Matematická analýza I
přednášky M. Málka
cvičení A. Hakové a R. Otáhalové
Zimní semestr 2004/05

1. Množiny, zobrazení, relace

První kapitola je věnována základním pojmům teorie množin. Pojednává o množinách a základních množinových operacích (sjednocení, průnik, rozdíl), uspořádaných dvojicích a kartézských součinech. Pojem množiny a uspořádané dvojice je považován za intuitivně zřejmý a nedefinuje se (*naivní teorie množin*). Všechny ostatní pojmy, uvedené v této kapitole (a snad i v celém textu), jsou již definovány pomocí těchto základních pojmů.

Dále definujeme pojem *zobrazení* a uvádíme jeho základní vlastnosti (surjektivnost, injektivnost, bijektivnost). Definujeme kompozici zobrazení a inverzní zobrazení.

Závěr kapitoly je věnován binárním relacím, a to zejména ekvivalencím (je ukázán jejich vztah k rozkladům) a uspořádáním (je zaveden pojem uspořádané množiny a s ním související pojmy maxima a minima, suprema a infima a izotonního zobrazení).

1.1 Prvky a množiny. *Množina* je souhrn nějakých věcí. Patří-li věc x do množiny X, říkáme také, že v ní leží, že je jejím prvkem, nebo že množina X tuto věc obsahuje. V takovém případě píšeme $x \in X$. V opačném $x \notin X$.

Množina je jednoznačně určena, jsou-li jednoznačně určeny její prvky. Tuto skutečnost budeme mít na mysli, kdykoli budeme zavádět nějakou novou množinu.

Množina, neobsahující žádný prvek, se nazývá prázdná a značí $\emptyset$.

Množina, obsahující pouze prvek x, se značí takto:

$$\{x\} \tag{1.1.1}$$

Množina všech prvků množiny X, které mají vlastnost P, se značí takto:

$$\{x \in X \mid \text{má vlastnost } P\}. \tag{1.1.2}$$

Řekneme, že množina Y je *podmnožinou množiny* X (a množina X nadmnožinou množiny Y), jestliže každý prvek množiny Y je prvkem množiny X. Píšeme $Y \subset X$, nebo $X \supset Y$. Není-li množina Y podmnožinou množiny X, píšeme $Y \not\subset X$, nebo $X \not\supset Y$.

Množina z (1.1.2) je samozřejmě podmnožinou množiny X; každý její prvek totiž je prvkem množiny X. Naopak, libovolnou podmnožinu Y množiny X můžeme zapsat uvedeným způsobem. Platí totiž:

$$Y = \{x \in X \mid x \in Y\}. \tag{1.1.3}$$

Z definice podmnožiny okamžitě plyne, že každá množina je svou vlastní podmnožinou (skutečně, každý prvek množiny X je prvkem množiny X). Můžeme psát

$$X = \{x \in X \mid x \in X\}, \tag{1.1.4}$$

nebo třeba

$$X = \{x \in X \mid x = x\}. \tag{1.1.5}$$

Jak jsme již uvedli, množina je jednoznačně určena svými prvky. Proto platí i že z $X \subset Y$ a současně $Y \subset X$ plyne $X = Y$. Tohoto jednoduchého faktu budeme velmi často užívat.

Ve výrazu (1.1.2) nám nic nebrání zvolit za P vlastnost, kterou žádný prvek z X nemá. Dostaneme tak prázdnou množinu. Například

$$\emptyset = \{x \in X \mid x \neq x\}. \tag{1.1.6}$$

Prázdná množina je tedy podmnožinou každé množiny. Na tuto okolnost se stojí za to podívat podrobněji.

Především si uvědomme, že tvrzení „když A, tak B,“ je nepravdivé jedině v případě, že výrok A je pravdivý a výrok B nepravdivý (slib „když budeš hodný, koupím ti lízátko“ tedy nesplníme jedině v případě, že děcko bylo hodné a my jsme mu lízátko stejně nekoupili). To znamená, že je-li výrok A nepravdivý, je celé tvrzení pravdivé, bez ohledu na výrok B (ověřte si to na již uvedeném výroku s lízátkem a na výroku „koho uštkne had, ten umře“).

Tvrzení „když A, tak B“ říká totéž, co tvrzení „ne A nebo B“ („Když to uděláš, tak jednu dostaneš“; „Nedělej to nebo jednu dostaneš“).

Zpět k prázdné množině: jestliže $x \in \emptyset$, pak $x \in X$ (všimněme si, že první výrok je nepravdivý!). Podle definice podmnožiny jsme tedy ukázali, že $\emptyset \subset X$.

Totéž můžeme říct takto: $x \notin \emptyset$ nebo $x \in X$, což je vždy pravda kvůli první polovině.

Ještě jinak řečeno — každý prvek prázdné množiny je prvkem množiny X; kdyby totiž nějaký nebyl, měla by prázdná množina prvky![1].

Někde se můžete setkat s tvrzením, že prvky prázdné množiny mají jakoukoliv vlastnost, skutečně jak jsme již řekli výrok pokud $x \in \emptyset$, pak x má vlastnost P (jinak řečeno $x \notin \emptyset$ nebo x má vlastnost P) platí ať je P jakákoli vlastnost.

Množině, jejímiž prvky jsou množiny, se někdy říká *systém* množin. Systém všech podmnožin množiny X se značí $\exp X$. Tedy $Y \in \exp X$, právě když $Y \subset X$. [2]

Systému všech podmnožin množiny X se také někdy říká potenční množina a v literatuře se také značí $\mathscr{P}(X)$ nebo 2^X.

Jak jsme již ukázali, pro každou množinu X platí $\emptyset \subset X$ a $X \subset X$. Máme tedy $\emptyset \in \exp X$ a $X \in \exp X$.

1.2 Základní množinové operace. Množina, tvořená těmi prvky, které leží alespoň v jedné z množin X a Y, se nazývá *sjednocení množin X a Y* a značí se $X \cup Y$ ($x \in X \cup Y$, právě když $x \in X$ nebo $x \in Y$).

Zavádíme značení $\{x, y\} = \{x\} \cup \{y\}$, $\{x, y, z\} = \{x\} \cup \{y\} \cup \{z\}$, atd. O množině zapsané tímto způsobem říkáme, že je zapsaná výčtem prvků.

Pro každou množinu X tedy například platí $\{\emptyset, X\} \subset \exp X$. Co je $\exp \emptyset$?

Uvědomte si, že pokud $x = y$, je množina $\{x, y\}$ jednoprvková. Této nepříjemnosti se v některých případech nevyhneme.

Množina tvořena těmi prvky, které leží v každé z množin X a Y, se nazývá *průnik množin X a Y* a značí se $X \cap Y$ ($x \in X \cap Y$, právě když $x \in X$ a $x \in Y$). Průnik množin lze tedy definovat takto:

$$X \cap Y = \{x \in X \mid x \in Y\}. \tag{1.2.1}$$

Množina, tvořená těmi prvky, které leží v množině X a neleží v množině Y, se nazývá *rozdíl množin X a Y* a značí se $X \setminus Y$ ($x \in X \setminus Y$, právě když $x \in X$ a $x \notin Y$). Platí tedy:

$$X \setminus Y = \{x \in X \mid x \notin Y\}. \tag{1.2.2}$$

Řekneme, že množiny X a Y jsou *disjunktní*, jestliže platí

$$X \cap Y = \emptyset. \tag{1.2.3}$$

Řekneme, že množiny systému množin S jsou po *dvou disjunktní*, jsou-li disjunktní každé dvě různé množiny systému S.

