Limita

X, Y Hausdorffovy topologické prostory

$f: A \subset X \to Y$ zobrazení, $x_0 \in \mathrm{cl}\, A$. Limita f v bodě x_0 je $y_0 \in Y$ takový, že

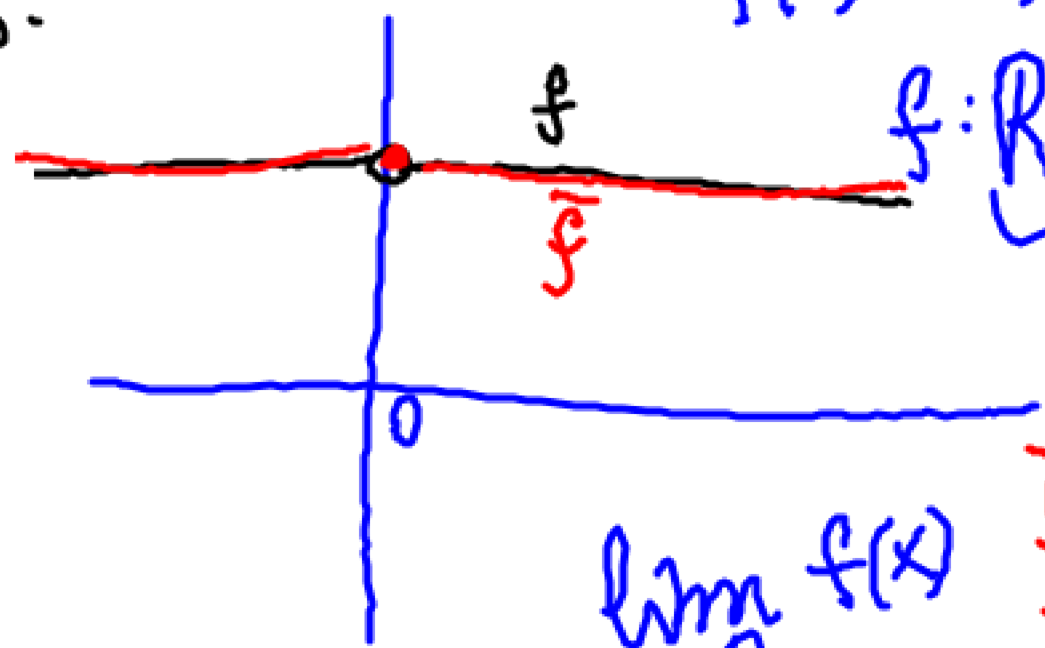
1. pokud $x_0 \in A$, pak f je spojité v x_0 a $y_0 = f(x_0)$,
2. pokud $x_0 \notin A$, pak zobrazení $\bar{f}: A \cup \{x_0\} \to Y$

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq x_0 \\ y_0 & x = x_0 \end{cases}$$

je spojité v x_0.

$$f(x) = \frac{x}{x}$$

$$f: \underbrace{\mathbb{R} \setminus \{0\}}_{A} \to \mathbb{R}$$



$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} \frac{x}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Věta 4.28 (o třech limách)

Buďte $f, g, h : X \subset \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ funkce $f \leq g \leq h$, $x_0 \in \mathrm{cl}\, X$

Existují-li limity $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ a $\lim\limits_{x \to x_0} h(x)$ a platí-li

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = y_0$$

pak existuje i $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = y_0$.

Důk.: $\forall$ okolí U bodu y_0 najít okolí V bodu x_0 tak, že $g(U \cap X) \subset V$.

