Matematická analýza I
přednášky M. Málka
cvičení A. Hakové a R. Otáhalové
Zimní semestr 2004/05

5. Posloupnosti a řady

5.1 Limita a hromadné hodnoty. Mějme posloupnost (x_n) prvků Hausdorffova topologického prostoru X. Jelikož ∞ je prvkem uzávěru množiny $\mathbb{N}$, můžeme uvažovat limitu $\lim_{n\to\infty} x_n$. Pokud nedojde k mýlce, budeme tuto limitu označovat prostě $\lim x_n$.

Následující kritérium pro limitu posloupnosti je přímým důsledkem definice limity:

Věta 5.1. *Posloupnost (x_n) prvků topologického prostoru X má limitu x_0, právě když pro každé okolí U bodu x_0 existuje přirozené číslo n_0 takové, že pro každé přirozené číslo $n \geq n_0$ platí $x_n \in U$.*

Prvek x_0 se nazývá *hromadná hodnota posloupnosti* (x_n), jestliže ke každému jeho okolí U existuje nekonečně mnoho přirozených čísel k takových, že $x_k \in U$.

Věta 5.2. *Množina hromadných hodnot libovolné posloupnosti je uzavřená.*
D ů k a z. Označme A množinu hromadných hodnot posloupnosti (x_n). Zvolme libovolný prvek $x \in X \setminus A$. Jelikož x není hromadnou hodnotou, musí mít okolí U, které obsahuje pouze konečně mnoho členů posloupnosti (x_n). Pak ale každý prvek okolí U má tutéž vlastnost a $U \subset X \setminus A$. Tím jsme dokázali, že množina $X \setminus A$ je otevřená.

Věta 5.3. *Předpokládejme, že topologický prostor X je kompaktní a uvažujme posloupnost (x_n) prvků X.*
1. (x_n) má hromadnou hodnotu.
2. Má-li posloupnost (x_n) jedinou hromadnou hodnotu x_0, pak $\lim x_n = x_0$.
D ů k a z. 1. Předpokládejme, že žádný prvek množiny X není hromadnou hodnotou posloupnosti (x_n). Pak každý prvek $x \in X$ má okolí U_x, které obsahuje pouze konečně mnoho členů posloupnosti (x_n). Systém $S = \{U_x \mid x \in X\}$ je otevřené pokrytí množiny X a má konečné podpokrytí $T \subset S$. Nyní je zřejmé, že ve sjednocení systému T leží jen konečně mnoho členů posloupnosti (x_n). Ovšem $\cup T \subset X$ a máme co? A máme spor.

2. Kdyby neplatilo $\lim x_n = x_0$, pak existuje okolí U prvku x_0 takové, že v množině $X \setminus U$ leží nekonečně mnoho členů posloupnosti (x_n). Tyto prvky tvoří posloupnost v kompaktním topologickém prostoru $X \setminus U$,[1)] která má podle bodu 1. hromadnou hodnotu, různou od x_0. To je spor.

5.2 Posloupnosti reálných čísel. Pravíme, že posloupnost reálných čísel je *konvergentní*, má-li limitu v $\mathbb{R}$. Je-li limitou této posloupnosti ∞ nebo $-\infty$, říkáme, že je *divergentní*. Posloupnost, která není ani konvergentní, ani divergentní, se nazývá *oscilující*.

Ze cvičení 11 k předchozí kapitole víme, že množina $\overline{\mathbb{R}}$ je kompaktní. Podle věty 5.3 má tedy každá posloupnost reálných čísel v $\overline{\mathbb{R}}$ hromadnou hodnotu — množina hromadných hodnot je neprázdná. Podle věty 5.2 je tato množina navíc uzavřená, což ovšem dohromady znamená, že má nejmenší a největší prvek. Můžeme tedy zformulovat následující výsledek:

Věta 5.4. *1. Každá posloupnost reálných čísel má v $\overline{\mathbb{R}}$ největší a nejmenší hromadnou hodnotu.*
2. Je-li tato posloupnost navíc ohraničená, jsou tyto hromadné hodnoty reálná čísla.
D ů k a z. Bod 1. jsme dokázali v předchozím odstavci, bod 2. je zřejmý.

Největší hromadná hodnota posloupnosti reálných čísel (x_n) se nazývá *limes superior posloupnosti* (x_n) a označuje $\limsup_{n\to\infty} x_n$ nebo $\limsup x_n$. Nejmenší hromadná hodnota této posloupnosti se nazývá *limes inferior posloupnosti* (x_n) a označuje $\liminf_{n\to\infty} x_n$ nebo $\liminf x_n$.

Je-li σ rostoucí posloupnost přirozených čísel, pak posloupnost (x_{σ_n}) se *nazývá posloupnost vybraná z posloupnosti* (x_n) nebo *podposloupnost posloupnosti* (x_n).

[1)] Jak víme, že je kompaktní?

Věta 5.5. *Buď (x_n) posloupnost reálných čísel. Pak bod $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ je hromadnou hodnotou této posloupnosti, právě když existuje vybraná posloupnost x_{σ_n} taková, že* $\lim x_{\sigma_n} = x_0$.
D ů k a z. Buď U okolí bodu x_0. Předpokládejme, že existuje vybraná posloupnost x_{σ_n} taková, že $\lim x_{\sigma_n} = x_0$. Označme n_0 přirozené číslo takové, že pro každé $n \geq n_0$ je $x_{\sigma_n} \in U$ (věta 5.1). Hledanými čísly k jsou čísla $\sigma_{n_0}, \sigma_{n_0+1}, \sigma_{n_0+2}, \dots$

Nyní dokážeme opačné tvrzení pro $x_0 \in \mathbb{R}$ (pro $x_0 \in \{\infty, -\infty\}$ přenecháme důkaz čtenáři). Označme I_n interval $(x_0 - 1/n, x_0 + 1/n)$. Pomocí principu matematické indukce zkonstruujeme vybranou posloupnost (x_{σ_n}) takovou, že pro každé n je $x_n \in I_n$. Označme σ_1 nejmenší přirozené číslo, pro které $x_{\sigma_1} \in I_1$ (takových přirozených čísel je podle předpokladu nekonečně mnoho). Podobně, označme σ_2 nejmenší přirozené číslo větší než σ_1, pro které $x_{\sigma_2} \in I_2$ (přirozených čísel $k > \sigma_1$, pro která $x_k \in I_2$ je nekonečně mnoho). Předpokládejme nyní, že již máme čísla $\sigma_1 < \ldots < \sigma_n$, která naši podmínku splňují. Pak σ_{n+1} budiž nejmenší přirozené číslo, pro které $\sigma_{n+1} > \sigma_n$ a $x_{\sigma_{n+1}} \in I_{n+1}$. Tím je hledaná vybraná posloupnost (x_{σ_n}) zkonstruována a věta dokázána.

