, čili $0 \leq y + (-x)$. Nyní můžeme použít (2.2.2) na prvky $x + (-y)$ a z (o kterém předpokládáme $0 \leq z$). Dostáváme $0 \leq (y+(-x))z$ a podle distributivního zákona $0 \leq yz+(-x)z$. Teď si stačí uvědomit, že $(-x)z = -(xz)$ (to plyne z bodu 3. věty 2.3 a asociativity násobení) a aplikovat na nerovnost $0 \leq yz + (-(xz))$ a prvek xz vztah (2.2.1). Tím je dokázáno, že z $x \leq y$ plyne $xz \leq yz$.

Nyní můžeme snadno dokázat bod 3. Připusťme, že tvrzení tohoto bodu neplatí, tedy že existuje prvek x takový, že sice $0 < x$, ale $0 \not< x^{-1}$ (existence prvku x^{-1} vyplývá z definice pole; je totiž $x \neq 0$). To znamená, že $x^{-1} \leq 0$ (z úplnosti uspořádání) a (podle části bodu 4, kterou jsme již dokázali) že $x^{-1}x \leq 0x$. Podle bodu 1. věty 2.3 máme $1 \leq 0$, což je spor s bodem 1. této věty, který jsme již dokázali.

Zbývá nám dokázat druhou polovinu bodu 4: Je-li $0 < z$, je také $0 < z^{-1}$, a z $xz \leq yz$ vyplývá $xzz^{-1} \leq yzz^{-1}$, což znamená $x \leq y$.

Tím je celá věta dokázána.

Kromě sčítání a násobení zavádíme v poli ještě *odčítání*: $x - y = x + (-y)$ a *dělení*: x/y (nebo $\frac{x}{y}$) $= xy^{-1}$ (pouze pro $y \neq 0$; 0^{-1} neexistuje).

Prvky x, splňující $x > 0$ (případně $x < 0$) nazýváme *kladné* (případně *záporné*). Pokud splňují $x \geq 0$ (případně $x \leq 0$), nazýváme je *nezápornými* (případně *nekladnými*).

Jsou-li x, y dva prvky uspořádaného pole X, $x \leq y$, pak množinu prvků $z \in X$ takových, že $x < z < y$ nazýváme *otevřeným intervalem s koncovými body x a y* a označujeme (x, y).[2)] Množinu prvků $z \in X$ takových, že $x \leq z \leq y$, nazýváme *uzavřeným intervalem s koncovými body x a y* a označujeme $[x, y]$. Množinu prvků $z \in X$ takových, že $x \leq z < y$ (případně $x < z \leq y$) nazýváme

[1)] Úplnost uspořádání v poli je podmínka natolik přirozená, že míváme sklon považovat ji za samozřejmost. Uvědomme si ovšem, že i v praxi se setkáváme s neúplnými uspořádáními: Když na množině studentů položíme $s_1 < s_2$ (s_1 je horší student, než s_2), jestliže student s_1 má horší studijní průměr než student s_2, dostaneme neúplné uspořádání (definované samosebou předpisem: $s_1 \leq s_2$, jestliže $s_1 < s_2$ nebo $s_1 = s_2$). Pro dva různé studenty se stejným studijním průměrem totiž neplatí ani $s_1 < s_2$, ani $s_2 < s_1$ a samozřejmě ani $s_1 = s_2$.

[2)] Předpokládáme, že čtenář vždy rozliší, kdy se jedná o interval a kdy o uspořádanou dvojici.

polootevřeným intervalem s koncovými body x a y, uzavřeným v x a otevřeným v y (případně *otevřeným v x a uzavřeným v y*) a označujeme $[x, y)$ (případně $(x, y]$). Ve všech těchto případech prvek $y - x$ (který je určitě nezáporný), nazýváme *délkou* příslušného intervalu.

Dále klademe $(x, \infty) = \{y \in X \mid y > x\}$, $[x, \infty) = \{y \in X \mid y \geq x\}$, $(-\infty, x) = \{y \in X \mid y < x\}$ a $(-\infty, x) = \{y \in X \mid y \leq x\}$. Tyto množiny *nazýváme nevlastní intervaly*.

Občas se nám bude hodit toto označení: pro dvě množiny $Y, Z \subset X$ píšeme $Y \leq Z$, jestliže pro každé prvky $y \in Y$ a $z \in Z$ platí $y \leq z$. Podobně zavádíme značení $Y < Z$, $Y \geq Z$ a $Y > Z$. Vztah $\{y\} \leq Z$ zapisujeme $y \leq Z$ (a podobně v ostatních případech).

Pro množinu $Y \subset X$ klademe $-Y = \{-y \mid y \in Y\}$. Pro dvě množiny $Y, Z \subset X$ klademe $Y + Z = \{y + z \mid y \in Y, z \in Z\}$. Podobným způsobem definujeme množiny Y^{-1} (pokud $0 \notin Y$), $Y - Z$, $Y \cdot Z$ a Y/Z (pokud $0 \notin Z$).

2.3 Reálná čísla. Řekneme, že uspořádané pole X je *spojitě uspořádané*, jestliže ke každým dvěma neprázdným podmnožinám $Y, Z \subset X$ takovým, že $Y \leq Z$, existuje prvek $x \in X$, splňující podmínku $Y \leq x \leq Z$ (*axiom spojitosti*).

Každé spojitě uspořádané pole se nazývá *množina reálných čísel* a označuje symbolem $\mathbb{R}$. Prvky množiny reálných čísel se nazývají reálná čísla.

Abychom mohli zformulovat následující důležitou větu, uvedeme ještě definici, která by se hodila spíše do odstavce o uspořádaných množinách.

Podmnožina Y uspořádané množiny X se nazývá *shora (zdola) ohraničená*, má-li horní (dolní) závoru. Podmnožina, která je současně shora i zdola ohraničená, se nazývá *ohraničená*.

Věta 2.5 (o supremu). *Každá neprázdná shora ohraničená podmnožina $\mathbb{R}$ má supremum.*
D ů k a z. Nechť $Y \subset \mathbb{R}$ je neprázdná a shora ohraničená. Položme $Z = \{z \in \mathbb{R} \mid Y \leq z\}$ (Z je tedy množina všech horních závor množiny Y). Tato množina je rovněž neprázdná (Y je shora ohraničená — má horní závoru). Navíc platí $Y \leq Z$, takže podle axiomu spojitosti existuje prvek $x \in X$ takový, že $Y \leq x \leq Z$. Jelikož $Y \leq x$, je také x horní závora množiny Y, tedy $x \in Z$. Jelikož nadto $x \leq Z$, je $x = \min Z$. Dostáváme $x = \sup Y$.

Následující Věta o infimu se dá dokázat stejným způsobem jako Věta o supremu.

Věta 2.6 (o infimu). *Každá neprázdná zdola ohraničená podmnožina $\mathbb{R}$ má infimum.*

Nechť $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Podle definice intervalu je $y \geq [x, y]$. Současně ovšem platí $y \in [x, y]$, což znamená, že $y = \max[x, y]$. Podle věty 1.8 je tedy $y = \sup[x, y]$.