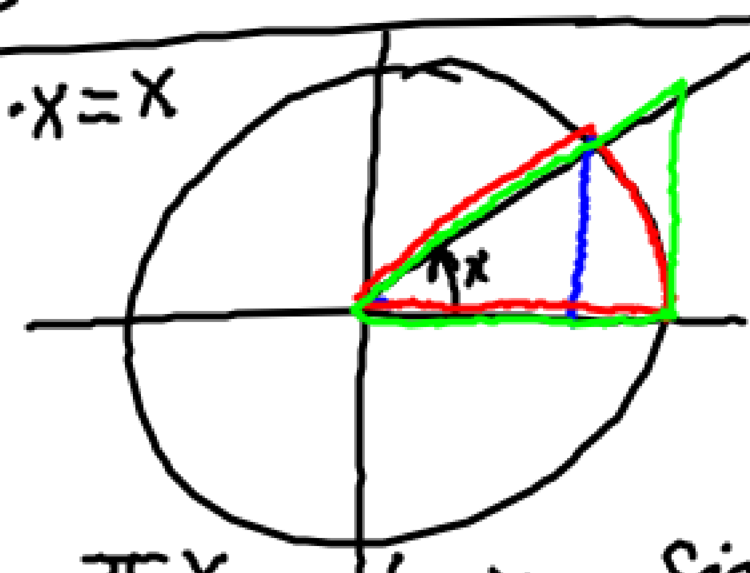
$U \supset J$ okolí bodu y_0 existuje okolí V otevřený interval

$f(V \cap X) \subset J$, $h(V \cap X) \subset J$ $f \leq g \leq h$

$$\forall x \in V \cap X \quad \underbrace{f(x)}_{\in J} \leq g(x) \leq \underbrace{h(x)}_{\in J}$$

$$g(U \cap X) \subset J \subset U \qquad J \subset U$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \qquad \sin x \leq \frac{2\pi}{2\pi} \cdot x = x$$



$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$1 \qquad 1 \qquad 1$$

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi x}{2\pi} \leq \frac{\operatorname{tg} x}{2} = \frac{\sin x}{2 \cos x}$$

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x}$$

Věty o počítání s limitami

Věta 4.29 Buďte $f_1, f_2 : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathrm{cl}\, X$. Platí

1. $\lim_{x \to x_0} f_1(x) = y_1 \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to x_0} f_2(x) = y_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} (f_1 + f_2)(x) = y_1 + y_2$

2. $\lim_{x \to x_0} f_1(x) = \infty$ a f_2 je zdola ohranič. $\Rightarrow \lim_{x \to x_0} (f_1 + f_2)(x) = \infty$

3. $\lim_{x \to x_0} f_1(x) = -\infty$ a f_2 je shora ohraničená $\Rightarrow \lim_{x \to x_0} (f_1 + f_2)(x) = -\infty$

Důkaz 2. $m < f_2$ $\qquad M - m$ $\qquad (x_0, \infty)$

$\forall x \in (x_0, \infty)\ f_1(x) > M - m$

$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) > M - m + m = M$

$f_1 = x \quad \lim_{x \to \infty} x = \infty$ $\qquad \lim f_1 + f = \lim x - 2x = -\infty$

$f_2 = -2x \quad \lim_{x \to \infty} -2x = -\infty$

Věta 4.30 $f_1, f_2 : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x_0 \in cl X$ $m \in \mathbb{R}$

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = y_1 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = y_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} (f_1 \cdot f_2)(x) = y_1 \cdot y_2$

2. $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = \infty$, $f_2 > m > 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} (f_1 \cdot f_2)(x) = \infty$

3. $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = \infty$, $f_2 < m < 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} (f_1 f_2)(x) = -\infty$

4. $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = -\infty$, $f_2 > m > 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} (f_1 f_2)(x) = -\infty$

5. $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = -\infty$, $f_2 < m < 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} (f_1 f_2)(x) = \infty$

6. $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = 0$, $|f_2| < m \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} (f_1 f_2)(x) = 0$.