Posloupnost (x_n) prvků množiny $\mathbb{R}$ se nazývá *cauchyovská*, jestliže ke každému reálnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje přirozené číslo n_0 takové, že pro každé $n_1, n_2 > n_0$ platí

$$|x_{n_1} - x_{n_2}| < \varepsilon \tag{5.2.1}$$

Věta 5.6. *Každá konvergentní posloupnost reálných čísel je cauchyovská. Každá cauchyovská posloupnost reálných čísel je konvergentní.*
D ů k a z. Buď (x_n) konvergentní posloupnost reálných čísel, x_0 její limita. Zvolme libovolné číslo $\varepsilon > 0$ a označme n_0 přirozené číslo takové, že pro každé $n > n_0$ je $|x_n - x_0| < \varepsilon/2$. Buďte nyní $n_1, n_2 > n_0$. Máme

$$|x_{n_1} - x_{n_2}| = |x_{n_1} - x_0 + x_0 - x_{n_2}| \leq |x_{n_1} - x_0| + |x_0 - x_{n_2}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Každá konvergentní posloupnost je tedy cauchyovská.

Mějme nyní cauchyovskou posloupnost (x_n) a označme n_0 přirozené číslo takové, že pro každé $n_1, n_2 \geq n_0$ je $|x_{n_1} - x_{n_2}| < 1$. Dále označme

$$M = \max\{x_1, x_2, \dots x_{n_0}\} + 1,$$
$$m = \min\{x_1, x_2, \dots x_{n_0}\} - 1.$$

Nyní pro libovolné $n \in \{1, 2, \dots, n_0 - 1\}$ platí $x_n < M$ a pro $n \geq n_0$ je $|x_n - x_{n_0}| < 1$, což znamená, že $x_n < x_{n_0} + 1 \leq M$. Posloupnost (x_n) je tedy shora ohraničená číslem M. Stejným způsobem se dokáže, že posloupnost (x_n) je také zdola ohraničená číslem m. Položme $a = \liminf x_n$ a $b = \limsup x_n$. Máme $a, b \in \mathbb{R}$ (věta 5.4).

Předpokládejme, že $a < b$ a položme $\varepsilon = \frac{1}{3}(b - a)$. Pak existuje přirozené číslo n_0 takové, že pro každé $n_1, n_2 > n_0$ je $|x_{n_1} - x_{n_2}| < \varepsilon$. Zvolme nyní $k, l \geq n_0$ tak, aby $|x_k - a| < \varepsilon$ a $|x_l - b| < \varepsilon$ (čísla k, l existují, jelikož a a b jsou hromadné hodnoty — věta 5.5). Dostáváme $x_l > b - \varepsilon$, $x_k < a + \varepsilon$, čili

$$x_l - x_k > b - \varepsilon - a - \varepsilon = 3\varepsilon - 2\varepsilon = \varepsilon$$

a to je spor, jelikož podle předpokladu, $x_l - x_k < \varepsilon$.

Dostáváme tedy $a = b$ a tvrzení plyne z věty 5.3.

5.3 Posloupnosti funkcí. Nechť $Y \subset X \subset \mathbb{R}$. Uvažujme posloupnost (f_n) funkcí $f_n : X \to \mathbb{R}$. Říkáme, že tato posloupnost *konverguje bodově k funkci $f : Y \to \mathbb{R}$ na množině Y*, jestliže pro každé $x \in Y$ platí $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Funkce f se nazývá *limita* posloupnosti (f_n) a označuje $\lim f_n$. Říkáme, že posloupnost (f_n) *konverguje k funkci f na množině Y stejnoměrně*, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ a $x \in Y$ platí $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Z uvedených definic ihned plyne: Jestliže posloupnost (f_n) konverguje k funkci f na množině Y stejnoměrně, pak k této funkci na této množině konverguje i bodově. Tuto implikaci lze obrátit například jsou-li funkce f_n konstantní.

Obsahuje-li množina Y všechna čísla $x \in X$, pro něž existuje $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, nazývá se *obor konvergence posloupnosti* (f_n).

Nechť $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x}{n}.$$

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$; oborem konvergence této posloupnosti je tedy množina $\mathbb{R}$. Předpokládejme nyní, že množina $Y \subset \mathbb{R}$ je ohraničená a $-M < Y < M$. K libovolnému $\varepsilon > 0$ zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby $M/n_0 < \varepsilon$. Pak pro každé $n \geq n_0$ a $x \in Y$ platí $|f_n(x)| = |x/n| \leq |x/n_0| \leq M/n_0 < \varepsilon$. Posloupnost (f_n) tedy konverguje stejnoměrně k nule na Y. Není-li ovšem množina Y ohraničená, najdeme ke každému $\varepsilon > 0$ a $n \in \mathbb{N}$ číslo $x \in Y$ takové, že $|x| > n\varepsilon$, neboli $|x/n| = |f_n(x)| > \varepsilon$. V tomto případě tedy posloupnost (f_n) na Y stejnoměrně nekonverguje.

Věta 5.7. *Jestliže k posloupnosti (f_n) funkcí $f_n : X \to \mathbb{R}$ a funkci $f : Y \to \mathbb{R}$ existuje posloupnost (y_n) taková, že $\lim y_n = 0$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x \in Y$ je $|f_n(x) - f(x)| < y_n$, pak posloupnost (f_n) konverguje stejnoměrně k funkci f na množině Y.*
D ů k a z. Zvolme $\varepsilon > 0$ a označme n_0 takové číslo, že pro každé $n > n_0$ platí $y_n < \varepsilon$. Pak pro každé $x \in Y$ platí $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ a tvrzení je dokázáno.

Následující tvrzení budeme často používat.

Věta 5.8. *Posloupnost (f_n) konverguje stejnoměrně na Y, právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje číslo n_0 takové, že pro každé $n_1, n_2 > n_0$ a $x \in Y$ platí $|f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x)| < \varepsilon$.*
D ů k a z. Jestliže posloupnost (f_n) konverguje stejnoměrně na Y k funkci f, pak k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje číslo n_0 takové, že pro každé $x \in Y$ a $n_1, n_2 > n_0$ platí

$$\begin{aligned} |f_{n_1}(x) - f(x)| &< \frac{\varepsilon}{2}, \\ |f_{n_2}(x) - f(x)| &< \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

Máme tedy

$$\begin{aligned} |f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x)| &= |f_{n_1}(x) - f(x) + f(x) - f_{n_2}(x)| \\ &\leq |f_{n_1}(x) - f(x)| + |f_{n_2}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Předpokládejme nyní naopak, že je splněna druhá podmínka tvrzení. Zvolme $\varepsilon > 0$ a označme n_0 číslo takové, že pro každé $n_1, n_2 > n_0$ a $x \in Y$ platí

$$|f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.3.2}$$

Podle předpokladu je posloupnost $(f_n(x))$ cauchyovská a existuje tedy číslo $f(x)$ takové, že $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Máme tedy

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \tag{5.3.3}$$

tvrzení je dokázáno.

