Řady

$$\sum q^{n-1} = \frac{1}{1-q}$$

$$\sum \frac{1}{n} \text{ – harmonická řada } \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots\right.$$

$$\underline{2^n} - \underline{2^{n-1} \cancel{-1}} \cancel{+1} = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

$$x_{n_1+1} + x_{n_2} = S_4 - S_{n-1}$$

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$S_{n_2}\quad S_4 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} = S_2 + \frac{1}{3}+\frac{1}{4} > S_2 + \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = S_2 + \frac{1}{2}$$

$$S_8 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}} = S_4 + \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} > S_4 + \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} \quad S_4 + \frac{1}{2}$$

$$\vdots$$

$$S_{2^n} = S_{2^{n-1}} + \underbrace{\frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n}}_{2^{n-1}} > S_{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

$$= S_{2^{n-1}} + \frac{2^{n-1}}{2^n} = S_{2^{n-1}} + \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2}\sum \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}} + \cancel{\frac{1}{4}} - \right.$$

$$\left. - \cancel{\frac{1}{n-2}} + \cancel{\frac{1}{n-3}} - \cancel{\frac{1}{n-1}} + \cancel{\frac{1}{n-2}} - \frac{1}{n} + \cancel{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \lim S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\Big(\underbrace{1+\frac{1}{2}}_{\frac{3}{2}} \underbrace{- \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}_{\to 0}\Big) =$$

$$= \frac{3}{4}.$$

Věta 5.11 (Cauchy-Bolzanovo kriterium)
Řada $\sum x_n$ konverguje, právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že pro každé $n_1, n_2 > n_0$ platí

$$|x_{n_1} + \_\_ + x_{n_2}| < \varepsilon$$

Důkaz.: plyne z Cauchy-Bolzanova kriteria pro posloupnost částečných součtů.

$$|x_{n_1} + \_ + x_n| = |s_{n_2} - s_{n_1 - 1}| < \varepsilon$$

Důsledek 5.12 (nutná podmínka konvergence)
Konverguje-li řada $\sum x_n$, pak platí $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} n$ protože $\lim_{n\to\infty} n \neq 0$ | $\sum \frac{n+1}{n}$ $\lim \frac{n+1}{n} = 1$

$\sum \frac{1}{n}$ $\lim \frac{1}{n} = 0$

Důsledek 5.13. Jestliže řada $\sum x_n$ konverguje, pak platí $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=n}^{\infty} x_k = 0$

Věta 5.14 Mějme dvě posloupnosti (x_n), (y_n) a číslo c. Jestliže řady $\sum x_n$ a $\sum y_n$ konvergují, pak konvergují i řady $\sum(x_n+y_n)$ a $\sum c x_n$ a platí:

$$\sum(x_n+y_n) = \sum x_n + \sum y_n,$$

$$\sum c x_n = c \sum x_n.$$

Důkaz: $\lim(x_1+y_1+x_2+y_2+\ldots+x_n+y_n) = \lim(x_1+x_2+\ldots x_n) + \lim(y_1+y_2+\ldots+y_n) = \sum x_n + \sum y_n$

$\lim(cx_1+cx_2+\ldots+cx_n) = c\lim(x_1+x_2+\ldots+x_n) = c\sum x_n$

$\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}$

$0+0$

Věta 5.15. Jestliže pro posloupnosti (x_n) a (y_n) existuje číslo n_0 takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $x_n = y_n$, pak $\sum x_n$ konverguje, právě když konverguje $\sum y_n$.

x: $1+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+ \mid \frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ldots$

y: $2+5-\frac{1}{6}+ \mid \frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ldots$

z: $-1 \quad + \mid 0+0+0+\ldots$

Důkaz: $(z_n) = (x_n - y_n)$

$\sum z_n$

$(x_n) = (z_n + y_n)$

$\left.\begin{array}{l}\sum y_n \to \\ \sum z_n \to\end{array}\right\} \ldots\ \sum x_n \to$

Věta 5.16 Nechť k je nezáporné celé číslo. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje, právě když konverguje řada $\sum_{n=k}^{\infty} x_n$.

$$\sum x_n = 10+1+3+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$$
$$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\dots$$

Věta 5.17 Nechť (k_n) je rostoucí posloupnost nezáporných celých čísel, $k_1=1$. Jestliže $\sum x_n = s$, pak pro posloupnost $(y_n)=(x_{k_n}+\dots+x_{k_{n+1}-1})$ platí $\sum y_n = s$.

$$\sum x_n = 1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}+\underbrace{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}}+\dots$$

$$(k_n)=(1,2,4,6,8,10,\dots)$$

$$\sum y_n = 1+(1)+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$$

$$\sum(-1)^n = (\underbrace{-1}+\underbrace{1-1}+\underbrace{1-1}+\underbrace{\dots})$$

$$(s_n)=(-1,0,-1,0,-1,\dots)$$

Řady s nezápornými členy

$\sum x_n$ $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \geq 0$ $\quad s_n \to s$

$\sum \frac{1}{n}, \sum q^{n-1} \quad q > 0$ $\quad s_n \to +\infty$

Věta 5.18 (srovnávací kritérium)
Nechť $\sum x_n$, $\sum y_n$ jsou řady s nezápornými členy a nechť existuje číslo n_0 takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí

$$\underline{x_n \leq y_n.}$$

Potom z konvergence řady $\sum y_n$ plyne konvergence řady $\sum x_n$.