---

6. $f_1 = \frac{1}{x} \to 0$ $\quad f_1 \cdot f_2 \to 1$

$f_2 = x \to \infty$ $\quad \to \infty$

x^2

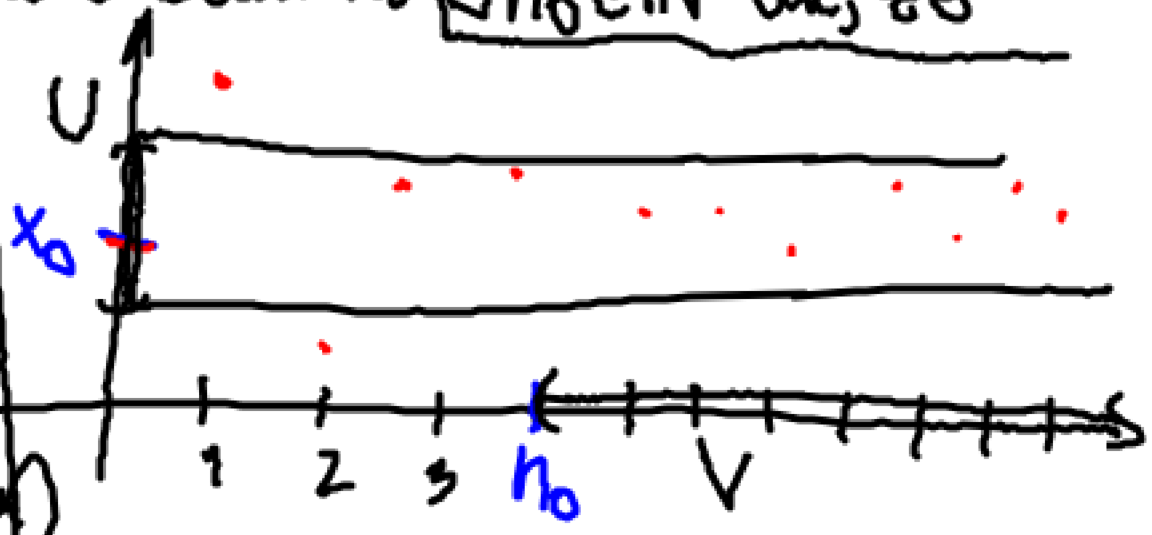
---

2. $f_1 \to \infty$ $\quad f_2 > m > 0$ $\quad \lim (f_1 \cdot f_2)(x) = \infty$

$f_1(x) = x$ $\quad f_2(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{3} > \frac{1}{3} > 0$

limita posloupnosti $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ $\lim x_n$

Věta 5.1 Posloupnost (x_n) prvků topologického prostoru X má limitu x_0 $\Leftrightarrow$ $\forall$ okolí U bodu x_0 $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n > n_0$ platí $x_n \in U$.



x_0 je hromadná hodnota (x_n) $\forall$ okolí x_0 $\exists$ nekonečně mnoho prvků posloupnosti (x_n)

Věta 5.2 Množina hromadných hodnot libovolné posloupnosti je uzavřená.

Důkaz: A množina hromadných hodnot

$X \setminus A$ je otevřená?

$X \setminus A$ takové prvky k nimž existuje okolí v němž je jenom konečně mnoho prvků (x_n)

$x \in X \setminus A$ existuje jeho okolí U obsahující konečně mnoho (x_n)

$U \subset X \setminus A$

Věta 5.3 X – komp. top. prostor (x_n) posloupnost v X

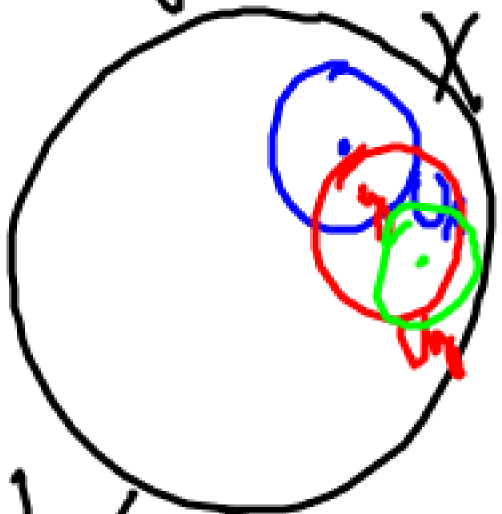
1. (x_n) má hromadnou hodnotu.
2. Má-li (x_n) jedinou hromadnou hodnotu x_0 pak $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$

Důkaz: Předpokládejme, že (x_n) nemá žádnou hromadnou hodnotu.

1\. $x \in U_x$ okolí bodu x

$S = \{U_x \mid x \in X\}$ – otevřené pokrytí X.