Věta 1.1. *Nechť X, Y, a Z jsou množiny. Platí*

$$\begin{array}{ll}
X \cup Y = Y \cup X, & \textit{(komutativita sjednocení)} \\
X \cap Y = Y \cap X, & \textit{(komutativita průniku)} \\
\textit{jestliže } X \subset Y \textit{ a } Y \subset Z, \textit{ pak } X \subset Z, & \textit{(tranzitivita inkluze)} \\
X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z, & \textit{(asociativita sjednocení)} \\
X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z, & \textit{(asociativita průniku)}
\end{array}$$

[1] Každý růžový nosorožec nosí brýle. Nebo snad ne? Který je nenosí?

[2] Řekneme-li „A, právě když B“, myslíme tím, že výroky A a B buď oba platí nebo oba neplatí — jsou to ekvivalentní výroky (někdy také říkáme „A platí tehdy a jen tehdy, když platí B“)

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z),$$
$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z). \qquad \textit{(distributivita)}$$

D ů k a z. Podle definice sjednocení je množina $X \cup Y$ množinou všech prvků, které leží v množině X nebo v množině Y. Množina $Y \cup X$ je definována stejně. Tím je dokázána komutativita sjednocení. Podobně se postupuje při důkazu komutativity průniku.

Dokážeme tranzitivitu inkluze. Předpokládejme, že platí $X \subset Y$ a $Y \subset Z$ a zvolme prvek $x \in X$. Pak (definice podmnožiny) určitě $x \in Y$. Jelikož $Y \subset Z$, pak (definice podmnožiny) $x \in Z$. Podívejme se co jsme udělali: Pro libovolný prvek $x \in X$ jsme ukázali, že $x \in Z$. To (podle definice podmnožiny) znamená, že $X \subset Z$.

Důkaz asociativity sjednocení a průniku přenecháme čtenáři. Z distributivních zákonů dokážeme pouze první.

Zvolme prvek $x \in X \cup (Y \cap Z)$. Podle definice sjednocení tento prvek leží v množině X nebo v množině $Y \cap Z$. Předpokládejme, že leží v množině X. Pak jistě leží v množině $X \cup Y$ (definice sjednocení) i v množině $X \cup Z$ (tatáž definice). Leží tedy i v jejich průniku. Leží-li prvek x v množině $Y \cap Z$, leží v každé z množin Y a Z. Proto leží v $X \cup Y$ i v $X \cup Z$. Leží tedy i v průniku těchto množin. Tím jsme dokázali, že $X \cup (Y \cap Z) \subset (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$.

Zvolme nyní prvek $x \in (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$. Podle definice průniku tento prvek leží v každé z množin $X \cup Y$ a $X \cup Z$. Leží-li v množině X, leží i v množině $X \cup (Y \cap Z)$ (definice sjednocení). Neleží-li v množině X, musí ležet v každé z množin X a Y, leží tedy v jejich průniku, a tedy i v množině $X \cup (Y \cap Z)$. Tím jsme dokázali, že $(X \cup Y) \cap (X \cup Z) \subset X \cup (Y \cap Z)$.

Výraz $(X \cup Y) \cup Z$ označujeme $X \cup Y \cup Z$. Díky asociativitě sjednocení platí i $X \cup Y \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$. Podobně klademe $X \cap Y \cap Z = (X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$.

Nyní zobecníme sjednocení a průnik množin na systémy množin. Nechť S je neprázdný systém množin. *Sjednocením systému S* nazýváme množinu, tvořenou těmi prvky, které leží alespoň v jedné množině systému S. Značíme ji $\cup S$. *Průnikem systému S* nazýváme množinu, tvořenou těmi prvky, které leží v každé množině systému S. Označení: $\cap S$.

Platí tedy: $x \in \cup S$, právě tehdy když existuje množina $X \in S$ taková, že $x \in X$; $x \in \cap S$, právě když pro každou množinu $X \in S$ platí $x \in X$.

Jsou-li množiny systému S po dvou disjunktní, pak $\cap S = \emptyset$. Opak ale pro každý systém neplatí.

Jak si snadno ověříte, je-li $S = \{X, Y\}$, pak $\cup S = X \cup Y$ a $\cap S = X \cap Y$.

Uspořádaná dvojice objektů x a y je objekt, který se značí (x, y) a má následující vlastnost:

$$(x, y) = (x', y'), \text{ právě když } x = x' \text{ a } y = y'.$$

Kartézský součin množin X a Y je množina všech uspořádaných dvojic (x, y) takových, že $x \in X$ a $y \in Y$. Značí se $X \times Y$.

Věta 1.2. *Pro libovolné množiny X, Y, X', Y' platí:*

$$X \times Y = \emptyset, \text{ právě když } X = \emptyset \text{ nebo } Y = \emptyset; \tag{1.2.4}$$
$$(X \times Y) \cup (X' \times Y) = (X \cup X') \times Y; \tag{1.2.5}$$
$$(X \times Y) \cap (X' \times Y') = (X \cap X') \times (Y \cap Y'). \tag{1.2.6}$$

Jestliže $X \times Y \neq \emptyset$, pak

$$X' \times Y' \subset X \times Y, \text{ právě když } X' \subset X \text{ a } Y \subset Y'. \tag{1.2.7}$$

D ů k a z. První tvrzení vlastně říká, že $X \times Y \neq \emptyset$, právě když $X \neq \emptyset$ a $Y \neq \emptyset$. Nyní už je situace jasná: první tvrzení totiž znamená, že existuje dvojice (x, y), zatímco druhé, že existuje prvek $x \in X$ a prvek $y \in Y$, což jsou ekvivalentní výroky.

Dokažme nyní vztah (1.2.5). Jestliže dvojice (x, y) leží ve sjednocení množin $X \times Y$ a $X' \times Y$, pak určitě leží v jedné z nich. Leží-li v množině $X \times Y$, znamená to, že $x \in X$ a $y \in Y$. Jelikož z prvního vztahu plyne $x \in X \cup X'$, dostáváme $(x, y) \in (X \cup X') \times Y$. Leží-li v množině $X' \times Y$, stejným postupem vyvodíme, že opět $(x, y) \in (X \cup X') \times Y$. Tím jsme ukázali, že $(X \times Y) \cup (X' \times Y) \subset (X \cup X') \times Y$. Opačnou inkluzi dokážeme úplně stejně.

Zbylé dva vztahy necháme na čtenáři.

1.3 Zobrazení. Nechť X a Y jsou množiny $Z \subset X \times Y$ taková podmnožina, že ke každému prvku $x \in X$ existuje právě jeden prvek $y \in Y$, splňující podmínku $(x, y) \in Z$. Množina Z spolu s množinami X a Y se nazývá *zobrazení z množiny X do množiny Y*. Množina X se nazývá *definiční obor*, množina Y *obor hodnot*, množina Z *graf* tohoto zobrazení. Označíme-li toto zobrazení f, píšeme $X = \mathrm{Dom}\, f$, $Y = \mathrm{Codom}\, f$ a $Z = \mathrm{Gr}\, f$.