Věta 5.9. *Nechť posloupnost (f_n) funkcí spojitých v bodě $x_0 \in Y$ stejnoměrně konverguje na množině Y k funkci f. Pak funkce f je spojitá v bodě x_0.*
D ů k a z. Položme $y_n = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$ a zvolme $\varepsilon > 0$. Pak existuje číslo n_1 takové, že pro každé $x \in Y$ a $n > n_1$ platí

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{5.3.4}$$

a číslo n_2 takové, že pro každé $n > n_2$,

$$|f_n(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5.3.5}$$

Položme $n = \max\{n_1, n_2\}$. Funkce f_n je spojitá v bodě x_0, existuje tedy okolí U tohoto bodu, tak, že pro každé $x \in Y \cap U$ platí

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5.3.6}$$

Pro libovolný bod $x \in Y \cap U$ (a pro *pevné* n, které jsme si před chvílí vybrali) tedy platí

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &< |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

což dokazuje spojitost funkce f v bodě x_0.

Uvažme funkce $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$. Snadno zjistíme, že pro $x < 1$ je $\lim f_n(x) = 0$, ale $\lim f_n(1) = 1$. Limitou posloupnosti (f_n) je tedy nespojitá funkce $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1, \\ 1 & x = 1. \end{cases}$$

Podle uvedené věty není konvergence posloupnosti (f_n) stejnoměrná. Vskutku, ke každému číslu $\varepsilon > 0$, $0 < \varepsilon < 1$, najdeme číslo $x \in [0,1)$ tak, že $f_n(x) > \varepsilon$.

Důsledek 5.10. *Nechť posloupnost (f_n) stejnoměrně konverguje na množině Z k funkci f a nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje limita $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = a_n$. Pak existují i limity $\lim a_n$ a $\lim_{x\to x_0} f(x)$ a platí*

$$\lim a_n = \lim_{x\to x_0} f(x). \tag{5.3.7}$$

5.4 Řady. Mějme posloupnost (x_n) reálných čísel. *Nekonečnou řadou, určenou posloupností* (x_n), rozumíme symbol $\sum x_n$. Posloupnost (s_n), jejíž členy jsou dány předpisem $s_n = x_1 + \ldots + x_n$ ($n = 1, 2, \ldots$), nazýváme *posloupnost částečných součtů řady* $\sum x_n$.

Jestliže posloupnost částečných součtů řady $\sum x_n$ konverguje, hovoříme o *konvergentní řadě* a číslo $\lim s_n$ nazýváme jejím *součtem*. V opačném případě hovoříme o *divergentní řadě.*

Součet nekonečné řady $\sum x_n$ obvykle rovněž označujeme symbolem $\sum x_n$ (pokaždé je přitom jasné, v jakém významu jsme tento symbol zrovna použili). Tvrzení $\sum x_n = s$ znamená: „Řada $\sum x_n$ konverguje a její součet je s“. Kromě tohoto zápisu používáme i zápis $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Zápis $\sum_{n=k}^{\infty} x_n$ znamená $\sum_{n=1}^{\infty} x_{n+k-1}$. V takovém případě budeme používat následující značení pro posloupnost částečných součtů: $s_n = x_k + x_{k+1} + \ldots + x_n$.

Nechť $q \in \mathbb{R}$. Řada $\sum q^{n-1}$ se nazývá *geometrická řada s kvocientem* q.e-li $q \neq 1$, pak pro n-tý člen s_n její posloupnosti částečných součtů platí

$$s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q}{1-q}(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}) = \frac{1-q^n}{1-q}. \tag{5.4.1}$$

Je-li $q = 1$, platí

$$s_n = n, \tag{5.4.2}$$

Vidíme tedy, že $\lim s_n$ existuje, právě když $|q| < 1$, a je rovna $1/(1-q)$. Uvedená řada tedy konverguje, právě když $|q| < 1$, a v tom případě platí $\sum q^{n-1} = 1/(1-q)$. Geometrická řada s $q = -1$ se nazývá *Grandiho řada.*

Řada $\sum 1/n$ se nazývá *harmonická řada.* Pro posloupnost (s_n) jejích částečných součtů platí

$$
\begin{aligned}
s_1 &= 1\\
s_2 &= 1 + \frac{1}{2}\\
s_4 &= s_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = s_2 + \frac{1}{2}\\
&\vdots\\
s_{2^{n+1}} &= s_{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}} > s_{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}} = s_{2^n} + \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Harmonická řada tedy diverguje.

Nechť

$$x_n = \frac{1}{n^2 - 1}. \tag{5.4.3}$$

Pro n-tý člen s_n posloupnosti částečných součtů řady $\sum_{n=2}^{\infty} x_n$ platí

$$
\begin{aligned}
s_n &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \ldots + \frac{1}{n-3} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).
\end{aligned}
$$

Je tedy $\sum_{n=2}^{\infty} x_n = \lim s_n = \frac{3}{4}$.

Věta 5.11 (Cauchyho-Bolzanovo kritérium). *Řada $\sum x_n$ konverguje, právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje číslo n_0 takové, že pro každé $n_1, n_2 > n_0$ platí*

$$|x_{n_1} + \ldots + x_{n_2}| < \varepsilon. \tag{5.4.4}$$

D ů k a z. Je-li s_n posloupnost částečných součtů řady $\sum x_n$ a $n_2 \geq n_1$, platí

$$|x_{n_1} + \ldots + x_{n_2}| = |s_{n_2} - s_{n_1-1}|. \tag{5.4.5}$$

Cauchyho-Bolzanovo kritérium tedy plyne z věty 5.6.

Jestliže v (5.4.5) položíme $n_1 = n_2$, dostaneme:

Důsledek 5.12 (nutná podmínka konvergence řady). *Konverguje-li řada $\sum x_n$, pak platí* $\lim x_n = 0$.

Aplikujte toto tvrzení na geometrickou a harmonickou řadu!

Důsledek 5.13. *Jestliže řada $\sum x_n$ konverguje, pak platí* $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} x_k = 0$.

Věta 5.14. *Mějme dvě posloupnosti reálných čísel (x_n), (y_n) a číslo c. Jestliže řady $\sum x_n$ a $\sum y_n$ konvergují, pak konvergují i řady $\sum(x_n + y_n)$ a $\sum c x_n$ a platí*

$$
\begin{aligned}
\sum(x_n + y_n) &= \sum x_n + \sum y_n,\\
\sum c x_n &= c \sum x_n.
\end{aligned} \tag{5.4.6}
$$

D ů k a z. Platí

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}(x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + \ldots + x_n + y_n)\\
&\quad = \lim_{n\to\infty}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + \lim_{n\to\infty}(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) = \sum x_n + \sum y_n,
\end{aligned}
$$

$$\lim_{n\to\infty}(cx_1 + cx_2 + \ldots + cx_n) = c\lim(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = c\sum x_n.$$

Z uvedeného tvrzení ihned plyne (jak?), že jestliže řada $\sum x_n$ konverguje a řada $\sum y_n$ diverguje, pak řada $\sum x_n + y_n$ diverguje. Jestliže první dvě řady divergují, nelze o konvergenci třetí říci nic (uveďte příklady).

