Věta 5.5 Buď (x_n) posloupnost v $\mathbb{R}$, pak bod $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ je hromadnou hodnotou $(x_n) \iff \exists$ vybraná posloupnost (x_{σ_n}) taková, že $\lim x_{\sigma_n} = x_0$

Důkaz: (x_n) – posloupnost $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ hrom. hodnota

U libovolné okolí $\underline{x_0 \in \mathbb{R}}$ $\qquad x_0 = \pm\infty$

$I_n = (x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n})$

$\sigma_1 \in \mathbb{N}$ $\quad x_{\sigma_1} \in I_1$

$\sigma_2 \in \mathbb{N}$ $\quad \sigma_2 > \sigma_1$ $\quad x_{\sigma_2} \in I_2$

$\vdots$

σ_n

$\sigma_{n+1} \in \mathbb{N}$ $\quad \sigma_{n+1} > \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$

$x_{\sigma_{n+1}} \in I_{n+1}$

(x_{σ_n})

$\lim \underline{x_{\sigma_n}} = \underline{x_0}$

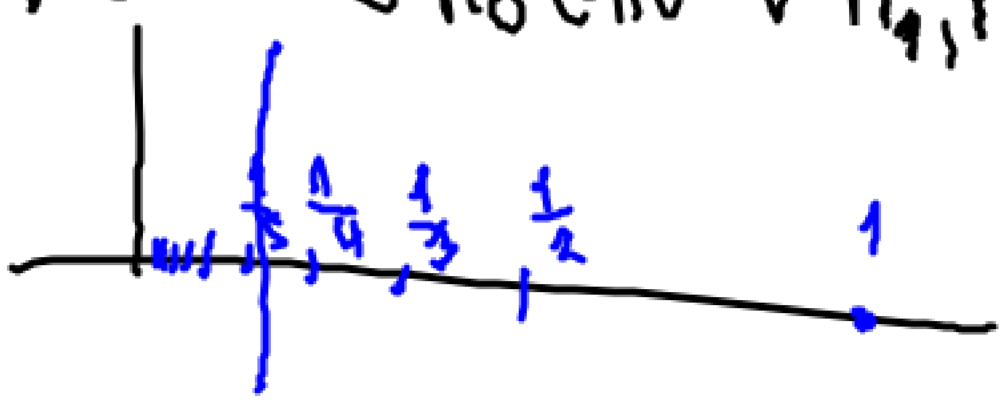
(x_n) posloupnost reálných čísel je cauchyovská $\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n_1, n_2 > n_0$

$|x_{n_1} - x_{n_2}| < \varepsilon$

$\varepsilon = \frac{1}{5}$

$n_0 = 10$

$\left|\frac{1}{17} - \frac{1}{13}\right| < \frac{1}{5}$



Věta 5.6 Každá konvergentní posloupnost je cauchyovská.

Každá cauchyovská posloupnost reálných čísel je konvergentní.

Důkaz: (x_n) konvergentní $\lim x_n = x_0 \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0 : \forall n\ge n_0\ |x_n-x_0|<\varepsilon$$

$n_0\in\mathbb{N}$ $\forall n\ge n_0\ |x_n-x_0|<\frac{\varepsilon}{2}$ $\qquad |x_{n_1}-x_{n_2}|<\varepsilon$

$n_1,n_2\ge n_0$

$$|x_{n_1}-x_{n_2}| = |x_{n_1}-x_0+x_0-x_{n_2}| \le$$

$$\le \underbrace{|x_{n_1}-x_0|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|x_0-x_{n_2}|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

$\Leftarrow$ $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0 : n_1,n_2\ge n_0\ |x_{n_1}-x_{n_2}|<\varepsilon$

$\varepsilon=1$ $\quad \exists n_0 \quad n_1,n_2\ge n_0 \quad |x_{n_0}-x_{n_2}|<1$

$M=\max\{x_1,x_2,\dots,x_{n_0}\}+1$

$m=\min\{x_1,x_2,\dots,x_{n_0}\}-1$

$m\le x_n\le M \quad \forall n$

$a=\liminf x_n < b=\limsup x_n$

$\varepsilon=\frac{1}{3}(b-a) \quad \exists n_0 : \forall n_1,n_2>n_0 \quad |x_{n_1}-x_{n_2}| < \varepsilon$