Z uvedené definice vyplývá, že zobrazení f a g se rovnají, právě když

$$\mathrm{Dom}\, f = \mathrm{Dom}\, g, \ \mathrm{Codom}\, f = \mathrm{Codom}\, g \text{ a } \mathrm{Gr}\, f = \mathrm{Gr}\, g. \tag{1.3.1}$$

Zkratka pro „zobrazení f z množiny X do množiny Y" je $f : X \to Y$. Je-li $x \in X$, pak prvek $y \in Y$ takový, že $(x, y) \in \mathrm{Gr}\, f$ (tento prvek je podle definice zobrazení jediný, takže nemůže dojít k omylu), označujeme symbolem $f(x)$ a nazýváme *hodnotou zobrazení f v bodě x*, nebo *obrazem bodu x při zobrazení f*[3].

Rozdíl mezi zobrazením a grafem zobrazení je jemný: podle naší definice je obojí tatáž množina, ale v prvním případě kromě grafu máme zafixovány ještě definiční obor a obor hodnot.

Chceme-li zadat zobrazení, musíme tedy zadat tři věci: definiční obor, obor hodnot a graf. Definiční obor a obor hodnot (společně s označením zobrazení) se obvykle zadávají zároveň zápisem $f : X \to Y$.

Pro libovolnou množinu X definujeme zobrazení $\mathrm{id}_X : X \to X$ tak, že pro každé $x \in X$ položíme

$$\mathrm{id}_X(x) = x \tag{1.3.2}$$

Toto zobrazení se nazývá *identické zobrazení* (nebo *identita*) množiny X.

Identitu množiny X jsme tedy označili symbolem id_X. Jejím definičním oborem je množina X, oborem hodnot je množina X, jejím grafem je množina $\{(x, y) \in X \times X \mid x = y\}$.

Jednoduchým zobecněním identického zobrazení je tzv. kanonické vložení: buď Y podmnožina množiny X. Zobrazení $i : Y \to X$, definované pro každé $x \in Y$ předpisem

$$i(x) = x, \tag{1.3.3}$$

se nazývá *kanonické vložení množiny Y do množiny X*.

Všimeme si, že ačkoli předpisy (1.3.2) a (1.3.3) jsou stejné, zobrazení, která definují, jsou různá. Liší se totiž definičními obory. Teprve v případě, že $X = Y$, by platilo $\mathrm{id}_X = i$.

Nechť X a Y jsou množiny. Zobrazení pr_1, definované pro každé $(x, y) \in X \times Y$ předpisem[4]

$$\mathrm{pr}_1(x, y) = x, \tag{1.3.4}$$

se nazývá *první kartézská projekce*. Podobně *druhá kartézská projekce* je zobrazení pr_2, definované pro každé $(x, y) \in X \times Y$ předpisem

$$\mathrm{pr}_2(x, y) = y. \tag{1.3.5}$$

Další tři méně triviální příklady zobrazení. Nechť X je množina. Předpisy

$$\begin{aligned} c(Y) &= X \setminus Y, && \text{pro každé } Y \subset X \\ u(Y_1, Y_2) &= Y_1 \cup Y_2, && \text{pro každé } Y_1, Y_2 \subset X \\ p(Y) &= Y \times Y, && \text{pro každé } Y \subset X \end{aligned} \tag{1.3.6}$$

jsou definována zobrazení $c : \exp X \to \exp X$; $u : (\exp X) \times (\exp X) \to \exp X$ a $p : \exp X \to \exp(X \times Y)$.

Zobrazení $f : X \to Y$ se nazývá *surjektivní* (*surjekce*, zobrazení *na množinu Y*), jestliže pro každé $y \in Y$ existuje alespoň jedno $x \in X$ takové, že $f(x) = y$. Zobrazení f se nazývá *injektivní* (*injekce*,

---

[3] V matematické analýze bývá obvyklé nazývat prvky množin body. Až se začneme zabývat množinami, které v matematické analýze vystupují, pochopíme proč.

[4] Přesné by bylo napsat na levé straně $pr_1((x, y))$; z pochopitelných důvodů si ale v takových předpisech jedny závorky odpouštíme.

prosté), jestliže pro každé $y \in Y$ existuje nejvýše jedno $x \in X$ takové, že $f(x) = y$. Zobrazení f se nazývá *bijektivní* (*bijekce*), jestliže pro každé $y \in Y$ existuje právě jedno $x \in X$ takové, že $f(x) = y$.

Ihned vidíme, že každá bijekce je současně surjekce i injekce a naopak.

Z uvedených příkladů zobrazení je identita bijektivní a kanonické vložení injektivní. Pokud je $Y \neq \emptyset$, je první kartézská projekce $\mathrm{pr}_1 : X \times Y \to X$ surjektivní. Dokážeme postupně všechna tato tvrzení. Všechny důkazy jsou velmi prosté, je ale užitečné si je projít.

Jak už víme, dokázat bijektivnost zobrazení znamená dokázat jeho surjektivnost a injektivnost. Dokázat surjektivnost identity id_X znamená najít ke každému prvku $y \in \mathrm{Codom}\,\mathrm{id}_X$ prvek $x \in \mathrm{Dom}\,\mathrm{id}_X$ takový, že $\mathrm{id}_X(x) = y$. Takový prvek ale snadno najdeme, je to přímo prvek y. Pro $x = y$ totiž platí $\mathrm{id}_X(x) = \mathrm{id}_X(y) = y$. Takže jsme hledaný prvek našli. Injektivnost identity id_X ukážeme snadno: jestliže $\mathrm{id}_X(x_1) = \mathrm{id}_X(x_2)$, pak podle definice identity (1.3.2) platí $x_1 = x_2$ (pokud tento důkaz nechápete, přečtěte si znovu definici injektivního zobrazení).

Díky tomu, že předpisy (1.3.2) a (1.3.3) jsou stejné, ukáže se injektivnost kanonického vložení úplně stejně, jako injektivnost identity.

Ještě k surjektivitě kartézské projekce $\mathrm{pr}_1 : X \times Y \to X$. Zvolíme libovolný prvek $z \in X$ a najdeme k němu prvek množiny $X \times Y$, jehož obrazem je tento prvek. Hledáme tedy uspořádanou dvojici (x, y) takovou, že $\mathrm{pr}_1(x, y) = z$. Levá strana této rovnice je ovšem rovna x (podle (1.3.4)), dostáváme tedy $x = z$. Vidíme tedy, že hledanou uspořádanou dvojicí je dvojice (z, y), kde y je úplně libovolný prvek množiny Y. Skutečně, pro takovouto dvojici platí $\mathrm{pr}_1(z, y) = z$. (Kde jsme využili, že množina Y není prázdná? Proč by důkaz v případě, že by prázdná byla, selhal?)