Věta 5.15. *Jestliže pro posloupnosti (x_n) a (y_n) existuje číslo n_0 takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $x_n = y_n$, pak $\sum x_n$ konverguje, právě když konverguje $\sum y_n$.*
D ů k a z. Za daných předpokladů konverguje řada $\sum(x_n - y_n)$. Dále viz větu 5.14.

Věta 5.16. *Nechť k je nezáporné celé číslo. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje, právě když konverguje řada $\sum_{n=k}^{\infty} x_n$.*
D ů k a z. Nechť $y_n = 0$ pro $n < k$ a $y_n = x_n$ pro $n \geq k$ Řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje, právě když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ (liší se konečným počtem členů — viz větu 5.15) a řada $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ konverguje, právě když konverguje řada $\sum_{n=k}^{\infty} x_n$ (porovnejte jejich posloupnosti částečných součtů).

Věta 5.17. *Nechť (k_n) je rostoucí posloupnost nezáporných celých čísel, $k_1 = 1$. Jestliže $\sum x_n = s$, pak pro posloupnost $(y_n) = (x_{k_n} + x_{k_n+1} + \ldots + x_{k_{n+1}-1})$ platí $\sum y_n = s$.*
D ů k a z. Stačí si uvědomit, že posloupnost částečných součtů řady $\sum y_n$ je vybraná z posloupnosti částečných součtů řady $\sum x_n$.

Opačné tvrzení neplatí; vyzkoušejte na Grandiho řadě, pro (k_n) posloupnost lichých čísel.

5.5 Řady s nezápornými členy. Nechť $(x_n) \geq 0$. Posloupnost částečných součtů řady $\sum x_n$ je neklesající. Konverguje tedy, právě když je ohraničená a právě když konverguje nějaká její podposloupnost. Jinak diverguje k $+\infty$.

Věta 5.18 (srovnávací kritérium). *Nechť $\sum x_n$ a $\sum y_n$ jsou řady s nezápornými členy a nechť existuje číslo n_0 takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí*

$$x_n \leq y_n \tag{5.5.1}$$

Potom z konvergence řady $\sum y_n$ plyne konvergence řady $\sum x_n$.
D ů k a z. Nechť řada $\sum y_n$ konverguje. Položme

$$\overline{x}_n = \begin{cases} 0 & \text{pro } n < n_0 \\ x & \text{pro } n \geq n_0. \end{cases}$$

Pro posloupnosti $(\overline{s}_n)$ a (t_n) částečných součtů řad $\sum \overline{x}_n$ a $\sum y_n$ platí $(\overline{s}_n) \leq (t_n)$. Posloupnost (t_n) ohraničená. Je tedy ohraničená i posloupnost $(\overline{s}_n)$ a řada $\sum \overline{x}_n$ konverguje. Podle věty 5.16 z konvergence řady $\sum \overline{x}_n$ plyne konvergence řady $\sum x_n$.

Řada $\sum y_n$ z předchozí věty se nazývá *majoranta* řady $\sum x_n$. Řada $\sum x_n$ se nazývá *minoranta* řady $\sum y_n$.

Věta 5.19 (limitní srovnávací kritérium). *Nechť $\sum x_n$ a $\sum y_n$ jsou řady s nezápornými členy a nechť existuje konečné*

$$\limsup \frac{x_n}{y_n}. \tag{5.5.2}$$

Potom z konvergence řady y_n plyne konvergence řady x_n.
D ů k a z. Z definice limes superior posloupnosti plyne, že posloupnost (x_n/y_n) je shora ohraničená. Existuje tedy číslo M takové, že pro každé n platí $x_n/y_n < M$, neboli $x_n < My_n$. Z věty 5.14 a konvergence řady $\sum y_n$ plyne konvergence řady $\sum My_n$. Z ní a ze srovnávacího kritéria plyne konvergence řady $\sum x_n$.

Ekvivalentní tvrzení k tvrzení srovnávacího kritéria (limitního i nelimitního) je: *Důsledkem divergence řady* $\sum x_n$ *je divergence řady* $\sum y_n$.

Věta 5.20 (d'Alembertovo podílové kritérium). *Buď* $\sum x_n$ *řada s kladnými členy. Existují-li čísla* $q < 1$ *a* n_0 *taková, že pro každé* $n \geq n_0$ *je*

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq q, \tag{5.5.3}$$

řada konverguje. Existuje-li číslo n_0 *takové, že pro každé* $n \geq n_0$ *je*

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1, \tag{5.5.4}$$

řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence.

D ů k a z. Dokážeme první tvrzení. Nechť $y_n = x_n$ pro $n < n_0$ a $y_n = q^{n-n_0}x_{n_0}$ pro $n \geq n_0$ Řada $\sum y_n$ konverguje (to plyne z konvergence geometrické řady a věty 5.18). Dále

$$\begin{aligned}
&x_{n_0+1} \leq qx_{n_0},\\
&x_{n_0+2} \leq qx_{n_0+1} \leq q^2x_{n_0},\\
&\quad\vdots\\
&x_{n_0+p} \leq qx_{n_0+p-1} \leq \ldots \leq q^{p-1}x_{n_0+1} \leq q^p x_{n_0}.
\end{aligned}$$

Řada $\sum y_n$ je tedy majoranta naší řady a první tvrzení plyne ze srovnávacího kritéria. Důkaz druhého tvrzení je zřejmý.

Věta 5.21 (limitní podílové kritérium). *Jestliže pro řadu* $\sum x_n$ *s kladnými členy je*

$$\limsup \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1, \tag{5.5.5}$$

pak konverguje. Je-li

$$\liminf \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1, \tag{5.5.6}$$

řada nesplňuje nutnou podmínku konveregence.

D ů k a z. Označme $a = \limsup x_{n+1}/x_n$, $b = \liminf x_{n+1}/x_n$. Nechť $a < q < 1$. Podle definice limes superior posloupnosti existuje číslo n_0 takové, že pro každé $n \geq n_0$ je $x_{n+1}/x_n \leq q$. První tvrzení tedy plyne z podílového kritéria. Jestliže $b > 1$, pak existuje číslo n_0 takové, že pro $n \geq n_0$ je $x_{n+1}/x_n > 1$, a druhé tvrzení plyne rovněž z podílového kritéria.

Věta 5.22 (Cauchyho odmocninové kritérium). *Buď* $\sum x_n$ *řada s nezápornými členy. Existují-li čísla* $q < 1$ *a* n_0 *taková, že pro každé* $n \geq n_0$ *je*

$$\sqrt[n]{x_n} \leq q, \tag{5.5.7}$$

řada konverguje. Existuje-li číslo n_0 *takové, že pro každé* $n \geq n_0$ *je*

$$\sqrt[n]{x_n} \geq 1, \tag{5.5.8}$$

řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence.

D ů k a z. Je podobný důkazu podílového kritéria a přenecháváme jej čtenáři jako užitečné cvičení.