Důkaz:

s_n – posl. část součtů $\sum x_n$

t_n $\qquad\qquad \sum y_n$

$$t_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n$$
$$\begin{array}{cccccc} \geq & \geq & \geq & & & \geq \end{array}$$
$$s_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

$$t_n \geq s_n$$
$$\downarrow$$
$$t \geq (s_n)$$

řadě $\sum y_n$ – majoranta řady $\sum x_n$

řadě $\sum x_n$ – minoranta řady $\sum y_n$

Věta 5.19 (limitní srovnávací kritérium).

Nechť $\sum x_n$, $\sum y_n$ jsou řady s nezápornými členy a nechť existuje konečné

$$\limsup \frac{x_n}{y_n}.$$

Potom z konvergence řady $\sum y_n$ plyne konvergence řady $\sum x_n$.

$$\underbrace{\sum \frac{1}{2^n}}_{y_n} \qquad \underbrace{\sum \frac{1}{n2^n}}_{x_n}$$

$$\lim \frac{\frac{1}{n\cdot 2^n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim \frac{\cancel{2^n}}{n\,\cancel{2^n}} = \lim \frac{1}{n} = 0$$

Důkaz: $\limsup \frac{x_n}{y_n} \in \mathbb{R}$

$$M > \frac{x_n}{y_n}$$

$$M y_n > x_n$$

$\sum M y_n$ majorantou řady $\sum x_n$

$\sum y_n$ – konverguje

také konverguje

Věta 5.20 (d'Alambertovo podílové kritérium).
Buď $\sum x_n$ řada s kladnými členy. Existuje-li čísla $q<1$ a n_0 taková, že pro každé $n \geq n_0$ je

$$\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} \quad \frac{x_n}{x_{n-1}} \leq q \quad \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq q,$$

$$x_n \leq q x_{n-1}$$

$$\sum \frac{1}{2^n} \qquad \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} < 1$$

řada $\sum x_n$ konverguje. Existuje-li číslo n_0 takové, že pro každé $n \geq n_0$ je

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1, \qquad \sum 1 \quad \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{1} \geq 1$$

řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence.

Důkaz $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq q$ $\quad x_{n+1} \leq q x_n \leq q \cdot q x_{n-1} \leq q^3 x_{n-2}$

$x_n \leq q x_{n-1}$

$x_{n-1} \leq q x_{n-2}$

$$\leq \sum q^{n+2} x_1 \qquad \sum q^n$$

Věta 5.21 (limitní podílové kritérium).
Jestliže pro řadu $\sum x_n$ s kladnými členy je

$$\limsup \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1, \qquad \sum \frac{1}{n}$$

pak konverguje. Je-li

$$\liminf \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1,$$

řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence.

Důkaz $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq q < 1$

podle 5.20 $\sum x_n$ konverguje.

$$\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{n}{n+1} = 1$$

$$\sum \frac{1}{n!} \qquad \lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{1}{n+1} = 0$$

Věta 5.22 (Cauchyho odmocninové kritérium). Buď $\sum x_n$ řada s nezápornými členy. Existují-li čísla $q<1$ a n_0 takové, že pro každé $n \geq n_0$ je

$$\sqrt[n]{x_n} < q, \qquad \sum q^n \quad \sqrt[n]{q^n} = q < 1$$

řada $\sum x_n$ konverguje. Existuje-li číslo n_0 takž pro $n \geq n_0$ je

$$\sqrt[n]{x_n} \geq 1,$$

řada $\sum x_n$ nesplňuje nutnou podmínku konvergence.

Věta 5.23 (limitní odmocninové kritérium). Jestliže pro řadu $\sum x_n$ s nezápornými členy je

$$\limsup \sqrt[n]{x_n} < 1,$$

pak konverguje. Je-li

$$\limsup \sqrt[n]{x_n} > 1,$$

řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence.

$$\sum \frac{1}{n} \qquad \lim \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim n^{-n} = \lim e^{-n \ln n} =$$

$$= e^{\lim -n \ln n} = e^0 = 1.$$

Alternující řady

$\sum x_n$ je alternující každý člen má opačné znaménko než následující. $\sum (-1)^n$, $\sum (-7)^n$, $\sum (-1)^n \cdot \frac{1}{2^n}$

Věta 5.24 (Leibnitzovo kritérium).
Buď $\sum x_n$ alternující řada splňující podmínky

$$\lim x_n = 0$$

a existuje n_0 takové že pro každé $n \geq n_0$ je

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} < 1,$$

pak řada $\sum x_n$ konverguje.

$\sum (-1)^n \quad \lim (-1)^n = \nexists$

$\sum (-7)^n$

$\sum (-1)^n \cdot \frac{1}{2^n} \quad \lim \underline{(-1)^n} \, \underline{\frac{1}{2^n}} = 0 \qquad \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$

$\sum (-1)^n \frac{1}{n} = \ln(2)$

Absolutně konvergentní řady

Věta 5.25
Konverguje-li řada $\sum |x_n|$, konverguje i řada $\sum x_n$ a platí $|\sum x_n| \leq \sum |x_n|$.

Věta 5.26. Mějme posloupnosti (x_n), (y_n) a reálné číslo c. Jestliže řady $\sum x_n$ a $\sum y_n$ absolutně konvergují, pak absolutně konvergují i řady $\sum (x_n + y_n)$ a $\sum c x_n$ a platí

$$\sum (x_n + y_n) = \sum x_n + \sum y_n,$$

$$\sum c x_n = c \sum x_n.$$