Uvažujme nyní otevřený interval (x, y). Opět platí, $y \geq (x, y)$, nicméně $y \notin (x, y)$. To znamená, že $y \neq \max(x, y)$. Má interval (x, y) maximum? Kdyby bylo $z = \max(x, y)$, muselo by být $z < y$ (to je totiž jediná možnost, která zbývá). K takovému číslu ovšem vždy najdeme prvek intervalu (x, y), který je větší. Například pro číslo $u = (z + y)/2$[3)] platí $z < u < y$ (ověřte!). To znamená, že $z \neq \max(x, y)$ a interval (x, y) tedy nemá maximum.

Číslo y je ovšem horní závorou intervalu (x, y), což, jak jsme ukázali před chvílí, pro žádné menší číslo neplatí. Máme tedy $y = \sup(x, y)$.

Následující věta uvádí často používané kriterium existence suprema v $\mathbb{R}$.

Věta 2.7. *Nechť $z \in \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$. Následující dvě podmínky jsou ekvivalentní:*
1. $z = \sup X$,
2. $z \geq X$ a ke každému $y < z$ existuje $x \in X$ takové, že $y \leq x \leq z$.
D ů k a z. Předpokládejme, že platí 1. Podle definice suprema je $z \geq X$. Zvolme číslo $y < z$. Kdyby neexistovalo $x \in X$ s uvedenou vlastností, bylo by x horní závorou množiny X menší než z, což je spor s 1.

Nechť platí podmínka 2. První její část říká, že z je horní závora množiny X. Druhá část zase, že žádná horní závora y není menší. Je tedy z nejmenší horní závora této množiny.

Podobná věta platí i pro infimum. Zkuste ji zformulovat a dokázat.

Poslední věta tohoto odstavce říká, že axiom spojitosti je ekvivalentní s větou o supremu.

[3)] Ach! Číslo 2 jsme ovšem zatím nedefinovali. Honem to tedy napravíme: položíme $2 = 1 + 1$; a k problému se ještě později vrátíme.

Věta 2.8. *Nechť X je uspořádané pole, jehož každá neprázdná shora ohraničená množina má supremum. Pak X je spojitě uspořádané.*
D ů k a z. Musíme dokázat, že v X platí axiom spojitosti. Zvolme tedy dvě neprázdné podmnožiny $Y, Z \subset X$, $Y \leq Z$ a hledejme prvek $x \in X$ splňující podmínku $Y \leq x \leq Z$.

Jelikož množina Z je neprázdná, je množina Y shora ohraničená. Podle předpokladu věty tedy má supremum. Ukážeme, že toto supremum splňuje podmínku $Y \leq \sup Y \leq Z$. První část této podmínky ($Y \leq \sup Y$) plyne okamžitě z definice suprema ($\sup Y$ je horní závora množiny Y). Druhá z věty2.7: Kdyby pro nějaký prvek $z \in Z$ platilo $z < \sup Y$, existoval by prvek $y \in Y$ větší než z, což by byl spor s předpokladem $Y \leq Z$. Můžeme tedy položit $x = \sup Y$.

2.4 Přirozená čísla. Řekneme, že množina $X \subset \mathbb{R}$ je *induktivní*, jestliže $1 \in X$ a jestliže z $x \in X$ plyne $x + 1 \in X$.

Příklady induktivních množin: $\mathbb{R}$, $(0, \infty)$, $[1, \infty)$.

Uvedeme nyní jednoduché tvrzení:

Lemma 2.9. *Průnik libovolného systému induktivních množin je induktivní množina.*
D ů k a z. Nechť S je systém induktivních množin. Ověříme, že množina $\cap S$ je induktivní. Pro libovolnou množinu $X \in S$ platí $1 \in X$ (X je induktivní). Proto $1 \in \cap S$. Jestliže $x \in \cap S$, pak $x \in X$ pro každé X. Jelikož každé $X \in S$ je induktivní množina, leží $x + 1$ v každé množině systému S. Platí tedy i $x + 1 \in \cap S$.

Množinou přirozených čísel nazýváme průnik systému všech induktivních podmnožin R. Značíme ji $\mathbb{N}$. Její prvky nazýváme přirozená čísla.

Věta 2.10 (základní vlastnosti množiny přirozených čísel). *1. $\mathbb{N}$ je induktivní.*
2. (princip matematické indukce) Jestliže $X \subset \mathbb{N}$ je induktivní množina, pak $X = \mathbb{N}$.
3. $\mathbb{N}$ má nejmenší prvek. Platí $\min \mathbb{N} = 1$.
4. Je-li $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$, pak $n - 1 \in \mathbb{N}$.
5. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $(n, n + 1) \cap \mathbb{N} = \emptyset$.
6. Každá neprázdná podmnožina $\mathbb{N}$ má nejmenší prvek.
7. (Archimedova vlastnost) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $n > x$.
D ů k a z. 1. Plyne z definice množiny přirozených čísel a předchozího lemmatu.

2. Z definice množiny přirozených čísel plyne, že $\mathbb{N} \subset X$.

3. Jelikož $\mathbb{N}$ je induktivní množina, je $1 \in \mathbb{N}$. Jelikož množina $[1, \infty)$ je induktivní (ověřte!), je $\mathbb{N} \subset [1, \infty)$. Každý prvek intervalu $[1, \infty)$ je ovšem větší nebo roven 1, totéž tedy platí i pro prvky množiny $\mathbb{N}$.

4. Nechť $n \neq 1$ a $n - 1 \notin \mathbb{N}$. Pak množina $\mathbb{N} \setminus \{n\}$ je induktivní a máme $\mathbb{N} \subset \mathbb{N} \setminus \{n\}$. To ovšem nastane jedině v případě, že $n \notin \mathbb{N}$.

5. Využijeme princip matematické indukce. Nechť X je množina všech přirozených čísel n, pro něž je $(n, n + 1) \cap \mathbb{N} = \emptyset$. Dokážeme, že tato množina je induktivní:

Nejprve je třeba ukázat, že $1 \in X$. Položme $Y = \{1\} \cup [2, \infty)$. Tato množina je induktivní (ověřte), platí tedy $\mathbb{N} \subset Y$. Navíc, jak snadno plyne z definice intervalů, $Y \cap (1, 2) = \emptyset$. To znamená, že $(1, 2) \cap \mathbb{N} = \emptyset$, a tedy $1 \in X$.

Nyní předpokládejme, že $n \in X$, a připusťme, že $n + 1 \notin X$, tedy že existuje přirozené číslo x, ležící v intervalu $(n + 1, n + 2)$. Platí $n + 1 < x < n + 2$ (z definice otevřeného intervalu) a $x \neq 1$ (podle bodu 3.). Je tedy $x - 1 \in \mathbb{N}$ (podle bodu 4.) a $n < x - 1 < n + 1$. To je spor s předpokladem $n \in X$. Je tedy i $n + 1 \in X$.

Dokázali jsme tedy, že množina X je induktivní. Z principu matematické indukce nyní plyne, že $X = \mathbb{N}$. To je ovšem přesně to, co jsme měli dokázat.[4)]

6. Buď $Y \subset \mathbb{N}$ podmnožina, která nemá nejmenší prvek. Položme $X = \{n \in \mathbb{N} \mid n < Y\}$[5)]. Platí $X \cap Y = \emptyset$. Ukážeme, že množina X je induktivní:

Jelikož 1 je nejmenší přirozené číslo (bod 3.), musí být $1 < Y$ nebo $1 \in X$. Druhý případ ovšem nenastává, jinak by totiž 1 byla nejmenším prvkem množiny Y (která nejmenší prvek nemá). Je tedy $1 < Y$, neboli $1 \in X$.