Věta 5.23 (limitní odmocninové kritérium). *Jestliže pro řadu* $\sum x_n$ *s nezápornými členy je*

$$\limsup \sqrt[n]{x_n} < 1, \tag{5.5.9}$$

pak konverguje. Je-li

$$\limsup \sqrt[n]{x_n} > 1 \tag{5.5.10}$$

řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence.
D ů k a z. Postupujeme podobně, jako v důkazu limitního podílového kritéria.

5.6 Alternující řady. Řekneme, že řada $\sum x_n$ je *alternující*, jestliže pro každý člen x_n má člen x_{n+1} opačné znaménko.

Věta 5.24 (Leibnitzovo kritérium pro alternující řady). *Buď $\sum x_n$ alternující řada splňující podmínky $\lim x_n = 0$ a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > n_0$ je $|x_{n+1}|/|x| < 1$, pak řada konverguje.*
D ů k a z. S ohledem na větu 5.15 můžeme předpokládat, že $x_n \geq 0$ pro lichá n a $x_n \leq 0$ pro sudá n a že podmínka $|x_{n+1}|/|x_n| < 1$ platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Označme (s_n) posloupnost částečných součtů řady $\sum x_n$. Máme

$$\begin{aligned} s_{2n+2} &= s_{2n} + x_{2n+1} + x_{2n+2} \geq s_{2n}, && \text{(neboť } |x_{2n+1}| \geq |x_{2n+2}|) \\ s_{2n+1} &= s_{2n-1} + x_{2n} + x_{2n+1} \leq s_{2n-1}. && \text{(neboť } |x_{2n}| \geq |x_{2n+1}| \end{aligned}$$

Odtud plyne

$$s_2 \leq s_4 \leq s_6 \leq \dots \tag{5.6.1}$$
$$s_1 \geq s_3 \geq s_5 \geq \dots \tag{5.6.2}$$
$$s_{2n} = s_{2n-1} + x_{2n} \leq s_{2n-1}. \qquad \text{(protože } x_{2n} \leq 0) \tag{5.6.3}$$

Posloupnost (s_{2n}) je neklesající a shora ohraničená, neboť $s_{2n} \leq s_{2n-1} \leq s_1$, existuje tedy $\lim s_{2n} = s$. Podle (5.6.3) také $\lim s_{2n-1} = \lim s_{2n} - \lim x_{2n} = s$.

Zvolme $\varepsilon > 0$ podle předchozího odstavce existují přirozená čísla n_1, n_2 taková, že pro $n > n_1$ je $|s_{2n} - s| < \varepsilon$ a pro $n > n_2$ je $|s_{2n-1} - s| < \varepsilon$. Položme $m_0 = \max\{2n_1, 2n_2 - 1\}$, je-li $m > m_0$ přirozené číslo, potom pokud m je sudé a $m = 2n \geq 2n_1$ tedy $|s_m - s| = |s_{2n} - s| < \varepsilon$; nebo je m liché a $m = 2n - 1 \geq 2n_2 - 1$ a opět $|s_m - s| = |s_{2n-1} - s| < \varepsilon$. Což dokazuje konvergenci posloupnosti (s_n).

5.7 Absolutně konvergentní řady. K definici absolutně konvergentní řady musíme nejprve dokázat následující pomocné tvrzení:

Věta 5.25. *Konverguje-li řada $\sum |x_n|$, konverguje i řada $\sum x_n$ a platí $\left|\sum x_n\right| \leq \sum |x_n|$.*
D ů k a z. Pro libovolná čísla $n_1 \leq n_2$ platí

$$|x_{n_1} + \dots + x_{n_2}| \leq |x_{n_1}| + \dots + x_{n_2}.$$

Je-li tedy podmínka Cauchyho–Bolzanova kritéria splněna pro řadu $\sum |x_n|$, je splněna i pro řadu $\sum x_n$.

Položíme-li $n_1 = 1$, dostaneme nerovnost pro posloupnosti částečných součtů zkoumaných řad, ze které vyplývá nerovnost z tvrzení.

Řada $\sum x_n$, pro kterou konverguje řada $\sum |x_n|$, se nazývá *absolutně konvergentní*. Z předchozí věty plyne, že absolutně konvergentní řada je konvergentní. Konvergentní řada, která není absolutně konvergentní, se nazývá *neabsolutně konvergentní*.

Věta 5.26. *Mějme dvě posloupnosti reálných čísel (x_n), (y_n) a číslo $c \in \mathbb{R}$. Jestliže řady $\sum x_n$ a $\sum y_n$ absolutně konvergují, pak absolutně konvergují i řady $\sum(x_n + y_n)$ a $\sum c x_n$ a platí*

$$\begin{aligned} \sum(x_n + y_n) &= \sum x_n + \sum y_n, \\ \sum c x_n &= c \sum y_n. \end{aligned} \tag{5.7.1}$$

D ů k a z. Řada $\sum(|x_n| + |y_n|)$ konverguje podle věty 5.14. Dále pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|x_n + y_n| \leq$

$|x_n| + |y_n|$. Řada $\sum |x_n + y_n|$ tedy konverguje podle srovnávacího kritéria a řada $\sum x_n + y_n$ konverguje absolutně.

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|cx_n| = |c||x_n|$. Řada $\sum |cx_n|$ tedy konverguje podle věty 5.14 a řada $\sum cx_n$ konverguje absolutně.

Rovnosti z tvrzení plynou ze stejných rovností z věty 5.14.

Věta 5.27. *Buďte $\sum x_n$ absolutně konvergentní řada a $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekce. Řada $\sum y_n$, kde $y_n = x_{\sigma(n)}$, je absolutně konvergentní a platí $\sum x_n = \sum y_n$.*

D ů k a z. Označme $(\overline{s}_n)$ a $(\overline{t}_n)$ posloupnosti částečných součtů řad $\sum |x_n|$ a $\sum |y_n|$, $m_\sigma(n)$ největší prvek množiny $\{1, \dots, n\}$. Posloupnost (m_σ) je neklesající a neohraničená, má tedy rostoucí podposloupnost $(k_\sigma(n))$. Posloupnost $(\overline{s}_{k_\sigma(n)})$ je tedy vybraná z posloupnosti $\overline{s}_n$. Navíc platí $(\overline{t}_n) \leq (s_{k_\sigma(n)})$. Z konvergence řady $\sum |x_n|$ tedy plyne konvergence řady $\sum y_n$ ($\sum |x_n|$ konverguje, $(\overline{s}_n)$ je tedy ohraničená, $(\overline{t}_n)$ je tedy rovněž ohraničená a $\sum |y_n|$ konverguje). Řada $\sum y_n$ je tedy absolutně konvergentní.

Označme nyní (s_n) a (t_n) posloupnosti částečných součtů řad $\sum x_n$ a $\sum y_n$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $s_{k_\sigma(n)} - t_n$ rovno součtu konečně mnoha členů posloupnosti $(y_k)_{k=n+1}^{\infty}$. Přitom podle důsledku 5.13. Cauchyho–Bolzanova kriteria z konvergence řady $\sum |y_n|$ plyne, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{k=n+1}^{\infty} |y_k| < \varepsilon$. Máme tedy

$$|s_{k_\sigma(n)} - t_n| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |y_k| < \varepsilon$$

a $s_{k_\sigma(n)} = \lim t_n$ (že tyto limity existují již víme), čili i $\lim s_n = \lim t_n$.