V (1.3.6) je zobrazení c bijektivní, zobrazení u surjektivní a zobrazení p injektivní. Důkazy přenecháme čtenáři, zde dokážeme pouze bijektivnost zobrazení c. Nejprve dokážeme surjektivitu tohoto zobrazení. Podle definice máme ke každému prvku $Z \in \mathrm{Codom}\,c$ najít prvek $Y \in \mathrm{Dom}\,c$ takový, že $c(Y) = Z$. Takový prvek existuje, je to množina $Y = X \setminus Z$. Skutečně, platí

$$\begin{aligned} c(Y) &= c(X \setminus Z) && \text{(tak jsme prvek } Y \text{ definovali)} \\ &= X \setminus (X \setminus Z) && \text{(podle definice zobrazení } c\text{)} \\ &= Z. && \text{(proč?)} \end{aligned}$$

Nyní k injektivitě. Máme ukázat, že ke každému prvku $Z \in \mathrm{Codom}\,c$ existuje nejvýše jeden prvek $Y \in \mathrm{Dom}\,c$ takový, že $c(Y) = Z$. Uděláme to takto: ukážeme, že jestliže jsou takové prvky dva, pak se rovnají. Nechť tedy $c(Y_1) = c(Y_2)$. Podle definice zobrazení c máme $X \setminus Y_1 = X \setminus Y_2$. Pak ovšem musí platit také

$$X \setminus (X \setminus Y_1) = X \setminus (X \setminus Y_2),$$

což ovšem (jak už víme!) znamená $Y_1 = Y_2$.

Mějme zobrazení $f : X \to Y$ a $g : Y \to Z$. Zobrazení $g \circ f : X \to Z$, definované předpisem

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \tag{1.3.7}$$

se nazývá *složené zobrazení*, nebo *kompozice zobrazení f a g*.[5)]

Je-li $f : X \to Y$ libovolné zobrazení, X' podmnožina množiny X a $i : X' \to X$ kanonické vložení, pak kompozice $f \circ i : X' \to Y$ se nazývá *zúžení zobrazení f na množinu X'* a označuje symbolem $f|_{X'}$.

Uvažme zobrazení $j : X \to X \times X$, definované pro každé $x \in X$ předpisem $j(x) = (x, x)$, a první kartézskou projekci $\mathrm{pr}_1 : X \times X \to X$. Pak $j \circ \mathrm{pr}_1 : X \times X \to X \times X$ a pro $(x, y) \in X \times X$ platí

$$(j \circ \mathrm{pr}_1)(x, y) = j(\mathrm{pr}_1(x, y)) = j(x) = (x, x). \tag{1.3.8}$$

Dále $\mathrm{pr}_1 \circ j : X \to X$ a

$$(\mathrm{pr}_1 \circ j)(x) = \mathrm{pr}_1(j(x)) = \mathrm{pr}_1(x, x) = x. \tag{1.3.9}$$

Vidíme tedy, že $\mathrm{pr}_1 \circ j = \mathrm{id}_X$.

Uvažujme zobrazení c z (1.3.6). Pro libovolnou množinu $Y \subset X$ máme

$$(c \circ c)(Y) = c(c(Y)) = c(X \setminus Y) = X \setminus (X \setminus Y) = Y. \tag{1.3.10}$$

Je tedy

[5)] Symbol $g \circ f$ čteme „g po f." Vyjadřujeme tím to, co skutečně děláme: aplikujeme zobrazení g po zobrazení f.

$$c \circ c = \mathrm{id}_{\exp X}\,. \tag{1.3.11}$$

Přidejme nyní k zobrazením (1.3.6) ještě jedno: nechť $n : \exp X \times \exp X \to \exp X$ je zobrazení, definované pro každé dvě podmnožiny Y a Z množiny X předpisem

$$n(Y, Z) = Y \cap Z. \tag{1.3.12}$$

Pokuste se dokázat tento vztah:[6)]

$$c \circ n = n(c, c). \tag{1.3.13}$$

Věta 1.3. *Pro libovolná zobrazení $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ a $h : Z \to U$ platí*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \qquad \textit{(asociativita kompozice zobrazení)} \tag{1.3.14}$$

D ů k a z. Zobrazení na levé i pravé straně mají stejný definiční obor i obor hodnot. Stačí tedy porovnat grafy. Z definice kompozice zobrazení nám ovšem vyjde, že pro každé $x \in X$ je

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$$

a

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$$

Mějme zobrazení $f : X \to Y$ a $g : Y \to X$. Zobrazení g se nazývá *inverzní zobrazení k zobrazení f* (nebo *inverze zobrazení f*), jestliže platí

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \tag{1.3.15}$$

a

$$f \circ g = \mathrm{id}_Y \tag{1.3.16}$$

Zobrazení, které má inverzi, se též nazývá *invertibilní.*

Věta 1.4. *Každé zobrazení má nejvýše jednu inverzi.*
D ů k a z. Nechť $f : X \to Y$ je zobrazení $g_1, g_2 : Y \to X$ dvě jeho inverze[7)] Pak platí

$$\begin{aligned}
g_1 &= g_1 \circ \mathrm{id}_Y && \text{(proč?)}\\
&= g_1 \circ (f \circ g_2) && \text{(plyne z (1.3.16))}\\
&= (g_1 \circ f) \circ g_2 && \text{(plyne z (1.3.14))}\\
&= \mathrm{id}_X \circ g_2 && \text{(plyne z (1.3.15))}\\
&= g_2 && \text{(proč?)}
\end{aligned}$$

Dostali jsme tedy $g_1 = g_2$.

Podle Věty 1.4 je inverze zobrazení f definována jednoznačně. Proto ji můžeme označit: f^{-1}. Je-li zobrazení f invertibilní, je invertibilní i zobrazení f^{-1} a platí

$$(f^{-1})^{-1} = f. \tag{1.3.17}$$

Věta 1.5. *Každé zobrazení má inverzi, právě když je bijektivní.*
D ů k a z. Plyne (jak?) z toho, že je-li $g \circ f$ injekce, je f injekce, a je-li $g \circ f$ surjekce, je g surjekce (dokažte!).

Před chvílí jsme dokázali, že pro zobrazení c z (1.3.6) platí $c^{-1} = c$.

Nechť $f : X \to Y$ je zobrazení, $X' \subset X$, $Y' \subset Y$. Definujeme množinu

---

6) Necháme na čtenáři, aby sám pochopil, co jsme mysleli symbolem (c, c). Hodně zdaru!

7) $g_1, g_2 : Y \to X$ je běžně užívaná zkratka pro $g_1 : Y \to X$, $g_2 : Y \to X$. Podobných zkratek budeme používat více, aniž bychom na ně jednotlivě upozorňovali.

$$f(X') = \{y \in Y \mid \text{existuje } x \in X' \text{ takové, že } f(x) = y\} \tag{1.3.18}$$

(často budeme používat zjednodušený zápis $f(X') = \{x \in X \mid x \in X'\}$) a množinu

$$f^{-1}(Y') = \{x \in X \mid f(x) \in Y'\} \tag{1.3.19}$$

Množina $f(X')$ se nazývá *obraz množiny X' při zobrazení f*, množina $f^{-1}(Y')$ *vzor množiny Y' při zobrazení f*.

Speciálně, obraz množiny X při zobrazení f (tedy množina $f(X)$) se označuje symbolem $\operatorname{Im} f$ a nazývá *obraz zobrazení f*.