[4)] Co jsme měli dokázat?
[5)] Co znamená $n < Y$?

Nyní předpokládejme, že $n \in X$ (platí tedy $n < Y$) a podívejme se, zda $n+1 \in X$. Mezi čísly n a $n+1$ neleží žádný prvek množiny Y (bod 5.) a číslo $n+1$ také není jejím prvkem — jinak by totiž bylo jejím nejmenším prvkem. Odtud ovšem plyne, že $n+1 < Y$, neboli $n+1 \in X$.

Tím jsme dokázali, že množina X je induktivní. Podle principu matematické indukce tedy $X = \mathbb{N}$, což znamená, že $Y = \emptyset$ (množiny X a Y jsou disjunktní). Tím jsme dokázali, že jedině prázdná podmnožina množiny $\mathbb{N}$ nemá nejmenší prvek.

7. Předpokládejme, že podmnožina všech reálných čísel x takových, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $n \leq x$ je neprázdná, a označme si ji X. Máme $\mathbb{N} \leq X$ a podle axiomu spojitosti existuje prvek $x \in \mathbb{R}$ takový, že $\mathbb{N} \leq x \leq X$. Určitě neplatí $x \in \mathbb{N}$ (to by bylo i $x+1 \in \mathbb{N}$, což je ve sporu s $\mathbb{N} \leq x$) a tedy ani $x - 1 \notin \mathbb{N}$ (to by bylo ve sporu s $x \notin \mathbb{N}$). Nyní ovšem vidíme, že $x - 1 > \mathbb{N}$ (interval $(x-1, x)$ nepochybně žádné přirozené číslo neobsahuje; číslo o 1 větší by totiž bylo větší než x), a dostáváme se do sporu: Před chvílí jsme tvrdili, že $x \leq X$, a teď nám vychází $x - 1 \in X$. Tento spor dokazuje, že množina X je prázdná.

Tím je věta dokázána.

Označení některých přirozených čísel: $2 = 1+1$, $3 = 2+1$, $4 = 3+1$, $5 = 4+1$, $6 = 5+1$, $7 = 6+1$, $8 = 7+1$, $9 = 8+1$. Další přirozená čísla se dají jednoznačně vyjádřit pomocí dekadického zápisu, kterým se ovšem na tomto místě nebudeme zabývat.

Pro $n \in \mathbb{N}$ označujeme $\{1, \ldots, n\} = \{m \in \mathbb{N} \mid m \leq n\}$. Existuje-li bijekce mezi množinou X a touto množinou, říkáme, že množina X má *n prvků*. Množina se nazývá *konečná*, když je prázdná nebo existuje číslo $n \in \mathbb{N}$ takové, že tato množina má n prvků. Ostatní množiny se nazývají *nekonečné*.

Nyní můžeme uvést pojem *uspořádané n-tice*, který je zobecněním pojmu uspořádané dvojice. Nechť n je přirozené číslo. Předpokládejme, že pro každé číslo $i \in \{1, \ldots, n\}$ máme dán objekt x_i.[6)] *Uspořádaná n-tice* objektů $x_1, \ldots, x_n$ je objekt onačovaný $(x_1, \ldots, x_n)$ takový, že rovnost $(x_1, \ldots, x_n) = (x_1', \ldots, x_n')$ nastane, právě když pro každé číslo $i \in \{1, \ldots, n\}$ platí $x_i = x_i'$.

Kartézským součinem množin $X_1, \ldots, X_n$ rozumíme množinu

$$X_1 \times \ldots \times X_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \in X_1, \ldots x_n \in X_n\} \tag{2.4.1}$$

Speciálně, jestliže pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ je $X_i = X$, píšeme

$$X_1 \times \ldots \times X_n = X^n \tag{2.4.2}$$

Tuto množinu nazýváme *n-tou kartézskou mocninou množiny X*.

Pro $i \in \{1, \ldots, n\}$ definujeme *i-tou kartézskou projekci* $\mathrm{pr}_i : X_1 \times \ldots \times X_n \to X_i$ předpisem

$$\mathrm{pr}_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i. \tag{2.4.3}$$

Nechť X je množina. Libovolné zobrazení $a : \mathbb{N} \to X$ se nazývá *posloupnost prvků množiny X*. Pro $n \in \mathbb{N}$ označujeme $a_n = a(n)$ a posloupnost a zapisujeme (a_n), nebo $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2.5 Celá, racionální a iracionální čísla. Množinu $\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$ nazýváme *množinou celých čísel*. Množinu $\mathbb{Q} = \{p \cdot q^{-1} \mid p \in \mathbb{Z} \text{ a } q \in \mathbb{N}\}$ nazýváme *množinou racionálních čísel*. Množinu $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nazýváme *množinou iracionálních čísel*. Prvky těchto množin nazýváme (po řadě) *celá*, *racionální* a *iracionální čísla*.

Věta 2.11. *V každém otevřeném intervalu v $\mathbb{R}$ délky větší než 1 leží celé číslo.*

D ů k a z. Nechť $x, y \in \mathbb{R}$, $y - x > 1$. Hledáme celé číslo p takové, že $p \in (x, y)$.

1. Předpokládejme, že $x \geq 1$ a označme X množinu přirozených čísel větších než x. Tato množina je neprázdná (to plyne z Archimedovy vlastnosti množiny $\mathbb{N}$ — věta 2.10) a má nejmenší prvek (tatáž věta, bod 6.). Položme $p = \min X$. Platí $p - x \leq 1$ (jinak by bylo $p - 1 \in X$), a tedy $p < x$.

2. Jestliže $x < 0$ a $y > 0$, pak podmínce vyhovuje 0.

3. Jestliže $y < 0$ (tím pádem i $x < 0$), pak interval $(-y, -x)$ obsahuje přirozené číslo (to jsme ukázali v prvním bodě), řekněme n. Číslo $p = -n$ leží v intervalu (x, y).

Věta 2.12. *V každém neprázdném otevřeném intervalu v $\mathbb{R}$ leží racionální číslo.*

---

6) Často říkáme prostě: Mějme dány objekty $x_1, \ldots, x_n$.

D ů k a z. Nechť $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Hledáme racionální číslo $p \cdot q^{-1}$ takové, že $p \cdot q^{-1} \in (x, y)$. Řešíme tedy dvojici nerovnic

$$x < p \cdot q^{-1} < y. \tag{2.5.1}$$

S těmito nerovnicemi je ekvivalentní[7)] podmínka

$$qx < p < qy. \tag{2.5.2}$$

Nyní budeme postupovat takto: Najdeme přirozené číslo q tak, aby délka intervalu (qx, qy) byla větší než 1. Pak, podle věty 2.11, bude zaručena existence celého čísla p, které v tomto intervalu leží. Bude tedy splněno (2.5.2) a tím i (2.5.1).

Podmínka, kterou musí splňovat hledané přirozené číslo q, je

$$qy - qx > 1. \tag{2.5.3}$$

Ta je ovšem ekvivalentní podmínce

$$q > \frac{1}{y - x}. \tag{2.5.4}$$

Hledané číslo q tedy existuje, vyplývá to z Archimedovy vlastnosti.