Řadě $\sum y_n$ říkáme *přerovnání řady* $\sum x_n$.

5.8 Neabsolutně konvergentní řady. Nechť řada $\sum x_n$ je neabsolutně konvergentní. Položme $x_n^+ = \max\{x_n, 0\}$, $x_n^- = -\min\{x_n, 0\}$. Posloupnosti x_n^+ a x_n^- jsou tedy nezáporné a platí $(x_n) = (x_n^+ - x_n^-)$.

Lemma 5.28. *Posloupnosti (x_n^+) a x_n^- obsahují nekonečně mnoho kladných členů.*

D ů k a z. Existuje-li číslo $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $x_n \geq 0$, řada $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$, a tedy i řada $\sum x_n$ konverguje absolutně, což je spor. Podobně z existence čísla n_0 takového, že pro každé $n \geq n_0$ platí $x_n \leq 0$ plyne absolutní konvergence řady $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$ (je totiž $|x_n| = -x_n$), a tedy i řady $\sum x_n$.

Lemma 5.29. *Řady $\sum x_n^+$ a $\sum x_n^-$ jsou divergentní.*

D ů k a z. Podle věty 5.14 řady $\sum x_n^+$ a $\sum x_n^-$ buď obě divergují, nebo obě konvergují. Jestliže obě konvergují, konvergují absolutně (jsou to řady s nezápornými členy) a řada $\sum x_n$ podle věty 5.26 konverguje absolutně. Musejí tedy být divergentní.

Nyní ukážeme, že pro neabsolutně konvergentní řady neplatí tvrzení podobné větě 5.27.

Věta 5.30 (Riemannova přerovnávací věta). *Nechť řada $\sum x_n$ neabsolutně konverguje. Pak k libovolnému $x \in \mathbb{R}$ existuje bijekce $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že $\sum_{\sigma(n)} x_n = x$.*

D ů k a z. Bude doplněn později...

Příklady

1. *Nechť $x \in \mathbb{R}$. Dokažte, že* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$.

Řešení: V případě, že $x = 1$, je tvrzení zřejmé.

Pokud $x > 1$, pak také $\sqrt[n]{x} > 1$. Nechť tedy $\sqrt[n]{x} > 1 + h_n$, kde $h_n > 0$. Platí $x = (1 + h_n)^n > 1 + nh_n > nh_n$ (využili jsme tvrzení binomické věty[2)]), pro $n > 1$, a tedy $0 < h_n < x/n$. Jelikož $\lim_{n\to\infty} x/n = x \lim 1/n = 0$, pak také $\lim h_n = 0$ a tedy $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$.

[2)]Binomická věta: Pro každé $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ platí $(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$, kde

Jestliže $0 < x < 1$, položme $y = 1/x$, tedy $y > 1$. Jelikož $\sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{1} = 1$, máme $\sqrt[n]{x} = 1/\sqrt[n]{y}$. Nyní, když využijeme to, co už víme o limitě z minulého tématu, dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{y}} = \frac{1}{1} = 1.$$

2. *Vypočtěte* $\lim(\sqrt{n^2+5n+6} - \sqrt{n^2+3n+1})$.
Řešení: Výraz v limitě rozšíříme výrazem $\sqrt{n^2+5n+6} + \sqrt{n^2+3n+1}$ a dostaneme

$$\begin{aligned}
&\lim(\sqrt{n^2+5n+6} - \sqrt{n^2+3n+1})\\
&\quad= \lim \frac{(\sqrt{n^2+5n+6} - \sqrt{n^2+3n+1})(\sqrt{n^2+5n+6} + \sqrt{n^2+3n+1})}{\sqrt{n^2+5n+6} + \sqrt{n^2+3n+1}}\\
&\quad= \lim \frac{n^2+5n+6-n^2-3n-1}{\sqrt{n^2+5n+6} + \sqrt{n^2+3n+1}}\\
&\quad= \lim \frac{2n+5}{\sqrt{n^2+5n+6} + \sqrt{n^2+3n+1}}.
\end{aligned}$$

Výraz v poslední limitě rozšíříme $1/n$ a dostaneme

$$\begin{aligned}
&\lim \frac{2n+5}{\sqrt{n^2+5n+6} + \sqrt{n^2+3n+1}}\\
&\quad= \lim \frac{2+5/n}{\sqrt{1+5/n+6/n^2} + \sqrt{1+3/n+1/n^2}}\\
&\quad= \frac{2}{1+1} = 1.
\end{aligned}$$

3. *Dokažte, že posloupnost a_n, kde $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, je konvergentní.*

Řešení: Položme $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Pokusíme se dokázat, že posloupnost $(b)_n$ je klesající. Chceme tedy dokázat, že

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} > \left(\frac{n+2}{n}\right)^{n+2} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}.$$

To je ale splněno, právě když

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2} > \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}\frac{n+1}{n} && \text{tj.}\\
&\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2} > 1+\frac{1}{n} && \text{tj.}\\
&\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} > 1+\frac{1}{n}, && \text{jelikož } (n+1)^2 = n(n+2)+1.
\end{aligned}$$

Pro $h > 0$, $k > 1$, k celé je $(1+h)^k$. Levá strana poslední nerovnosti je tedy větší než

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$. Čtenář si jistě toto tvrzení dokáže za pomocí principu matematické indukce.

$$1+(n+2)\frac{1}{n(n+2)}=1+\frac{1}{n}.$$

Tím je poslední nerovnost dokázána a posloupnost (b_n) je klesající. Ona je ovšem také zdola ohraničená (neboť $b_n > 0$), existuje tedy $\lim b_n$ a my ji označíme e.[3)] Nyní

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\mathrm{e}.$$

4. *Dokažte tvrzení (Princip vnořených intervalů): Buď (I_n) posloupnost uzavřených intervalů s koncovými body a_n, b_n tak, že*
1. pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $I_{n+1} \subset I_n$,
2. $\lim(a_n - b_n) = 0$.
Pak $\cap\{I_n, n \in \mathbb{N}\}$ je jednoprvková množina.
Řešení: Z první podmínky vyplývá, že posloupnost (a_n) je neklesající. Podle věty 4.26 tedy má limitu $a = \lim a_n$. Dále, posloupnost (a_n) je shora ohraničená každým z čísel b_k ($k \in \mathbb{N}$), a tedy $a \le b_n$, pro každé $n \in \mathbb{N}$ (viz poznámku za důkazem). Navíc, jelikož posloupnost (a_n) je neklesající, je pro každé $k \in \mathbb{N}$, $a_k \le a$ (proč?). Celkově: pro každé $k \in \mathbb{N}$, $a \in I_k$.

Předpokládejme nyní, že existuje jiné číslo $\overline{a}$, které také leží v každém z intervalů I_k. Jestliže $\overline{a} < a$, pak podle definice limity existuje číslo n_0 tak, že pro každé $n \ge n_0$ je $a_n > \overline{a}$, což ovšem znamená, že $\overline{a} \notin I_n$, a to je spor.