Vzor množiny Y' při zobrazení f existuje, i když zobrazení f není invertibilní. Pokud by f invertibilní bylo, znamenal by symbol $f^{-1}(Y')$ dvě různé věci: vzor množiny Y' při zobrazení f a obraz množiny Y' při zobrazení f^{-1}. Tyto dvě množiny se ovšem naštěstí rovnají.

Pro zobrazení $f : X \to Y$ je vždy $f^{-1}(Y) = X$.

Položme $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ a definujme zobrazení $f : X \to Y$ předpisem

$$\begin{aligned} f(x_1) &= y_2 \\ f(x_2) &= y_3 \\ f(x_3) &= y_2 \end{aligned}$$

Dále položme $X' = \{x_1, x_2\}$ a $Y' = \{y_1, y_2\}$. Máme

$$\begin{aligned} f(X) &= f(\{x_1, x_2, x_3\}) = \{f(x_1), f(x_2), f(x_3)\} = \{y_2, y_3, y_2\} = \{y_2, y_3\} \\ f(X') &= f(\{x_1, x_2\}) = \{f(x_1), f(x_2)\} = \{y_2, y_3\} \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} f^{-1}(Y) &= \{x_1, x_2, x_3\}, \\ f^{-1}(Y') &= \{x_1, x_3\}. \end{aligned}$$

1.4 Binární relace. Nechť X je množina, $Z \subset X \times X$. Množinu Z spolu s množinou X nazýváme *binární relací* na množině X.

Množina Z se nazývá *graf* této relace. Označíme-li tuto relaci σ, píšeme $Z = \operatorname{Gr} \sigma$. Pokud pro prvky $x, y \in X$ platí $(x, y) \in \operatorname{Gr} \sigma$, píšeme $x \ \sigma \ y$.

Relaci na množině X, jejímž grafem je množina $(X \times X) \setminus \operatorname{Gr} \sigma$, označujeme symbolem $\not\sigma$.

Vztah $x \not\sigma y$ tedy platí, právě když neplatí $x \ \sigma \ y$.

Podobně jako u zbrazení nestačí zadat jen graf relace, relace zadána jestliže jsou zadány dvě věci množina X a graf.

Uvažujme relaci σ na množině X. Tato relace se nazývá *reflexivní*, jestliže pro každý prvek $x \in X$ platí $x \ \sigma \ x$. Relace σ se nazývá *symetrická*, jestliže pro každé dva prvky $x, y \in X$ z $x \ \sigma \ y$ vyplývá $y \ \sigma \ x$, a *antisymetrická*, když $x \ \sigma \ y$ a $y \ \sigma \ x$ znamená $x = y$. Konečně, relace σ je *tranzitivní*, když pro každé tři prvky $x, y, z \in X$ platí: jestliže $x \ \sigma \ y$ a $y \ \sigma \ z$, pak $x \ \sigma \ z$.

Relace, která je reflexivní, symetrická a tranzitivní, se nazývá *ekvivalence*. Relace, která je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní, se nazývá *(částečné) uspořádání*. Ekvivalence se většinou označuje symbolem „$\sim$“, uspořádání symbolem „$\leq$“.[8)]

Relace na množině X, jejíž graf je celá množina $X \times X$, je ekvivalence. Uspořádání je to jedině v případě, když X je prázdná nebo jednoprvková množina. Relace na množině X, jejímž grafem je množina $\{(x, x) \mid x \in X\}$ [9)], je ekvivalence i uspořádání. Je přirozené označit tuto relaci symbolem „=“.

Pro libovolné zobrazení $f : X \to Y$ můžeme na množině X zadat ekvivalenci $\sim$, když položíme $x \sim y$, právě když $f(x) = f(y)$. Tuto ekvivalenci nazýváme *zadanou (indukovanou)* zobrazením f.

[8)] Výraz $x \leq y$ se čte, jak označení napovídá: x je menší nebo rovno y.

[9)] K označení viz. poznámka za vztahem (1.3.18)

Ukážeme nyní, že se skutečně jedná o ekvivalenci. Že se jedná o relaci, je zřejmé (zadali jsme množinu X a podmnožinu kartézského součinu $X \times X$, tvořenou uspořádanými dvojicemi (x, y), pro které platí $f(x) = f(y)$). Musíme tedy ověřit reflexivitu, symetrii a tranzitivitu této relace.

Aby byla tato relace reflexivní, musí pro každé $x \in X$ platit $x \sim x$. To ovšem znamená $f(x) = f(x)$. Aby byla symetrická, musí pro každé dva prvky $x, y \in X$ z $x \sim y$ (což znamená $f(x) = f(y)$) plynout $y \sim x$ (což znamená $f(y) = f(x)$). Podmínka tranzitivity zase vyžaduje, aby každé tři prvky $x, y, z \in X$, které splňují $f(x) = f(y)$ a $f(y) = f(z)$, splňovaly také $f(x) = f(z)$. Vidíme tedy, že všechny tyto podmínky jsou splněny.

Nyní si ještě ukážeme, jak lze zavést uspořádání podmnožin pomocí inkluze. Nechť X je množina. Pro libovolné dvě množiny $Y, Z \in \exp X$ položme $Y \leq Z$, jestliže $Y \subset Z$. Tím jsme definovali relaci $\leq$ na množině $\exp X$. Podívejme se, zda se jedná o uspořádání. Pro každé $Y, Z, U \in \exp X$ musí platit

$$
\begin{array}{ll}
Y \subset Y, & \text{(reflexivita)} \\
\text{jestliže } Y \subset Z \text{ a } Z \subset Y, \text{ pak } Y = Z, & \text{(antisymetrie)} \\
\text{jestliže } Y \subset Z \text{ a } Z \subset U, \text{ pak } Y \subset U. & \text{(tranzitivita)}
\end{array}
$$

Vidíme, že tyto podmínky jsou splněny (o prvních dvou jsme hovořili na začátku odstavce 1.1, třetí je tranzitivita inkluze z Věty 1.1).

1.5 Ekvivalence a rozklady. Věnujme se nyní podrobněji některým základním vlastnostem ekvivalencí. Nejprve uvedeme definici rozkladu.

Rozkladem množiny X nazýváme systém S jejích podmnožin (tedy podmnožinu $\exp X$) takový, že $\emptyset \notin S$, S je pokrytí množiny X (to znamená $\cup S \supset X$) a množiny systému S jsou po dvou disjunktní. Jednotlivé množiny systému S se nazývají *třídy rozkladu S*.

Následují tři příklady rozkladu množiny X: systém $S_1 = \{X\}$, systém $S_2 = \{\{x\} \mid x \in X\}$[10)] a systém $S_3 = \{Y, X \setminus Y\}$, kde Y je podmnožina splňující $Y \notin \{\emptyset, X\}$.

Nechť S je rozklad množiny X. Vzhledem ke druhé a třetí podmínce z definice rozkladu existuje ke každému prvku množiny $x \in X$ právě jedna množina $Y \in S$ taková, že $x \in Y$ (druhá podmínka zaručuje, že existuje alespoň jedna, třetí zase, že existuje nejvýše jedna). Tuto množinu označujeme $[x]_S$ a nazýváme *třídou rozkladu S, definovanou prvkem x*.