Tím je důkaz ukončen.

Podobná věta platí i pro iracionální čísla; zatím ovšem není v našich silách ji dokázat. Zatím, popravdě řečeno, ani nevíme, zda vůbec nějaké iracionální číslo existuje. (Všimli jste si?)

Příležitostně budeme používat následující pojmy, vztahující se k celým číslům: dělitelnost čísel, zbytek po dělení, soudělná a nesoudělná, sudá a lichá čísla. Věříme, že definice všech těchto pojmů, stejně jako jejich základní vlastnosti, je čtenář schopen zformulovat sám.

2.6 Funkce reálné proměnné. *Funkcí reálné proměnné* rozumíme libovolné zobrazení $f : X \to \mathbb{R}$, kde $X \subset \mathbb{R}$ (někdy píšeme $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

Funkce $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se nazývá *shora ohraničená (zdola ohraničená, ohraničená) na množině* $X' \subset X$, je-li taková množina $f(X') \subset \mathbb{R}$.

Největší hodnotou (maximem) funkce $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *na množině* $X' \subset X$ nazýváme číslo $\max f(X')$ (označení: $\max_{x \in X'} f(x)$). Řekneme, že funkce f této hodnoty *nabývá v bodě* x, jestliže $f(x) = \max f(X')$ (jestliže existuje maximum, existuje i tento bod; platí totiž $\max f(X') \in f(X')$).

Podobně: *Nejmenší hodnotou (minimem) funkce* $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *na množině* $X' \subset X$ nazýváme číslo $\min f(X')$ (označení: $\min_{x \in X'} f(x)$). Řekneme, že funkce f této hodnoty *nabývá v bodě* x, jestliže $f(x) = \min f(X')$.

Řekneme, že maximum (případně minimum) funkce f na množině $X' \subset X$ je *ostré*, jestliže existuje právě jeden bod této množiny, v němž funkce maxima (případně minima) nabývá. Je-li takových bodů víc, říkáme, že maximum (minimum) je *neostré*.

Maximum a minimum se souhrnně nazývají *extrémy*.

Jak už jsme řekli, bod, v němž funkce maxima nebo minima na dané množině nabývá, vždy existuje. To ale nemusí platit o supremu a infimu:

Supremem funkce $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *na množině* $X' \subset X$ nazýváme číslo $\sup f(X')$ (označení: $\sup_{x \in X'} f(x)$). *Infimem funkce* f *na množině* X' nazýváme číslo $\inf f(X')$ (označení: $\inf_{x \in X'} f(x)$).

Řekneme, že funkce $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je na množině $X' \subset X$ *rostoucí* (*nerostoucí*, *klesající*, *neklesající*), jestliže pro každé dva body $x, y \in X'$, $x < y$, platí $f(x) < f(y)$ ($f(x) \geq f(y)$, $f(x) > f(y)$, $f(x) \leq f(y)$). Je-li funkce f rostoucí (nerostoucí, klesající, neklesající) na celé množině X, nazývá se prostě *rostoucí* (*nerostoucí*, *klesající*, *neklesající*). Funkci, která je neklesacíci nebo nerostoucí (rostoucí nebo klesající), říkáme *monotonní* (*ryze monotonní*).

[7)] Dvojice (p, q) splňuje (2.5.1), právě když platí (2.5.2).

Řekneme, že funkce $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *konvexní* na intervalu $I \subset X$, jestliže pro každé tři body $x, y, z \in I$, $x < y < z$, platí

$$f(x)(z-y) + f(y)(x-z) + f(z)(y-x) \geq 0. \tag{2.6.1}$$

Řekneme, že funkce $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *konkávní* na intervalu $I \subset X$, jestliže pro každé tři body $x, y, z \in I$, $x < y < z$, platí

$$f(x)(z-y) + f(y)(x-z) + f(z)(y-x) \leq 0. \tag{2.6.2}$$

Funkce konvexní (konkávní) na celém svém definičním oboru se nazývá prostě *konvexní* (*konkávní*).

Funkce $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se nazývá *sudá* (*lichá*), jestliže pro každý bod $x \in X$ platí $-x \in X$ a $f(-x)x$ $(f(-x) - x)$.

Funkce $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se nazývá *periodická*, jestliže existuje číslo $p > 0$ takové, že $x \in X$, právě když $x + p \in X$ a jestliže $x \in X$, pak $f(x+p) = f(x)$. Číslo p se nazývá *perioda funkce* f.

Funkce $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taková, že množina $f(X)$ je jednoprvková, se nazývá *konstantní*. Je-li $f(X) = \{c\}$, píšeme $f = c$.[8] Konstantní funkce, stejně jako funkce $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, jsou speciálním případem afinních funkcí. Funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se nazývá *afinní*, existují-li čísla $p, q \in \mathbb{R}$ taková, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $f(x) = px + q$.

Množina $Y \subset \mathbb{R}^2$ se nazývá *přímka*, existují-li čísla $a, b \in \mathbb{R}$, ne současně rovna nule, taková, že

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0\} \tag{2.6.3}$$

Souvislost afinních funkcí s přímkami je jednoduchá:

Věta 2.13. *Funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je afinní, právě když je její graf přímka.*
D ů k a z. Důkaz si čtenář jistě rád udělá sám.

Uvedená věta neříká, že každá přímka je grafem nějaké funkce!

Afinní funkce $f(x) = px + q$ je rostoucí, právě když je $p > 0$, a klesající, právě když je $b < 0$.[9] Ukážeme první část tohoto tvrzení: Předpokládejme, že funkce f je rostoucí. Pak musí platit $f(0) < f(1)$ (podle definice rostoucí funkce), což ovšem vede k $q < p + q$, neboli $p > 0$. Naopak, nechť $p > 0$. Pak pro libovolné $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, platí $px < py$, čili $px + q < py + q$, což znamená, že $f(x) < f(y)$ a funkce f je rostoucí.

Každá afinní funkce je konvexní i konkávní. Pro libovolné tři body $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ totiž platí

$$\begin{aligned}
&f(x_1)(x_3 - x_2) + f(x_2)(x_1 - x_3) + f(x_3)(x_2 - x_1)\\
&\quad = (px_1 + q)(x_3 - x_2) + (px_2 + q)(x_1 - x_3) + (px_3 + q)(x_2 - x_1)\\
&\quad = p(x_1x_3 - x_1x_2) + q(x_3 - x_2) + p(x_2x_1 - x_2x_3) + q(x_1 - x_3) + p(x_3x_2 - x_3x_1) + q(x_2 - x_1)\\
&\quad = p(x_1x_3 - x_1x_2 + x_2x_1 - x_2x_3 + x_3x_2 - x_3x_1) + q(x_3 - x_2 + x_1 - x_3 + x_2 - x_1)\\
&\quad = 0.
\end{aligned}$$

Pokusme se nyní vyjasnit definici konvexní funkce. Označme $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, $y_3 = f(x_3)$. Podmínka 2.6.1 se dá přepsat na

$$y_2 \leq \frac{y_1(x_3 - x_2) + y_3(x_2 - x_1)}{x_3 - x_1}. \tag{2.6.4}$$

Položíme-li

$$g(x) = \frac{y_1(x_3 - x) + y_3(x - x_1)}{x_3 - x_1}, \tag{2.6.5}$$

dostaneme afinní funkci $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (to se snadno zjistí úpravou vztahu (2.6.5)), pro kterou platí $g(x_1) = y_1$, $g(x_3) = y_3$ (dosazením do (2.6.5)) a $g(x_2) \geq y_2$ z (2.6.4). Dostáváme tedy tento výsledek: funkce f je konvexní

[8] Například symbolem 2 tedy někdy označujeme číslo a někdy konstantní funkci!