Jestliže $\overline{a} > a$, pak k tomu, aby $\overline{a}$ leželo v každém z intervalů I_n, je nutné, aby pro každé $n \in \mathbb{N}$ bylo $\overline{a} - a \le b_n - a_n$. To ovšem znamená, že

$$\overline{a} - a \le \lim(b_n - a_n) = 0.$$

(viz poznámku za důkazem), neboli $\overline{a} = a$, to je spor. Tím je tvrzení dokázáno.

Poznámka: V uvedeném důkazu jsme na dvou místech využili následující tvrzení, které je jednoduchým důsledkem definice limity: *Jestliže pro funkce $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ platí $f \le g$ a existují-li limity* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *a* $\lim_{x\to x_0} g(x)$, *pak* $\lim_{x\to x_0} f(x) \le \lim_{x\to x_0} g(x)$.

5. *Rozhodněte o stejnoměrné konvergenci posloupnosti funkcí (f_n) na intervalech $(0, a)$ a $[a, \infty)$, kde $a > 0$, když $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$,*

$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx}.$$

Řešení: Jestliže je $x > 0$, pak je $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Posloupnost (f_n) tedy bodově konverguje k nulové funkci na $(0, \infty)$.

Pro $x > a$ je

$$0 < f_n(x) \le \frac{1}{1+na} \le \frac{1}{na}.$$

Je-li $\varepsilon > 0$, stačí za n_0 zvolit celé číslo větší než $1/a\varepsilon$. Pro každé $n \ge n_0$ a pro každé $x \ge a$ potom platí

$$|f_n(x) - 0| = f_n(x) < \frac{1}{na} \le \frac{1}{n_0 a} < \varepsilon.$$

Na intervalu $[a, \infty)$ se tedy jedná o stejnoměrnou konvergenci.

[3)]Číslo e se nazývá *Eulerovo číslo*. Budeme se s ním často setkávat.

Podívejme se, jak to vypadá na intervalu $(0, a)$. Platí $f_n(1/n) = \frac{1}{2}$. Jestliže tedy zvolíme $\varepsilon < \frac{1}{2}$, neexistuje k němu žádné $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby z podmínky $x \in (0, a)$, $n \geq n_0$ plynulo $|f_n - 0| \leq \varepsilon$. Ať si totiž zvolíme n_0 jakkoliv velké, lze vždy najít přirozené n tak, že $n \geq n_0$ a $1/n < a$. Položíme-li $x = 1/n$, je splněno $n \geq n_0$ a $x \in (0, a)$, ale zároveň $|f_n(x) - 0| = f(1/n) = \frac{1}{2} > \varepsilon$. Na intervalu $(0, a)$ se tedy o stejnoměrnou konvergenci nejedná.

Cvičení

1. Sestrojte posloupnost reálných čísel (a_n) tak, aby $\lim a_n = \infty$ a aby byla splněna podmínka
 a) $\lim(a_{n+1} - a_n) = \infty$; b) $\lim(a_{n+1} - a_n) = 1$; c) $\lim(a_{n+1} - a_n) = 0$.

2. Uveďte příklad posloupností (a_n), (b_n), pro něž je $\lim a_n = \infty$, $\lim b_n = \infty$ a přitom:
 a) $\lim(a_n - b_n) = \infty$; b) $\lim(a_n - b_n) = -\infty$; c) $\lim(a_n - b_n) = a \in \mathbb{R}$;
 d) $\lim(a_n - b_n)$ neexistuje.

3. Uveďte příklad posloupností (a_n), (b_n), pro něž je $\lim a_n = \infty$, $\lim b_n = 0$ a přitom:
 a) $\lim(a_n b_n) = \infty$; b) $\lim(a_n b_n) = 0$; c) $\lim(a_n b_n) = -\infty$;
 d) $\lim(a_n b_n) = a > 0, a \in \mathbb{R}$; e) $\lim(a_n b_n) = a < 0, a \in \mathbb{R}$; f) $\lim(a_n b_n)$ neexistuje.

4. Rozhodněte, zda pro každou konvergentní posloupnost (a_n) existuje
 a) $\min\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$; b) $\max\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$; c) $\inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$;
 d) $\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

5. Nechť $\lim a_n = \infty$. Dokažte, že posloupnost (a_n) je zdola ohraničená.

6. Nechť $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$. Dokažte, že $\lim a_{\sigma(n)}$ pro každé rostoucí zobrazení $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

7. Buď $a_n > 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, nechť $\lim a_n = 0$. Dokažte, že z posloupnosti (a_n) lze vybrat klesající podposloupnost, ale nelze vybrat neklesající podposloupnost.

8. Dokažte, že ke každému $a \in \mathbb{R}$ existuje posloupnost reálných čísel konvergující k a.

9. Uveďte příklad posloupnosti reálných čísel která
 a) nemá v $\mathbb{R}$ žádnou hromadnou hodnotu;
 b) má v $\mathbb{R}$ jedinou hromadnou hodnotu;
 c) má v $\mathbb{R}$ jedinou hromadnou hodnotu, ale nemá limitu;
 d) má v $\mathbb{R}$ právě dvě hromadné hodnoty;
 e) má v $\mathbb{R}$ právě n hromadných hodnot ($n \in \mathbb{N}$);
 f) má v $\mathbb{R}$ nekonečně mnoho hromadných hodnot.

10. Dokažte: Jestliže ohraničená posloupnost není konvergentní, pak má alespoň dvě různé hromadné hodnoty.

11. Pomocí definice limity dokažte, že
 a) $\lim \dfrac{1}{n^2 + 1} = 0$; b) $\lim \sqrt[n]{3} = 1$; c) $\lim \sqrt[n]{\frac{1}{2}} = 1$.

12. Pomocí definice limity dokažte, že posloupnost (a_n), kde $a_n = (-1)^n$ nemá limitu.

13. Zjistěte, zda konverguje posloupnost (a_n), když
 a) $a_n = \dfrac{2 + (-1)^n}{n}$; b) $a_n = 1 + n(-1)^n$.

14. Určete limitu $a = \lim_{n\to\infty} n^k x^n$ v závislosti na parametrech $k, x \in \mathbb{R}$.

15. Vypočtete $\lim a_n$, kde
 a) $a_n = \dfrac{n^2 - 2n + 3}{2n^2 + n + 1}$; b) $a_n = \dfrac{2n^2 + n - 1}{n^3 - 2n}$; c) $a_n = \dfrac{n^4 + n + 1}{n^3 + n + 1}$.

16. Vypočtěte limitu posloupnosti (a_n), kde

a) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$; b) $a_n = \sqrt{n^2+5n+6} - \sqrt{n^2+3n+1}$;

c) $a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$; d) $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

17. Spočtěte limitu $\lim \frac{2^n+3}{1-4\cdot 2^n}$.

18. Buď $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Spočtěte:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{1+a^n}$; b) $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}}$.