$|x_k-x_l|$

Posloupnosti funkcí

$Y \subset X \subset \mathbb{R}$ $\quad (f_n) \quad f_n : X \to \mathbb{R}$

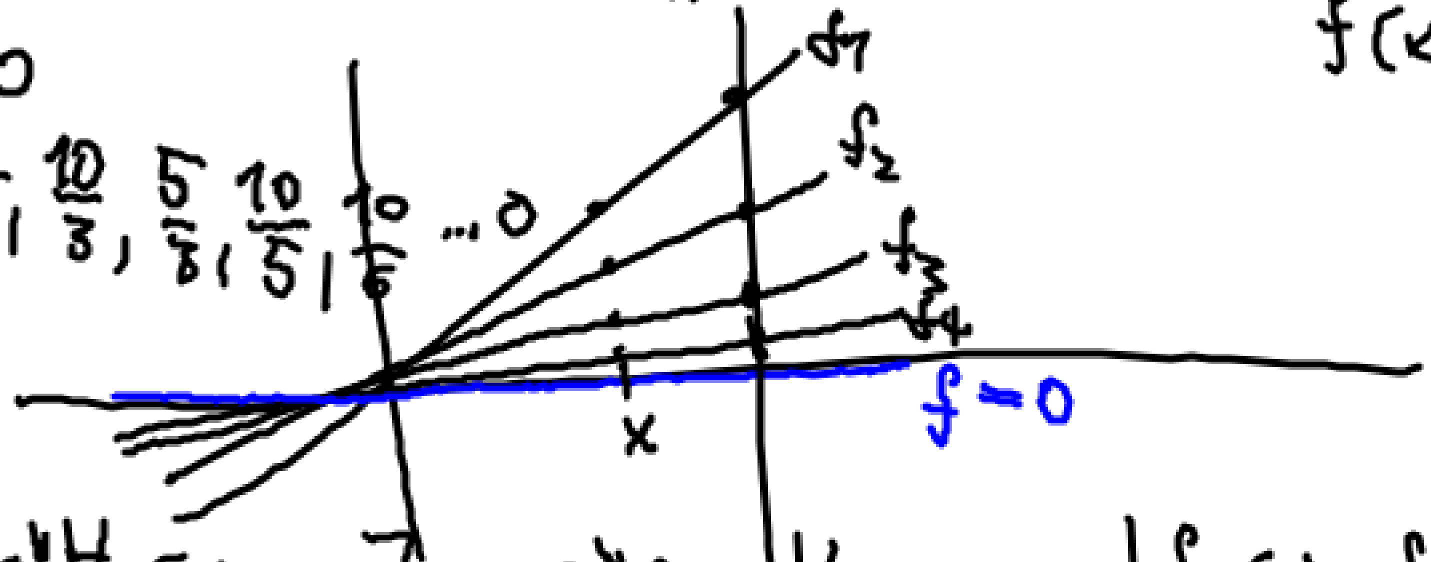
(f_n) konverguje k $f : Y \to \mathbb{R}$ $\quad \forall x \in Y \ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

(f_n) konverguje k $f : Y \to \mathbb{R}$ stejnoměrně $\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall n > n_0 \ \forall x \in Y \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$f(x) = \frac{x}{n} \to 0$