[9] Definice funkce f, kterou jsme na tomto místě uvedli, je neúplná: neuvedli jsme ani definiční obor, ani obor hodnot této funkce. Dohodněme se, že v takových případech bude definičním oborem množina všech reálných čísel, která lze do pravé strany předpisu dosadit (v našem případě tedy $\mathbb{R}$) a oborem hodnot množina $\mathbb{R}$. V případě nejasností ovšem musíme být schopni kdykoli uvést přesnou definici!

na intervalu I, právě když pro každé tři body $x_1, x_2, x_3, x_1 < x_2 < x_3$, platí $f(x_2) \le g(x_2)$, kde g je afinní funkce, jejímž grafem je přímka, procházející body $(x_1, f(x_1))$ a $(x_3, f(x_3))$.

Nechť $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou dvě funkce. Funkci $(f + g) : X \to \mathbb{R}$, definovanou pro každé $x \in X$ předpisem $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, nazýváme *součtem funkcí f a g*. *Součinem* těchto funkcí nazýváme funkci $(f \cdot g) : X \to \mathbb{R}$, definovanou pro každé $x \in X$ předpisem $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$. Tím jsme definovali operace sčítání a násobení na množině $\mathbb{R}^X$.

Množina $\mathbb{R}^X$ s těmito operacemi ovšem není pole. Které podmínky z definice pole nesplňuje?

Uspořádání na množině $\mathbb{R}^X$ je definováno takto: Klademe $f \le g$, právě když pro každé $x \in X$ platí $f(x) \le g(x)$.

Ověřte, že takto definovaná relace na $\mathbb{R}^X$ je skutečně uspořádání. Je toto uspořádání úplné?

Mocninná funkce se definuje pomocí konečného počtu násobení.

Při definici mocninné funkce postupujeme takto: pro každé číslo $x \in \mathbb{R}$ položíme

$$\begin{aligned} x^1 &= x, \\ x^2 &= x \cdot x. \end{aligned} \tag{2.6.6}$$

Dostaneme funkce $\text{pow}_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $\text{pow}_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definované pro každé $x \in \mathbb{R}$ předpisy $\text{pow}_1(x) = x$ a $\text{pow}_2(x) = x^2$. Tyto definice pak zobecníme na libovolné přirozené číslo tím, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$ položíme $x^{n+1} = x^n \cdot x$ a $\text{pow}_{n+1} = x^{n+1}$. Tento postup je založený na principu matematické indukce a k jeho použití nás opravňuje následující věta:

Věta 2.14. *Existuje právě jedna posloupnost funkcí* $(\text{pow}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\text{pow}_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *taková, že*

$$\text{pow}_1 = \text{id}_{\mathbb{R}} \tag{2.6.7}$$

a pro každé $n \in \mathbb{N}$,

$$\text{pow}_{n+1} = \text{id}_{\mathbb{R}} \cdot \text{pow}_n\,. \tag{2.6.8}$$

D ů k a z. Lze provést pomocí principu matematické indukce. (Ukáže se, že množina všech přirozených čísel m takových, že pro každé $n \in \{1, \dots, m\}$ existuje právě jedna funkce pow_n tak, že jsou splněny podmínky (2.6.7) a (2.6.8), je induktivní.)

Funkce pow_n z předchozí věty se nazývá *mocninná funkce s exponentem n*. Hodnota této funkce v bodě x se označuje x^n.

Mocninná funkce má následující základní vlastnosti:

Věta 2.15. *Pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ platí:*
1. $\text{pow}_m \cdot \text{pow}_n = \text{pow}_{m+n}$.
2. $\text{pow}_m \circ \text{pow}_n = \text{pow}_{m\cdot n}$.
3. Je-li n liché, je funkce pow_n *lichá. Je-li n sudé, je funkce* pow_n *sudá.*
4. Funkce pow_n *je na intervalu* $(0, \infty)$ *rostoucí.*
5. Je-li $x > 1$ a $m > n$, je $x^m > x^n$. Je-li $0 < x < 1$ a $m > n$, je $x^m < x^n$.

D ů k a z. 1. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Ukážeme, že množina X všech čísel $m \in \mathbb{N}$, pro která platí $\text{pow}_m \cdot \text{pow}_n = \text{pow}_{m+n}$, je induktivní. První podmínka definice induktivní množiny říká, že má platit $\text{pow}_1 \cdot \text{pow}_n = \text{pow}_{1+n}$. Je tedy splněna (podle (2.6.7) a (2.6.8)) a máme $1 \in X$. Druhá podmínka říká, že z $\text{pow}_m \cdot \text{pow}_n = \text{pow}_{m+n}$ musí plynout $\text{pow}_{m+1} \cdot \text{pow}_n = \text{pow}_{m+1+n}$. To je ovšem splněno, opět díky (2.6.7) a (2.6.8).

2. Důkaz tohoto vztahu necháme na čtenáři (je třeba postupovat podobně, jako v prvním případě).

3. Nechť X je množina všech přirozených čísel, pro která tvrzení platí. Jelikož funkce $\text{pow}_1 = \text{id}_{\mathbb{R}}$ je lichá, $1 \in X$. Předpokládejme, že n je liché číslo a funkce pow_n lichá. Pak $\text{pow}_{n+1} = \text{id}_{\mathbb{R}} \cdot \text{pow}_n$ a funkce pow_{n+1} je sudá (jako součin dvou lichých funkcí — viz cvičení 27). Podobně, je-li číslo n sudé a funkce pow_n sudá, je funkce pow_{n+1} rovna součinu liché a sudé funkce a je lichá. Celkově, $n + 1 \in X$.

4. Opět využijeme princip matematické indukce.[10] Pro $n = 1$ je $\text{pow}_n = \text{id}_{\mathbb{R}}$, což je rostoucí funkce.

---

[10] Co bychom si bez něj počali?

Nyní nechť $n \in \mathbb{N}$. Je-li funkce pow_n na intervalu $(0, \infty)$ rostoucí, pak pro každé $x, y \in (0, \infty)$, $x < y$, platí

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= x \cdot x^n && \text{(definice funkce } \mathrm{pow}_{n+1}) \\ &< y \cdot x^n && \text{(jelikož } x^n > 0 \text{ a } x < y) \\ &< y \cdot y^n && (y > 0 \text{ a } \mathrm{pow}_n \text{ je rostoucí}) \\ &= y^{n+1} && \text{(definice funkce } \mathrm{pow}_{n+1}) \end{aligned}$$

a funkce pow_{n+1} je na intervalu $(0, \infty)$ rostoucí.

5. Je-li $x > 1$, je $x^{n+1} > x^n$ — to plyne z věty 2.4 tvrzení 4., s neostrou nerovností nahrazenou ostrou[11] (viz cvičení 7). Podobně, je-li $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ a $x > 1$, $x^{n+k} > x^n$, pak $x^{n+k+1} > x^n$. První část tvrzení tedy plyne z principu matematické indukce. Druhá část tvrzení se dokáže podobně.