$\bigcup S = X$



$T \subset S$ konečné podpokrytí S

$T = \{U_{x_1}, \dots, U_{x_n}\}$ $\underbrace{\bigcup T} = X$

2\. x_0 jediná hromadná hodnota (x_n)

$\lim x_n \neq x_0$ existuje U okolí bodu x_0 takové, že není pravda, že počínaje n_0 všechny $n > n_0$ $x_n \in U$ $X \setminus U$ obsahuje nekonečně mnoho hodnot (x_n) $\underbrace{\underbrace{X \setminus U}_{\text{uzavřená}}}_{\text{kompaktní}}$ je kompaktní množ.

podle bodu 1 $X \setminus U$ obsahuje hromadnou hodnotu $\neq x_0$ spor.

Věta 5.4. 1. Každá posloupnost v $\mathbb{R}$ má v $\overline{\mathbb{R}}$ největší a nejmenší hromadnou hodnotu.

2. Je-li tato posloupnost ohraničená jsou tyto hromadné hodnoty reálná čísla.

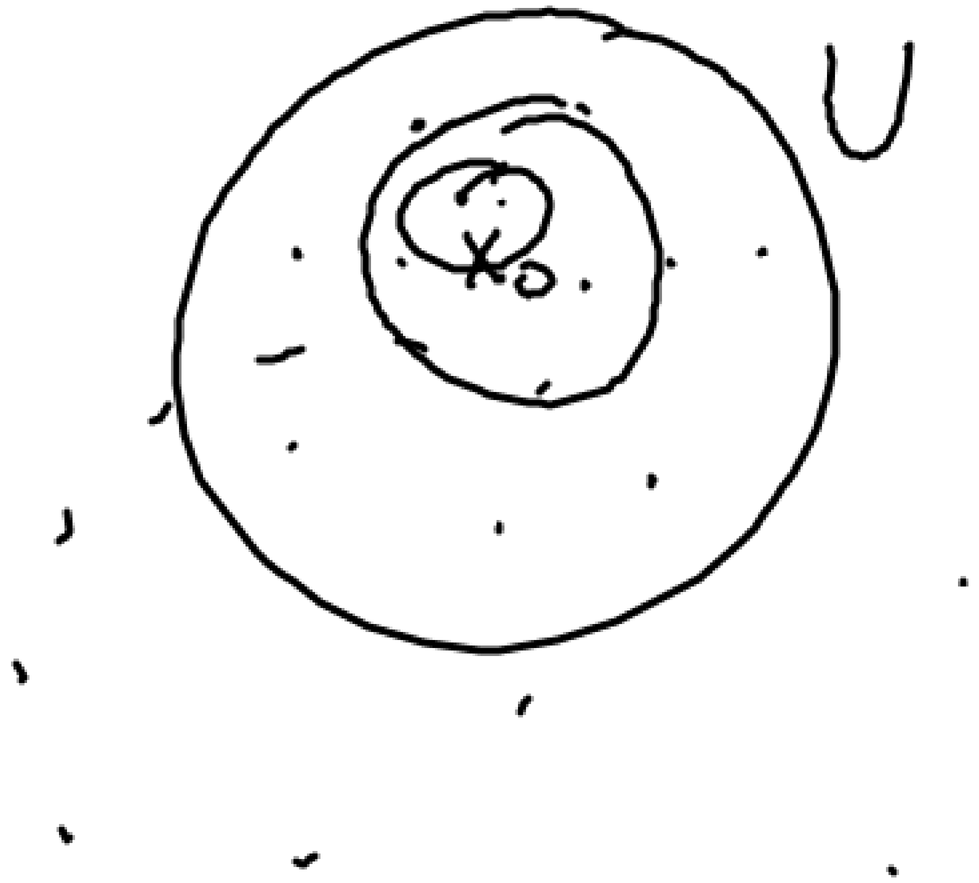
---

limes superior – největší hromadnou hodnotu $\limsup x_n$

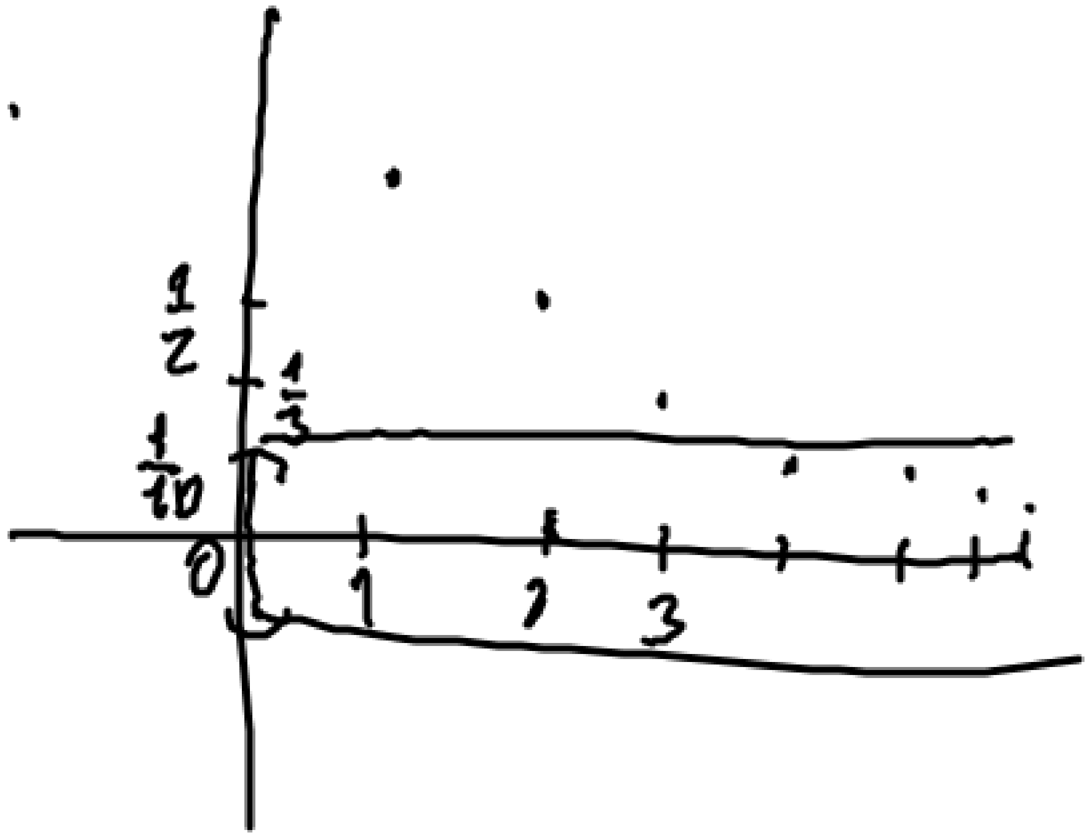
limes inferior – nejmenší hromadnou hodnotu $\liminf$