Položme

$$x \sim y, \text{ právě když } [x]_S = [y]_S \tag{1.5.1}$$

Tímto předpisem jsme definovali relaci $\sim$ na množině X. Platí:

Věta 1.6. *Relace $\sim$, definovaná předpisem (1.5.1), je ekvivalence.*
D ů k a z. Je jednoduchý; tvrzení plyne z toho, že relace „=“ je ekvivalence.

O ekvivalenci (1.5.1) říkáme, že je *zadaná* (nebo *indukovaná*) rozkladem S.

Nechť $\sim$ je ekvivalence na množině X. Pro každý prvek $x \in X$ klademe

$$[x]_\sim = \{y \in X \mid x \sim y\} \tag{1.5.2}$$

Předpisem

$$S = \{[x]_\sim \mid x \in X\} \tag{1.5.3}$$

je nyní definován systém S podmnožin množiny X. Platí:

Věta 1.7. *Systém S, definovaný předpisem (1.5.3), je rozklad množiny X.*
D ů k a z. Dokážeme postupně platnost všech tří podmínek z definice rozkladu. 1. Relace $\sim$ je reflexivní (protože je to ekvivalence). Každá z množin $[x]_\sim$ tedy obsahuje prvek x a je neprázdná. Skutečně, má-li platit $x \in [x]_\sim$, musí podle (1.5.2) být $x \sim x$, což je splněno díky reflexivitě.

2. Plyne přímo z toho, co jsme už ukázali: jestliže pro každý prvek $x \in X$ platí $x \in [x]_\sim$, je $\cup S = X$. (Pro každé $x \in X$ z $x \in [x]_\sim$ totiž plyne $x \in \cup S$, čímž je dokázána inkluze $X \subset \cup S$. Opačná inkluze je zřejmá (proč?)).

[10)]Opět (a naposledy): k označení viz. poznámka za vztahem (1.3.18).

3. Předpokládejme, že existují množiny $[y]_\sim$, $[z]_\sim$ takové, že $[y]_\sim \cap [z]_\sim$. Pak existuje prvek $x \in [y]_\sim \cap [z]_\sim$. Z (1.5.2) plyne $y \sim x$, z téhož vztahu a symetrie ekvivalence $\sim$ plyne $x \sim z$. Z tranzitivity ekvivalence $\sim$ tedy máme $y \sim z$. Zvolme nyní libovolně $u \in [z]_\sim$. Máme $z \sim u$ (ze vztahu (1.5.2)), neboli $y \sim u$ (z $y \sim z$ a tranzitivity). To ale znamená, že $u \in [y]_\sim$, čili $[z]_\sim \subset [y]_\sim$ (z definice podmnožiny). Podobně můžeme ukázat, že $[y]_\sim \subset [z]_\sim$ (to již necháváme na čtenáři), což znamená, že platí $[y]_\sim = [z]_\sim$. Podíváme-li se znovu na začátek tohoto důkazu, vidíme, že jsme dokázali třetí podmínku definice rozkladu.

O rozkladu (1.5.3) říkáme, že je *zadaný ekvivalencí* $\sim$. Nazýváme jej *faktorovou množinou množiny X podle ekvivalence* $\sim$ a označujeme symbolem $X/\sim$. Třídy rozkladu S se pak nazývají také *třídy ekvivalence* $\sim$. Zobrazení $\pi : X \to X/\sim$, definované pro každé $x \in X$ předpisem

$$\pi(x) = [x]_\sim, \tag{1.5.4}$$

se nazývá *faktorová projekce*.

Uvědomte si, že faktorová projekce je vždy surjektivní.

Prozkoumejte indukovanou ekvivalenci, faktorovou množinu a faktorovou projekci u dříve uvedených rozkladů S_1, S_2 a S_3.

1.6 Uspořádané množiny. Množinu nazýváme uspořádanou, je-li na ní dáno uspořádání. V tomto odstavci se budeme zabývat základními vlastnostmi uspořádaných množin. Pokud neuvedeme jinak, budeme vždy předpokládat, že na množině X je zavedeno uspořádání $\leq$.

Předpokládejme, že Y je podmnožina množiny X. Pak prvek $x \in X$ se nazývá *horní závorou množiny Y*, jestliže pro každý prvek $y \in Y$ platí $y \leq x$. Prvek $x \in X$ se nazývá *dolní závorou množiny Y*, jestliže pro každý prvek $y \in Y$ platí $y \geq x$.[11)]

Prvek $x \in X$ se nazývá *největším prvkem množiny Y* (*maximem*), je-li její horní závorou a platí-li $x \in Y$. Prvek $x \in X$ se nazývá *nejmenším prvkem množiny Y* (*minimem*), je-li její dolní závorou a platí-li $x \in Y$. Snadno se zjistí (jak?), že největší i nejmenší prvek množiny Y existuje nejvýše jeden. Můžeme tedy zavést značení: $\max Y$ a $\min Y$.

Prvek $x \in X$ se nazývá *supremem množiny Y*, je-li nejmenším prvkem množiny jejích horních závor. Prvek $x \in X$ se nazývá *infimem množiny Y*, je-li největším prvkem množiny jejích dolních závor. Opět, supremum i infimum množiny Y existuje nejvýše jedno. Zavádíme značení: $\sup Y$, $\inf Y$.

Platí tedy

$$\sup Y = \min\{x \in X \mid x \text{ je horní závora množiny } Y\} \tag{1.6.1}$$
$$\inf Y = \max\{x \in X \mid x \text{ je dolní závora množiny } Y\} \tag{1.6.2}$$

Věta 1.8. *Jestliže existuje maximum množiny Y, pak existuje i její supremum a platí*

$$\sup Y = \max Y. \tag{1.6.3}$$

Jestliže existuje minimum množiny Y, pak existuje i její infimum a platí

$$\inf Y = \min Y. \tag{1.6.4}$$

D ů k a z. Předpokládejme, že existuje maximum množiny $Y \subset X$ a označme je y. Podle definice maxima je y horní závora množiny Y. Je-li x nějaká jiná horní závora množiny Y, pak je větší nebo rovna než libovolný prvek množiny Y, platí tedy i $x \geq y$ (jelikož $y \in Y$). Takže y je nejmenší horní závora množiny Y.

Důkaz druhé části věty se provede stejně.

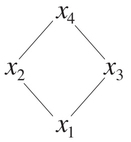
Nechť x_1, x_2, x_3, x_4 jsou po dvou různá,[12)] $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Zaveďme na množině X uspořádání, jehož graf je množina

[11)] $\geq$ je vlastně další relace, kterou jsme dosud nedefinovali; čtenář si ji jistě rád definuje sám.

[12)] Předpokládám, že obratu „po dvou různá“ rozumíte (srovnejte též s definicí po dvou disjunktních množin).

$$\{(x_1, x_1), (x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_1, x_4), (x_2, x_2), (x_2, x_4), (x_3, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_4)\}$$

(ověřte, že je to skutečně uspořádání!). Toto uspořádání se dá přehledněji znázornit následujícím diagramem, v němž jsou výše nakresleny prvky větší a na stejné úrovni prvky nesrovnatelné:[13)]



Uvažujme nyní množinu $Y \subset X$, $Y = \{x_1, x_2, x_3\}$. Množina horních závor této množiny je $\{x_4\}$. To znamená, že maximum množina Y nemá (žádná její horní závora v ní neleží) a $\sup Y = \min\{x_4\} = x_4$.