Na závěr uvedeme ještě několik příkladů funkcí.

Absolutní hodnotou reálného čísla x nazýváme číslo $|x|$, které je rovno x, je-li $x \geq 0$, a $-x$, jestliže $x < 0$. Dostáváme funkci $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Celou částí $[x]$ reálného čísla x nazýváme největší celé číslo, které je menší nebo rovno x. Dostáváme funkci $[\cdot] : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Pro reálné číslo x klademe $\chi(x) = 0$, je-li $x \in \mathbb{I}$ a $\chi(x) = 1$, je-li $x \in \mathbb{Q}$. Dostáváme *Dirichletovu funkci* $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Riemannova funkce $\varrho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definována takto: Jestliže $x \in \mathbb{I}$, je $\varrho(x) = 0$. Jestliže $x \in \mathbb{Q}$, pak existuje celé číslo p a přirozené číslo q, která jsou nesoudělná a $x = p/q$. Klademe $\varrho(x) = 1/q$.

Příklady

1. *Rozhodněte, které z množin* $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}$ *s operacemi sčítání a násobení jsou pole a která z nich jsou spojitě uspořádaná.*

Řešení: Dokážeme, že množina $\mathbb{Z}$ s operacemi sčítání a násobení celých čísel není pole. Budeme ověřovat podmínky uvedené v definici pole. Sčítání na množině $\mathbb{Z}$ je komutativní a asociativní operace s neutrálním prvkem 0 (a to je celé číslo) taková, že každé celé číslo má vzhledem k této operaci inverzi v množině $\mathbb{Z}$ (číslo opačné). Násobení na množině $\mathbb{Z}$ je komutativní a asociativní operace s neutrálním prvkem 1, ale existuje celé číslo různé od 0 takové, že nemá v $\mathbb{Z}$ vzhledem k této operaci inverzi. $\mathbb{Z}$ s operacemi sčítání a násobení není pole. Ostatní případy necháváme na čtenáři.

Podívejme se, zda pole $\mathbb{Q}$ s operacemi sčítání a násobení je spojitě uspořádané. Zvolme libovolně číslo $z \in \mathbb{I}$ a uvažujme dvě podmnožiny X, Y množiny $\mathbb{Q}$: $X = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < z\}$ a $Y = \{r \in \mathbb{Q} \mid r > z\}$ Množiny X, Y jsou neprázdné a platí $X \leq Y$. Předpokládejme, že existuje $x \in \mathbb{Q}$ takové, že $X \leq x \leq Y$. Potom ale buď $x > z$ nebo $x < z$ (možnost $x = z$ nastat nemůže protože $z \in \mathbb{I}$ a $x \in \mathbb{Q}$). Pokud $x > z$, tak v intervalu (z, x) existuje nějaké racionální číslo (věta 2.12) a neplatí tedy $x \leq Y$. Pokud $x < z$, tak podle stejné věty existuje nějaké racionální číslo v intervalu (x, z) a neplatí tedy $X \leq x$. Z předpokladu, že existuje racionální číslo s uvedenou vlastností, jsme tedy v obou případech dostali spor. Takové racionální číslo tedy neexistuje a $\mathbb{Q}$ není spojitě uspořádané pole.[12]

2. *Uvažujme Dirichletovu funkci* χ. *Najděte funkce* χ^2, $[] \circ \chi$, $\chi(1-\chi)$, $\chi \circ \chi$, $\chi \circ []$.

Řešení: Ukážeme, že $\chi(1-\chi) = 0$. Pokud $x \in \mathbb{Q}$, tak $\chi(x) = 0$ a tedy $(\chi(1-\chi))(x) = 0(1-0) = 0$. Pokud $x \in \mathbb{I}$, tak $\chi(x) = 1$ a tedy $(\chi(1-\chi))(x) = 1(1-1) = 0$. Zbylé případy necháváme čtenáři.

3. *Dokažte, že funkce* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - |x|$ *je na intervalu* $(-\infty, 0)$ *rostoucí a na intervalu* $[0, \infty)$ *konstatní.*

[11] Znaménkům $\leq$ a $\geq$ se někdy říká neostrá nerovnost, znaménkům $<$ a $>$ ostrá.

[12] Tento důkaz je tedy založen na existenci alespoň jednoho iracionálního čísla. To jsme sice zatím neukázali, ale časem na to dojde.

Řešení: Buďte $x, y \in (-\infty, 0)$ taková, že $x < y$. Potom $f(x) = x - |x| = x - (-x) = x + x = 2x$, obdobně $f(y) = 2y$ tedy platí $f(x) < f(y)$. To ovšem znamená, že funkce f je na intervalu $(-\infty, 0)$ rostoucí.

Nechť $x \geq 0$. Potom $f(x) = x - |x| = x - x = 0$. To znamená, že funkce f je na intervalu $[0, \infty)$ konstantní.

4. *Uvažujme stejnou funkci, jako v předcházejícím příkladě. Dokažte, že tato funkce je na $\mathbb{R}$ konkávní.*
Řešení: Máme dokázat, že pro každé tři body x, y, z takové, že $x < y < z$, platí

$$f(x)(z-y) + f(y)(x-z) + f(z)(y-x) \leq 0$$

Nyní mohou nastat následující možnosti:
1. $x, y, z \in (-\infty, 0)$. Potom

$$\begin{aligned} &f(x)(z-y) + f(y)(x-z) + f(z)(y-x) \\ &\quad = (x-(-x))(z-y) + (y-(-y))(x-z) + (z-(-z))(y-x) \\ &\quad = 2x(z-y) + 2y(x-z) + 2z(y-x) \\ &\quad = 2(xz - xy + yx - yz + zy - zx) \\ &\quad = 0. \end{aligned}$$

2. $x, y \in (-\infty, 0)$ a $z \in [0, \infty)$

$$\begin{aligned} &f(x)(z-y) + f(y)(x-z) + f(z)(y-x) \\ &\quad = (x-(-x))(z-y) + (y-(-y))(x-z) + (z-z)(y-x) \\ &\quad = 2x(z-y) + 2y(x-z) + 0(y-x) \\ &\quad = 2(xz - xy + yx - yz) \\ &\quad = 2z(x-y) \\ &\quad \leq 0. \end{aligned}$$

3. $x \in (-\infty, 0)$ a $y, z \in [0, \infty)$. Potom

$$\begin{aligned} &f(x)(z-y) + f(y)(x-z) + f(z)(y-x) \\ &\quad = (x-(-x))(z-y) + (y-y)(x-z) + (z-z)(y-x) \\ &\quad = 2x(z-y) + 0(x-z) + 0(y-x) \\ &\quad = 2x(z-y) \\ &\quad \leq 0. \end{aligned}$$

4. $x, y, z \in [0, \infty)$. Potom

$$\begin{aligned} &f(x)(z-y) + f(y)(x-z) + f(z)(y-x) \\ &\quad = (x-x)(z-y) + (y-y)(x-z) + (z-z)(y-x) \\ &\quad = 0(z-y) + 0(x-z) + 0(y-x) \\ &\quad = 0. \end{aligned}$$

Jak je vidět, ve všech případech jsme zjistili, že $f(x)(z-y)+f(y)(x-z)+f(z)(y-x) \leq 0$. Z definice vyplývá, že uvedená funkce je konkávní.