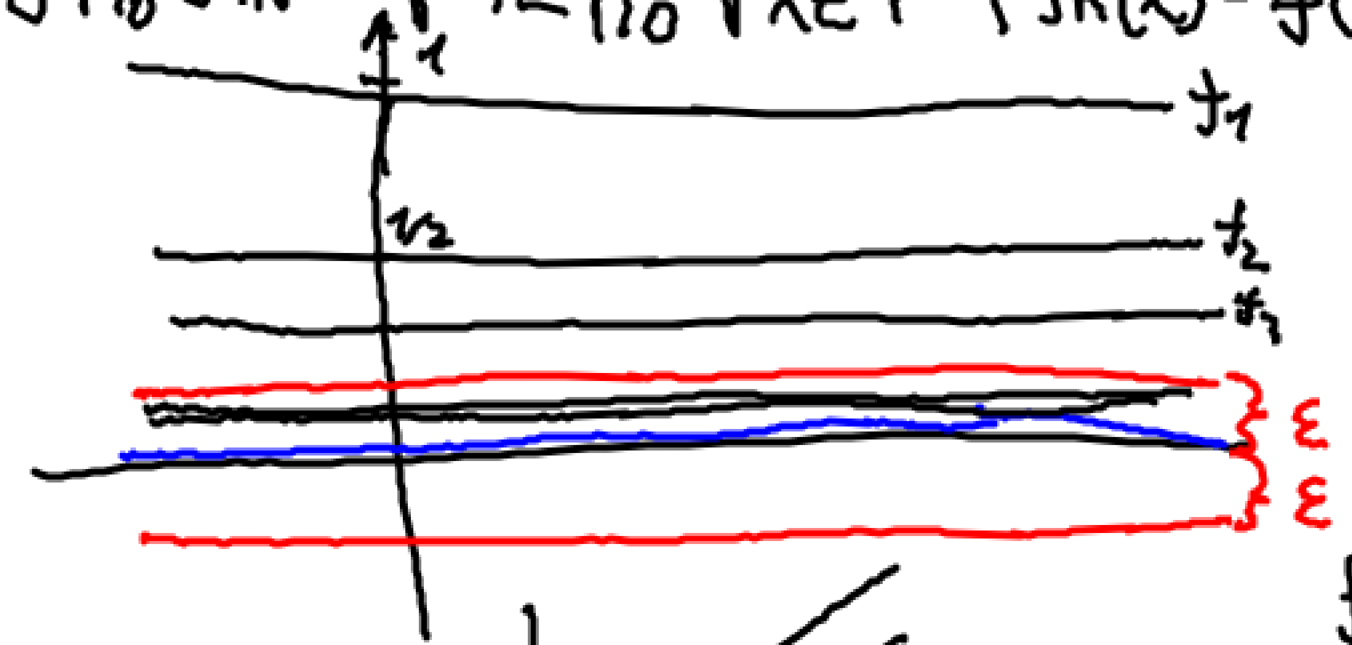
$x = 10$

$10, 5, \frac{10}{3}, \frac{5}{2}, \frac{10}{5}, \frac{10}{6} \dots 0$

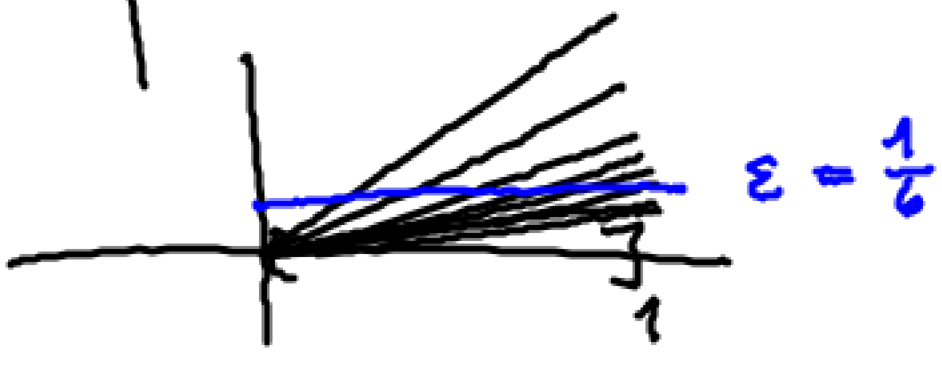


$\forall x \in Y \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \ \forall x \in Y \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$