Nechť X a Y jsou dvě uspořádané množiny. Zobrazení $f : X \to Y$ se nazývá *izotonní*, jestliže pro každé dva prvky $x, x' \in X$ takové, že $x \leq x'$, platí $f(x) \leq f(x')$.[14)] Izotonní bijekce se nazývá *izomorfismus uspořádaných množin*.

Uvažme uspořádanou množinu X z předchozí poznámky a množinu $U = \{u_1, u_2\}$, kde $u_1 \neq u_2$. Zaveďme dále na množině $\exp U$ uspořádání pomocí inkluze (viz konec odstavce 1.4). Pak zobrazení $f : \exp U \to X$, dané předpisem

$$\begin{aligned} &f(\emptyset) = x_1 \\ &f(\{u_1\}) = x_2 \\ &f(\{u_2\}) = x_3 \\ &f(\{u_1, u_2\}) = x_4 \end{aligned}$$

je izomorfismus uspořádaných množin.

Příklady

1. *Dokažte, že pro každé tři podmnožiny A, B, C množiny X, platí $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$.*
Řešení: Zvolme libovolný prvek $x \in C \setminus (A \cup B)$. Z definice rozdílu množin plyne, že $x \in C$ a $x \notin A \cup B$. To znamená, že $x \in C$ a zároveň x neleží ani v jedné z množin A, B, tedy $x \in C \setminus A$, $x \in C \setminus B$ (opět z definice rozdílu množin). Konečně, jestliže x leží jak v množině $C \setminus A$ tak i v množině $C \setminus B$, musí (podle definice průniku množin) ležet i v množině $(C \setminus A) \cap (C \setminus B)$. Tím je dokázána inkluze $C \setminus (A \cup B) \subset (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$.

Nyní zvolme libovolný prvek $x \in (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$. To znamená, že x leží v množině $C \setminus A$ a současně v množině $C \setminus B$. Využijeme definici rozdílu množin a dostaneme, že $x \in C$, $x \notin A$ a $x \notin B$. Protože prvek x neleží ani v jedné z množin A, B neleží ani ve sjednocení těchto množin, tedy $x \notin A \cup B$. Jak již víme prvek x leží v množině C a současně neleží v množině $A \cup B$. To ale znamená, že $x \in C \setminus (A \cup B)$. A tím je dokázána inkluze $C \setminus (A \cup B) \supset (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$.

2. *Dokažte, že pro každé zobrazení $f : X \to Y$ a množiny $A, B \subset X$, platí $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.*
Řešení: Zvolme libovolný prvek $y \in f(A \cup B)$. Pak existuje prvek $x \in A \cup B$ takový, že $f(x) = y$. Prvek x leží v množině A nebo v množině B (to plyne z definice sjednocení). Předpoládejme nejprve, že leží v množině A. Potom ale prvek y musí ležet v množině $f(A)$ a tím spíše v množině $f(A) \cup f(B)$. Nyní předpokládejme, že x leží v množině B. Potom ale prvek y musí ležet v množině $f(B)$ a tedy i v množině $f(A) \cup f(B)$. Tím je dokázána inkluze $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.

[13)] *Nesrovnatelné* prvky jsme nedefinovali. Co to asi je?

[14)] Zde jsme se dopustili určité nepřesnosti, jaké se v matematice dopouštíme často: symbol „$\leq$" na levé straně označuje jinou relaci, než tentýž symbol na straně pravé! V takových případech se vždy očekává, že je čtenář při věci a nenechá se stejným označením různých objektů zmást.

Zvolme libovolný prvek $y \in f(A) \cup f(B)$. Prvek y leží v množině $f(A)$ nebo $f(B)$ (což plyne znovu z definice sjednocení). Předpokládejme nejprve, že y leží v množině $f(A)$. To znamená, že existuje prvek $x \in A$ takový, že $f(x) = y$. Z definice sjednocení také plyne, že x leží v množině $A \cup B$. Potom ale prvek $f(x) = y$ musí ležet v množině $f(A \cup B)$. Nyní předpokládejme, že y leží v množině $f(B)$. Existuje tedy prvek x takový, že $x \in B$. Z definice sjednocení plyne, že x leží v množině $A \cup B$. Potom ale prvek $f(x) = y$ musí ležet v množině $f(A \cup B)$. Tím je dokázána i inkluze $f(A \cup B) \supset f(A) \cup f(B)$.

3. *Nechť $f : X \to Y$, $A \subset X$, $B \subset Y$. Dokažte, že je-li $f(A) \subset B$, pak $A \subset f^{-1}(B)$.*
Řešení: Zvolme $x \in A$ libovolně. Z předpokladu $f(A) \subset B$ víme, že $f(x) \in B$ (zde jsme využili také tranzitivity inkluze porovnej s Větou 1.1). Tedy, protože $f(x) \in B$, musí $x \in f^{-1}(B)$ (jak je požadováno v definici vzoru množiny porovnej s (1.3.19)). Tím je důkaz hotov.

4. *Nechť X je neprázná uspořádaná množina. Nalezněte množinu horních (dolních) závor množiny $\emptyset \subset X$.*
Řešení: Nejprve vyřešíme problém pro množinu horních závor. Tedy podle definice: prvek $x \in X$ je horní závorou prázné množiny, jestliže pro každý prvek $y \in \emptyset$ platí $y \le x$. To je ale splněno! Protože neexistuje prvek prázné množiny větší než náš prvek x (nebo snad ano? Který?), je x horní závora $\emptyset$. Prvek x byl zvolen libovolně tedy množinou horních závor $\emptyset$ je celá množina X. Obdobně pro dolní závory.

5. *Nechť X je neprázdná a $A \subset \exp X$. Uvažujme podmnožinu* $\exp X$ *s uspořádáním $\subset$. Najděte* $\sup A$.
Řešení: Dokážeme, že $\sup A = \cup A$. Označme $S = \cup A$. Je nutno ověřit dvě podmínky. 1. Že množina S je horní závorou A, tedy, že pro libovolnou množinu $B \in A$ platí $B \subset S$. To je ale zřejmé z definice sjednocení systému (vezmeme-li si libovolný prvek $b \in B$, existuje množina systému S, která tento prvek obsahuje: množina B). 2. Je nutno ověřit, že množina S je nejmenší horní závora množiny A, neboli, že pro každou jinou horní závoru C platí $S \subset C$. Zvolme prvek $x \in S$. Pak existuje nějaká množina $B \in A$ taková, že $x \in B$ (porovnej s definicí sjednocení systému). Protože ale C je horní závora množiny A, musí platit $B \subset C$ a tedy i $x \in C$. Proto $S \subset C$. Ukázali jsme tedy, že S je nejmenší horní závora množiny A. Tím je důkaz ukončen.