19. Dokažte, že pro každou posloupnost (a_n) platí $\liminf a_n = \lim \min\{a_1, a_2, \dots a_n\}$.

20. Vypočtěte $\limsup a_n$, $\liminf a_n$, kde:

a) $a_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$; b) $a_n = \frac{(2+(-1)^n)^n}{2^n}$.

Nalezněte všechny hromadné hodnoty těchto posloupností.

21. Dokažte, že posloupnost (a_n) je monotonní a ohraničená a najděte její limitu, když:

a) $a_n = 2 - \frac{5}{2n}$; b) $a_n = \sqrt[n]{2+\frac{1}{n}}$; c) $a_n = \frac{n^2+2}{4n^2+1}$.

22. Spočtěte limitu posloupnosti (a_n), když

a) $a_n = 3 + \frac{4}{3n}$; b) $a_n = \sqrt[n]{4} - 16$; c) $a_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}$;

d) $a_n = \left(2+\frac{3}{n}\right)^3$; e) $a_n = \frac{(n+1)(n+3)(n+2)}{n^4+1}$.

23. Dokažte, že uvedené divergentní posloupnosti nemají vlastní limitu a najděte k nim vybranou posloupnost, která má vlastní nebo nevlastní limitu:

a) $((-2)^n + 2^n)$; b) $((-1)^n n)$; c) $(n^{(-1)^n})$.

24. Vypočtěte limitu posloupnosti (a_n), kde:

a) $a_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$; b) $a_n = \left(\frac{2n+1}{n-1}\right)^n$.

25. Na příkladech ukažte, že všechny předpoklady Principu vnořených intervalů jsou nutné.

26. Dokažte, že z Principu vnořených intervalů vyplývá axiom spojitosti.

27. Najděte obor konvergence a limitu posloupnosti funkcí (f_n), jestliže

a) $f_n(x) = \frac{n^2x - 5n}{2n^2 + nx}$; b) $f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

28. Rozhodněte, zda posloupnost (f_n) konverguje stejnoměrně na I, jestliže

a) $f_n(x) = \frac{nx^2+1}{n}$, $I = \mathbb{R}$; b) $f_{n(x)} = 2^{-nx^2}$, $I = (0, \infty)$;

c) $f_n(x) = \frac{\chi(x)}{n}$, $I = \mathbb{R}$.

29. Rozhodněte o konvergenci následujících řad. U konvergentních se pokuste najít součet.

a) $\sum \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$; b) $\sum \frac{5\cdot 4^n + (-3)^{n+1}}{5^{n+2}}$ c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3-n}$;

d) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \frac{n^3-1}{n^3+1}$; e) $\sum(\sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2})$.

30. Rozhodněte o konvergenci následujících řad

a) $\sum \frac{1}{n+1}$; b) $\sum \frac{1}{2^n - n^2}$; c) $\sum \frac{1}{n2^n}$;

d) $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$; e) $\sum \frac{2^{n-1}}{n^n}$; f) $\sum \frac{1}{n!}$;

g) $\sum \left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)$; h) $\sum \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n$; i) $\sum \frac{2^n}{(5+(-1)^n)^n}$;

j) $\sum \frac{2^n n!}{n^n}$.

31. Uveďte příklad konvergentní řady $\sum a_n$ s kladnými členy, pro kterou uplatí $\limsup a_{n+1}/a_n > 1$.

Existuje konvergentní řada $\sum a_n$ s kladnými členy, pro kterou platí $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$?

32. Najděte součet řady $\sum a_n$, kde

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{3^{n/2}}, & \text{je-li } n \text{ sudé,} \\ \dfrac{1}{2 \cdot 3^{(n-2)/2}}, & \text{je-li } n \text{ liché.} \end{cases}$$

33. Najděte součet řady $\sum a_n$, jestliže

a) $a_n = (-1)^{n(n+1)/2} 2^{-n}$;

b) $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{(-2)^{2n/3}}, & \text{je-li } n \text{ dělitelné 3;} \\ \dfrac{1}{(-2)^{n+(n-1)/3}}, & \text{je-li zbytek čísla } n \text{ po dělení 3 roven 1;} \\ \dfrac{1}{(-2)^{n+(n+1)/3}}, & \text{je-li zbytek čísla } n \text{ po dělení 3 roven 2.} \end{cases}$

34. Rozhodněte o neabsolutní konvergenci řady

$$\sum \frac{(-1)^n}{(n+1)\log_2(n+1)}.$$

35. Rozhodněte o absolutní a neabsolutní konvergenci řad:

a) $\sum (-1)^n \left(1 + \frac{1}{10^n}\right)$; b) $\sum \frac{(-1)^n}{n+3}$; c) $\sum (-1)^{n+1} \frac{\log_2(10+1/n)}{n}$.

Výsledky

2. a) $a_n = 2n, b_n = n$; **b)** $a_n = n, b_n = 2n$; **c)** $a_n = n + a, b_n = n$ **d)** $a_n = n + (-1)^n, b_n = n$. **3. a)** $a_n = n^2, b_n = 1/n$ **b)** $a_n = 1/n, b_n = n^2$ **c)** $a_n = n^2, b_n = -1/n$; **d)** $a_n = n, b_n = a/n$; **e)** $a_n = n, b_n = a/n$; **f)** $a_n = n, b_n = (-1)^n/n$. **4. a)** Nemusí (například $(1/n)$); **b)** nemusí (například $(-1/n)$); **c)** existuje; **d)** existuje. **9. a)** $a_n = n$; **b)** $a_n = 1/n$; **c)** $a_n = n$, pro n lichá, $a_n = 1/n$, pro n sudá; **d)** $(-1)^n$; **e)** $(a_n) = (1, 2, \ldots, n, 1, 2, \ldots, n, \ldots)$; **f)** $(a_n) = (1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \ldots)$. **13. a)** Ano, $\lim a_n = 0$; **b)** ne. **14.** pro $x, k > 0$, $a = \infty$, pro $x < 0, k > 0$, $a = -\infty$, pro $x > 0, k < 0$, $a = 0$ a pro $x, k < 0$, $a = 0$. **15. a)** $\frac{1}{2}$; **b)** 0; **c)** ∞. **16. a)** 0; **b)** 1; **c)** 0; **d)** $\frac{1}{2}$. **21. a)** 2; **b)** 1; **c)** $\frac{1}{4}$. **22. a)** 3; **b)** -15; **c)** 1; **d)** 8; **e)** 0. **29. a)** Diverguje; **b)** konverguje $\frac{169}{200}$; **c)** konverguje $\frac{1}{4}$; **d)** konverguje $\ln \frac{2}{3}$; **e)** konverguje $1 - \sqrt{2}$. **30. a)** Diverguje; **b)** konverguje; **c)** konverguje; **d)** diverguje; **e)** konverguje; **f)** konverguje; **g)** diverguje; **h)** diverguje; **i)** konverguje; **j)** konverguje. **32.** $\frac{5}{4}$. **33. a)** $-\frac{3}{5}$; **35. a)** Diverguje; **b)** konverguje neabsolutně; **c)** konverguje neabsolutně.