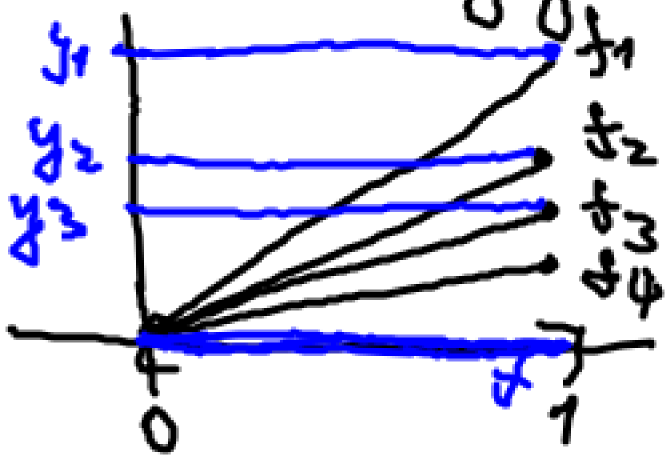
$f_n(x) = \frac{1}{n}$



$f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{x}{n}$

Věta 5.7 Jestliže k posloupnosti funkcí (f_n) $f_n: X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a funkci $f: Y \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existuje posloupnost (y_n), $\lim y_n = 0$ a $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in Y$ je $|f_n(x) - f(x)| < y_n$ pak posloupnost (f_n) konverguje stejnoměrně k f na Y.



$\frac{x}{n}$ $\quad y_n = \left(\frac{1}{n}\right)$

Věta 5.8 Posl. (f_n) konverguje stejnoměrně na $Y \iff$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n_1, n_2 > n_0\ \forall x \in Y$ platí $|f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x)| < \varepsilon$

Důkaz: $\varepsilon > 0$ $\quad n_0$ tak, že $\forall n_1, n_2 > n_0$ $x \in Y$

$|f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\qquad f(x) = \lim_{m \to \infty} f_m(x)$

$|f_n(x) - f(x)| = |f_n - \lim_{m \to \infty} f_m(x)| = \lim |f_n(x) - f_m(x)|$

$\leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

Věta 5.9 (f_n) posloupnost funkcí spojitých v bodě x_0 stejnoměrně konvergující k funkci $f: Y \to \mathbb{R}$ pak funkce f je spojitá v x_0

Důkaz: $y_n = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) \overset{?}{=} f(x_0)$

$\varepsilon > 0$ existuje $n_1 : \forall n > n_1 \; \forall x \in Y \; |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

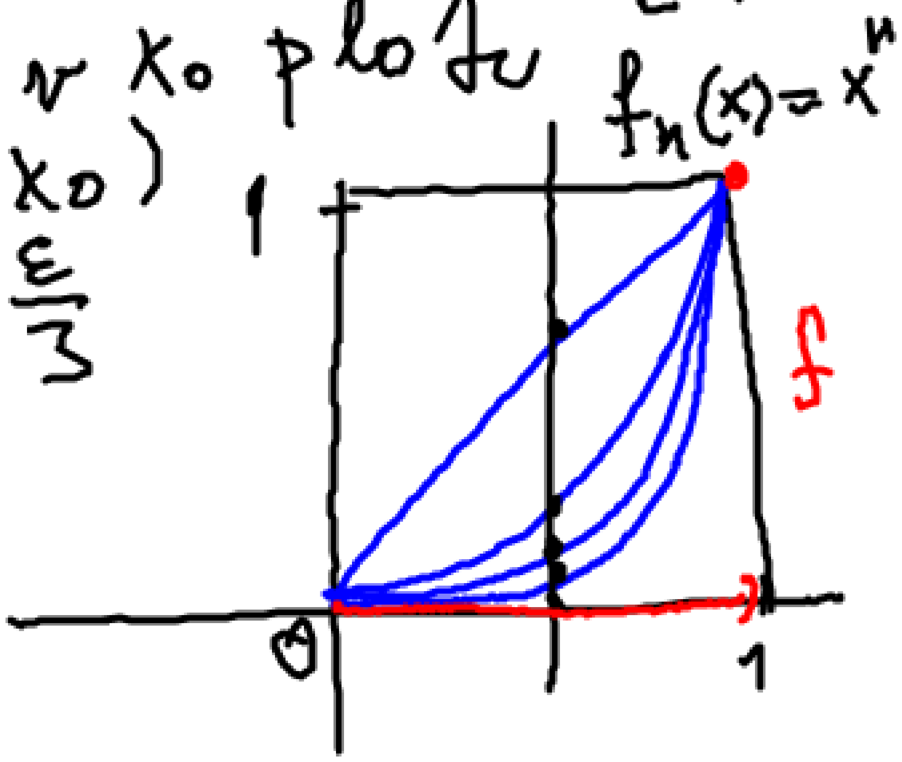
$n_2 : \forall n > n_2 \; \forall x \in Y \; |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