5. *Buď $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$,*

$$f(x) = \frac{x}{|x|}.$$

Zjistěte, je-li funkce f sudá, lichá.
Řešení: Pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ platí

$$f(-x) = \frac{-x}{|-x|} = -\frac{x}{|x|} = -f(x).$$

To znamená, že funkce f je lichá. Zároveň ale

$$f(1) = \frac{1}{|1|} = \frac{1}{1} = 1,$$

a tedy f není sudá (proč?).

6. *Nechť* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2 + (-1)^{[x]}$. *Dokažte, že funkce f je periodická a určete její periodu.*
Řešení: Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $[x] \le x \le [x] + 1$ a tedy $[x] + 2 \le x + 2 \le [x] + 2 + 1$. $[x] + 2$ je tedy největší celé číslo, které není větší než $x + 2$ a tedy $[x + 2] = [x] + 2$. Dostáváme

$$\begin{aligned} f(x+2) &= 2 + (-1)^{[x+2]} \\ &= 2 + (-1)^{[x]+2} \\ &= 2 + (-1)^{[x]}(-1)^2 \\ &= 2 + (-1)^{[x]} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Funkce f je tedy periodická s periodou 2.

Cvičení

1. Je skládání zobrazení komutativní operace?
2. Uveďte příklad neasociativní binární operace.
3. Co je neutrálním prvkem operace sjednocení, průnik, rozdíl podmnožin množiny X a kompozice zobrazení z X do X?
4. Uvažujme množinu $\exp X$ s operací sjednocení. Má každý prvek $Y \in \exp X$ inverzi vzhledem k uvažované operaci?
5. Řekneme, že dvě celá čísla m, n jsou v relaci $\sim$, jestliže jejich rozdíl je celočíselný násobek trojky. Ověřte, že se jedná o ekvivalenci. Příslušnou faktorovou množinu označíme $\mathbb{Z}_3$ a jednotlivé třídy rozkladu $\bar{0} = [0]_\sim$, $\bar{1} = [1]_\sim$, $\bar{2} = [2]_\sim$. Na množině $\mathbb{Z}_3$ definujeme operaci sčítání takto: $[m]_\sim + [n]_\sim = [m + n]_\sim$. Operaci násobení definujeme stejně: $[m]_\sim \cdot [n]_\sim = [m \cdot n]_\sim$. Ověřte, že tyto operace jsou korektně definovány.[13)] Ověřte, že množina $\mathbb{Z}_3$ s takto definovanými operacemi je pole. Uvažujme na množině $\mathbb{Z}_3$ relaci $\lessdot$, jejíž graf je množina $\{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{2}), \}$. Ověřte, že se jedná o uspořádání. Zjistěte, zda je toto uspořádání slučitelné se zmíněnými operacemi sčítání a násobení.
6. Dokažte, že pro každá dvě $x, y \in \mathbb{R}$ jsou vztahy $x \le y$, $0 \le y - x$, $x - y \le 0$ a $-y \le -x$ ekvivalentní.
7. Dokažte, že pro každá tři reálná čísla $x, y, z \in \mathbb{R}$ platí:

   a) Jestliže $x \le y$, pak $x + z < y + z$.
   b) Jestliže $0 < x$ a $0 < y$, pak $0 < xy$.
   c) Jestliže $0 < z$, jsou vztahy $x < y$ a $xz < yz$ ekvivalentní.
8. Dokažte, že množina $\mathbb{N}$ je nekonečná.
9. Dokažte, že každá konečná pomnožina $\mathbb{R}$ má maximum a minimum.
10. Ukažte, že pro každá dvě reálná čísla x, y platí:

    a) $(-x) \cdot (-y) = xy$;
    b) $|-x| = |x|$;
    c) $|xy| = |x| \cdot |y|$;
    d) $|x + y| \le |x| + |y|$;
    e) $||x| - |y|| \le |x - y|$.
11. Ukažte, že pro každá tři reálná čísla x, y, z platí: Jestliže $x < y$ a $z < 0$, pak $xz > yz$.
12. Ukažte, že pro každá tři reálná čísla $x, y, \varepsilon, \varepsilon > 0$ platí: $|x - y| < \varepsilon$ právě tehdy, když $x \in (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$.
13. Zjistěte, zda pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí:

[13)] Ověřte, že je-li $[m]_\sim = [m']_\sim$ a $[n]_\sim = [n']_\sim$, je i $[m + n]_\sim = [m' + n']_\sim$. Podobně pro násobení.

a) $x/x = 1$; b) $x/x^2 = 1/x$;
c) $x^2/x = x$.

14. Zjistěte, pro která $x \in \mathbb{R}$ jest:

a) $x < -2x$; b) $x^2 - 5x + 6 > 0$;
c) $|x+2| + 3|x-1| - 2|x-3| > 0$; d) $\dfrac{(x-1)(x+2)(x-3)}{(x+4)(x-5)(x+6)} > 0$.

15. Najděte reálná čísla x, y taková, že

a) $x - y < x + y$; b) $xy > x/y$.

16. Rozhodněte, zda existují taková dvě reálná čísla x, y, že $xy > x$ a $xy > y$ (resp. $xy < y$ a $xy < x$).

17. Rozhodněte, zda existují taková dvě reálná čísla x, y, že $x + y < x$ (resp. $x + y < x$ a $x + y < y$).

18. Najděte supremum, infimum, maximum a minimum množin $(-3, 2)$, $\{5, 0\}$, $\{\frac{1}{7}, \frac{1}{10}\}$, $\{-4, 4\}$, $\{-7\}$, $[1, \infty)$.

19. Najděte $\sup X$ a $\inf X$, jestliže

a) $X = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$; b) $X = \{r \in \mathbb{Q} \mid r > 0\}$;
c) $X = \{(n+1)/n \mid n \in \mathbb{N}\}$; d) $X = \{1 + 1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

20. Najděte maximum, minimum, suppremum a infimum (jestliže existují) následujících množin:

a) množina všech celých záporných čísel, b) množina všech záporných čísel,
c) intervaly $(0, 1)$, $[-2, 1]$, $(0, 3]$, $[0, \infty)$, d) množina $[0, 1] \cup [2, 3]$,
e) množina všech iracionálních čísel z $(0, 1)$, f) množina všech racionálních čísel z $(0, 1)$,
g) množina $\{n + 1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$, h) množina $\{(-1)^n \cdot (n/(n+1)) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

21. Najděte maximum, minimum, suppremum a infimum (jestliže existují) funkce f na množině Y, jestliže :

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ a $Y = \{(-1)^n/n \mid n \in \mathbb{N}\}$;
b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x$ a $Y = \{(-1)^n(n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$;
c) $f = \varrho$ a $Y = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

22. Platí věta o supremu (infimu) i v množinách $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, Q?

23. Předpokládejme, že množiny $X, Y \subset \mathbb{R}$ mají supremum. Nalezněte:

a) $\sup(X \cup Y)$; b) $\inf(-X)$;
c) $\inf(1/X)$ (za předpokladu $0 < X$).