6. *Rozhodněte, zda existuje množina, která nemá supremum.*
Řešení: Položme $A = \{a, b, c\}$, kde prvky a, b, c jsou po dvou různé. Uvažujeme na množině A relaci $\leqslant$ s grafem $\{(a, b), (a, c), (a, a), (b, b), (c, c)\}$. Snadno se ověří, že tato relace je uspořádání. Tvrdíme, že množina A nemá supremum. Pokud by ho měla, byl by to jeden z prvků b, c (prvek a to být nemůže protože $a \leqslant b$). Nemůže to být prvek b, protože $c \nleqslant b$. Obdobně lze dospět k závěru, že supremem nemůže být ani prvek c. Množina A tedy nemá supremum.

7. *Předpokládejme, že relace $R = X \times X$ na X je uspořádání. Dokažte, že pak množina X je prázdná nebo jednoprvková.*
Řešení: Předpokládejme, že množina X obsahuje dva různé prvky a, b a že na ní je relace $R = X \times X$ uspořádání. Platí, že $a\ R\ b$ i $b\ R\ a$, protože $(a, b) \in R$ a $(b, a) \in R$. Relace uspořádání musí být antisymetrická (jak je uvedeno v definici uspořádání). Z $a\ R\ b$ a $b\ R\ a$ tedy plyne $a = b$. Celkově tedy každé dva prvky jsou shodné a množina X má nanejvýš jeden prvek. Skutečnost, že na prázdné a jednoprvkové množině se jedná o uspořádání již přenecháváme k ověřeni čtenáři.

Cvičení

1. Platí rovnost $\emptyset = \{\emptyset\}$?
2. Najděte příklad množin A, B, C tak, aby platilo:
   a) $A \cup (B \times C) \neq (A \cup B) \times (A \cup C)$; b) $A \cap (B \times C) \neq (A \cap B) \times (A \cap C)$.
3. Dokažte, nebo vyvraťte: Pro každé tři množiny A, B, C platí:
   a) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus B) \setminus (C \setminus B)$; b) $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus B$;
   c) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B$.

4. Dokažte, že pro každé tři podmnožiny A, B, C množiny X platí:

a) $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$;
b) $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$;
c) $(X \setminus (A \setminus B) = B \cup (X \setminus A)$;
d) $A \setminus A = \emptyset, \quad A \setminus \emptyset = A$;
e) $A \cup A = A, \quad A \cap A = A$.

5. Dokažte, že pro každé tři množiny A, B, C platí:

a) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;
b) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;
c) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$;
d) je-li $A \subset B$ potom $A \times C \subset B \times C$.

6. Dokažte, že pro každé dvě množiny A, B platí $\exp A \cup \exp B \subset \exp(A \cup B)$ a dokažte, že v tomto výraze obecně neplatí rovnost.

7. Vysvětlete, proč každá bijekce je vždy injekce a surjekce.

8. Co je grafem inverzního zobrazení? (Přesněji: Jak lze z grafu invertibilního zobrazení dostat graf jeho inverze?)

9. Nechť $f : X \to X$ a $A \subset X$ taková, že $f(A) \subset A$.

a) Dokažte, že potom $A \subset f^{-1}(A)$.

b) Uveďte příklad f a množiny A aby navíc platilo:
   1. $f(A) \neq A$ a $A = f^{-1}(A)$,
   2. $f(A) = A$ a $A \neq f^{-1}(A)$.

10. Nechť $f : X \to Y, g : Y \to Z$ jsou zobrazení taková, že zobrazení $g \circ f$ je surjektivní. Dokažte, že

a) zobrazení g je surjektivní.
b) Je-li g injektivní pak je f surjektivní.

11. Uveďte příklad zobrazení $f : X \to Y$ a $g : Y \to Z$ tak, aby $g \circ f$ byla bijekce a přitom f nebylo surjektivní a g nebylo injektivní.

12. Je zřejmé, že pro libovolné zobrazení $f : X \to Y$ a libovolný bod $x \in X$ platí $x \in f^{-1}(f(x))$. Uveďte příklad zobrazení f a bodu x, kdy $f^{-1}(f(x)) \neq \{x\}$.

13. Nechť $f : X \to Y, A \subset X$. Dokažte, že je-li f injektivní, pak $f^{-1}(f(A)) = A$.

14. Dokažte, že pro každé zobrazení $f : X \to Y$ a libovolné množiny $A, B \subset X$ a $C, D \subset Y$ platí:

a) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$;
b) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$;
c) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

15. Nechť $Z \subset X \times X$. Dokažte, že $Z \subset \mathrm{pr}_1(Z) \times \mathrm{pr}_2(Z)$. Platí i opačná inkluze?

16. Definujme zobrazení $f : \exp X \times \exp X \to \exp X$ předpisem $f(Y, Z) = (Y \cup Z) \setminus (Y \cap Z)$. Najděte $f^{-1}(\emptyset)$.

17. Je vždy průnikem (sjednocením) dvou relací opět relace? Jak tomu bude pro systém relací?

18. Je vždy průnikem (sjednocením) dvou ekvivalencí opět ekvivalence?

19. Nechť $X = \{a, b, c, d\}$, kde a, b, c, d jsou po dvou různá. Je relace $R = \{(a, a), (c, d), (b, c)\}$ zobrazení z X do X?

20. Dokažte, že složením dvou zobrazení je opět zobrazení.

21. Nechť X je uspořádaná množina. Pro libovolné prvky x, y definujme relaci $x < y$, jestliže $x \leq y$ a $x \neq y$. Dokažte, že pro graf této relace platí:

$$\mathrm{Gr}(<) = \mathrm{Gr}(\leq) \setminus \mathrm{Gr}(=)$$

Dále dokažte, že tato relace je tranzitivní, že pro libovolný prvek $x \in X$ platí $x \not< x$ a že jestliže pro dva prvky $x, y \in X$ platí $x < y$, pak $y \not< x$.

22. Mějme zobrazení $f : X \to Y$. Definujeme ekvivalenci $\sim$ na X takto: $x \sim y$ právě, když $f(x) = f(y)$. (Že se jedná skutečně o ekvivalenci, již bylo ukázáno.) Nyní definujeme zobrazení $F : X/\!\sim\, \to f(X)$ takto $F([x]_\sim) = f(x)$. Ověřte, že toto zobrazení je korektně definováno[15)]. Dále ověřte, že toto

[15)] Ověřte, že je jednoznačně určeno, co je obrazem třídy $[x]_\sim$

zobrazení je bijekce a navíc že platí $f = i \circ F \circ \pi$, kde $i : f(X) \to X$ je kanonické vložení a $\pi\, X \to X/\sim$ je příslušná faktorová projekce.

23. Nechť X je libovolná množina. Definujeme na množině $\exp X$ následující relaci. Dvě podmnožiny A, B množiny X jsou v relaci, právě když existuje bijekce $f : A \to B$. Dokažte, že tato relace je ekvivalence.

24. Nechť X je upořadaná množina, pokuste se najít supremum (infimum) prázzdné množiny. Využijte výsledků z příkladu 4.

25. Uvažujme podmožinu $A \subset \exp X$ s uspořádáním $\subset$. Co je infimem tohoto systému? Využijte obdobný postup jako v řešení příkladu 5.

26. Obdobně jako v příkladu 6 se pokuste najít množinu, která nemá infimum.