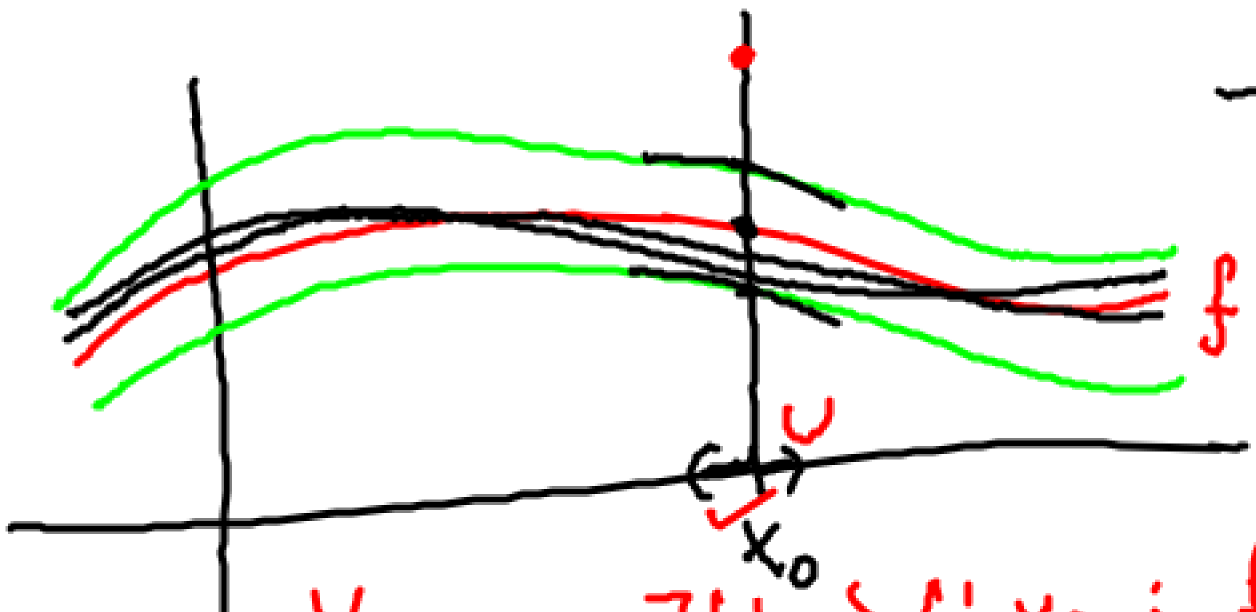
položíme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

protože funkce f_n je spojitá v x_0 platí

$\forall x \in Y \cap U$ (U okolí bodu x_0)