24. Existuje funkce, která je zároveň sudá i lichá?

25. Ukažte, že pro každou lichou funkci f platí: Jestliže $0 \in \operatorname{Dom} f$, potom $f(0) = 0$.

26. Buď $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkce taková, že: Jestliže $x \in \operatorname{Dom} f$, potom $-x \in \operatorname{Dom} f$. Ukažte, že funkci f lze vyjádřit jako součet sudé a liché funkce.

Návod: $f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$.

27. Buďte $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sudé funkce, buďte $g_1, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liché funkce. Rozhodněte, které z uvedených funkcí jsou sudé (resp. liché): $f_1 + f_2$, $g_1 + g_2$, $f_1 \cdot f_2$, $g_1 \cdot g_2$, $f_1 + g_1$, $f_1 \cdot g_1$, $f_1 \circ g_1$, $g_1 \circ f_1$.

28. Zjistěte, které z následujících funkcí jsou sudé resp. liché:

a) $f(x) = x/|x|$; b) $f(x) = x^4 - 2x^2$;
c) $f(x) = (2-x)/(2+x)$; d) $f(x) = x - x^3/6 + x^5/120$;
e) $f(x) = 2$.

29. Existuje ke každé funkci funkce inverzní? Může existovat inverzní funkce k funkci periodické?

30. Ukažte, že každá z následujících funkcí je sama k sobě inverzní:

a) $f(x) = x$; b) $f(x) = -x$; c) $f(x) = 1/x$;
d) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$; e) $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x-2}$; f) $f(x) = \dfrac{ax+b}{x-a}$ $(a, b \in \mathbb{R})$.

31. Dokažte následující tvrzení: Buď $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkce rostoucí na každém intervalu $(-n, n)$, kde $n \in \mathbb{N}$. Pak je f rostoucí na $\mathbb{R}$.

32. Sestrojte rostoucí funkce f, g na intervalu (x, y) tak, aby funkce $f \cdot g$ nebyla rostoucí na (x, y).

33. Existuje funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je současně rostoucí na $\mathbb{R}$ a lichá (resp. rostoucí na $\mathbb{R}$ a sudá)?

34. Dokažte následující tvrzení: Buďte $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkce takové, že f je neklesající na $\mathbb{R}$ a $f + g$ je klesající na $\mathbb{R}$. Pak g je klesající na $\mathbb{R}$.

35. Dokažte následující tvrzení: Buď $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkce neklesající na intervalu (x, y). Pak je pro každé $z \in (x, y)$ množina $f^{-1}(z) \cap (x, y)$ prázdná nebo jednoprvková nebo interval.

36. Rozhodněte, na kterých intervalech jsou dané funkce rostoucí a na kterých klesající:

a) $f(x) = x^2$; b) $f(x) = x^3$; c) $f(x) = |x|$;
d) $f(x) = x + |x|$.

37. Je-li funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rostoucí, je nutně

a) funkce $2f$ rostoucí, b) funkce $-f$ klesající, c) funkce f^2 rostoucí?

38. Nechť funkce f i g jsou definovávy na stejném intervalu.

a) Jsou-li funkce f i g rostoucí, je funkce $f + g$ také rostoucí?

b) Najděte rostoucí funkci f a klesající funkci g tak, aby funkce $f + g$ byla rostoucí.

39. Sestrojte funkce $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tak, aby platilo $f \cdot g = 0$ a neplatilo ani $f(X) = \{0\}$ ani $g(X) = \{0\}$. Je možné nalézt takové funkce pro libovolnou neprázdnou množinu X?

40. Rozhodněte, zda platí následující tvrzení: Buď $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkce taková, že pro každý otevřený interval J platí $f(J) \subset J$. Pak $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

41. Načrtněte graf funkce f, je-li:

a) $f(x) = |x+1| + |x-1|$; b) $f(x) = |x-1|$; c) $f(x) = -x|x|$;
d) $f(x) = (x-1)/(x+1)$.

42. Nechť $p : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $p(x) = \dfrac{1}{x} - 1$. Ověřte, že platí:

a) $p + p \circ (-\mathrm{id}_{\mathbb{R}}) = -2$; b) $p \circ (2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}}) = \frac{1}{2}(p-1)$; c) $p \circ (1 - \mathrm{id}_{\mathbb{R}}) = \dfrac{1}{p}$;
d) $\dfrac{-1}{p \circ (\mathrm{id}_{\mathbb{R}} + 1)} = p + 2$; e) $\dfrac{1}{p+1} = p \circ \left(\dfrac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}\right) + 1$.

43. Známe-li graf funkce $f(x)$, jak sestrojíte grafy funkcí $f(-x)$, $-f(x)$, $f(x+c)$, $f(x)+c$, $a \cdot f(x)$, $f(a \cdot x)$?

44. Jsou dány funkce f a g. Najděte $|f|$, $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, f/g, $f \circ g$, $g \circ f$, platí-li:

a) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x$, $g(x) = 2 - x$;

b) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pro } x \le 0, \\ x, & \text{pro } x > 0, \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 0, & \text{pro } x \le 0, \\ -x^2, & \text{pro } x > 0; \end{cases}$

c) $f, g : [0,2] \to [0,2]$, $f(x) = \begin{cases} x, & \text{pro } x \in [0,1], \\ 2-x, & \text{pro } x \in (1,2], \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x, & \text{pro } x \in \mathbb{Q}, \\ 2-x, & \text{pro } x \in \mathbb{I}. \end{cases}$

45. Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{pro } x < 1, \\ 2x-1, & \text{pro } x \ge 1, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2-x^2, & \text{pro } x < 0, \\ x+2 & \text{pro } x \ge 0. \end{cases}$$

a) Určete, pro která x platí $f(x) = 0$, $g(x) = 0$, $f(x) = x$, $g(x) = x$, $f(x) = g(x)$, $f(g(x)) = 1$, $g(f(x)) = 1$.

b) Dokažte, že $f(x) \ge 0$ pro všechna x.

c) Dokažte, že $g(f(x)) > 0$ pro všechna x.

d) Zjistěte, zda existuje inverzní funkce k funkcím f, g.

e) Určete funkci $f \circ g$ a načrtněte její graf.

46. Buďte f periodická funkce s periodou p a n přirozené číslo. Ukažte, že číslo np je také perioda této funkce.

47. Ukažte, že každá konstantní funkce je periodická.

48. Udejte příklad nekonstantní periodické funkce, která nemá nejmenší periodu.

49. Které z následujících funkcí $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou periodické:

a) $f(x) = [x]$; b) $f(x) = x - [x]$.

50. Nechť funkce $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou periodické se stejnou periodou. Dokažte, že funkce $f + g$ a $f \cdot g$ jsou periodické.

51. Je součet dvou periodických funkcí vždy periodická funkce?

52. Určete $\sup_{x \in X} f(x)$, $\inf_{x \in X} f(x)$, $\max_{x \in X} f(x)$, $\min_{x \in X} f(x)$, je-li:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ a $X = \mathbb{R}$; b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ a $X = (-3, 2)$;

c) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$ a $X = (-\infty, 0)$.

53. Buďte $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ohraničené funkce, nechť pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $h(x) \neq 0$. Rozhodněte, zda funkce $f + g$, $f \cdot g$, $1/h$, g/h jsou ohraničené na $\mathbb{R}$.

54. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ukažte, že je f konvexní na $\mathbb{R}$ jestliže

a) $f(x) = |x| - x$; b) x^2.