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$



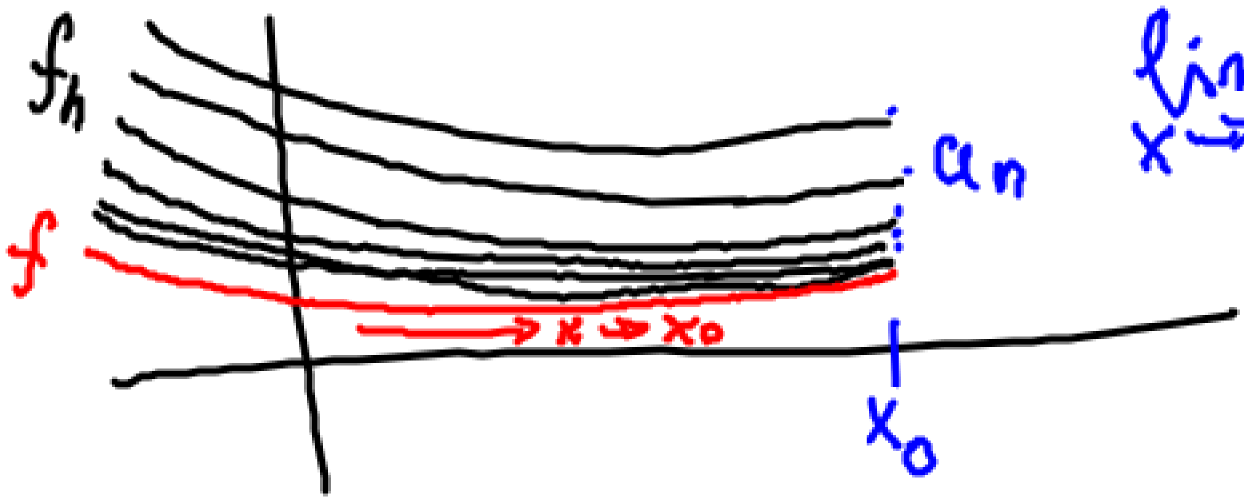


$\forall \varepsilon > 0 \; \exists U$ okolí x_0 : $f(U \cap Y) \subset (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$

Důsledek 5.10 (Věta o záměně limit)

Nechť posloupnost (f_n) stejnoměrně konverguje na množině Z k funkci f a nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje limita $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = a_n$. Pak existují i limity $\lim a_n$ a $\lim_{x\to x_0} f(x)$ a platí

$$\lim a_n = \lim_{x\to x_0} f(x)$$



$\lim_{x\to x_0} f(x_0) =$

$$\lim_{x\to x_0} \underbrace{\lim_{n\to\infty} f_n(x)}_{f(x)} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\lim_{x\to x_0} f_n(x)}_{a_n}$$

Řady

x_n - posloupnost

$$\sum x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

(s_n) $\quad s_1 = x_1,\ s_2 = x_1 + x_2, \ldots$

posloupnost $\quad s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$

částečných součtů řady $\sum x_n$

Existuje-li limita $\lim s_n \Leftrightarrow$ řada $\sum x_n$ má součet

---

$\sum x_n \qquad x_n = q^{n-1} \cdot s_{n+1} = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$

$$= \frac{1-q}{1-q}(1+q+q^2+\ldots+q^n) = \frac{1+q-q+q^2-q^2+\ldots+q^n-q^n-q^{n+1}}{1-q}$$

$$= \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$s_n = \frac{1-q^n}{1-q} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} \quad |q|<1$$

$$\sum q^{n-1} = \frac{1}{1-q}$$

Věta 5.11 (Cauchy-Bolzanovo kriterium)
Řada $\sum x_n$ konverguje, právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že pro každé $n_1, n_2 > n_0$ platí

$$|x_{n_1} + \dots + x_{n_2}| < \varepsilon$$

Důsledek 5.12 (nutná podmínka konvergence)
Konverguje-li řada $\sum x_n$, pak platí $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$

Důsledek 5.13. Jestliže řada $\sum x_n$ konverguje, pak platí $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=n}^{\infty} x_k = 0$

Věta 5.14 Mějme dvě posloupnosti (x_n), (y_n) a číslo c. Jestliže řady $\sum x_n$ a $\sum y_n$ konvergují, pak konvergují i řady $\sum (x_n+y_n)$ a $\sum c x_n$ a platí:

$$\sum (x_n+y_n) = \sum x_n + \sum y_n,$$

$$\sum c x_n = c \sum x_n.$$

Věta 5.15. Jestliže pro posloupnosti (x_n) a (y_n) existuje číslo n_0 takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $x_n = y_n$, pak $\sum x_n$ konverguje, právě když konverguje $\sum y_n$.

Věta 5.16 Nechť k je nezáporné celé číslo. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje, právě když konverguje řada $\sum_{n=k}^{\infty} x_n$.

Věta 5.17 Nechť (k_n) je rostoucí posloupnost nezáporných celých čísel, $k_1 = 1$. Jestliže $\sum x_n = s$, pak pro posloupnost $(y_n) = (x_{k_n} + \_\_ + x_{k_{n+1}-1})$ platí $\sum y_n = s$.