Věta 5.5 Buď (x_n) posloupnost v $\mathbb{R}$, pak bod $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ je hromadnou hodnotou (x_n) $\Leftrightarrow$ $\exists$ vybraná posloupnost (x_{σ_n}) taková, že $\lim x_{\sigma_n} = x_0$

Věta 5.6 Každá konvergentní posloupnost je cauchyovská.
Každá cauchyovská posloupnost reálných čísel je konvergentní.



$x_n = \frac{1}{n}$



$x_n = n$

(x_0, ∞)

$x_n = (-1)^n$

$(x_n) = (-1, 1, -1, 1, -1, 1 \dots)$

$A = \{1, -1\}$ hromadné hodnoty

$\limsup x_n = 1$

$\liminf x_n = -1$

$x_n = \frac{1}{n}$ $\qquad A = \{0\}$

$\limsup x_n = 0$

$\liminf x_n = 0$

$\lim \frac{1}{n} = 0$

Věta 5.7 Jestliže k posloupnosti funkcí (f_n) $f_n: X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a funkci $f: Y \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existuje posloupnost (y_n), $\lim y_n = 0$ a $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in Y$ je $|f_n(x) - f(x)| < y_n$ pak posloupnost (f_n) konverguje stejnoměrně k f na Y.

Věta 5.8 Posl. (f_n) konverguje stejnoměrně na $Y \iff$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n_1, n_2 > n_0\ \forall x \in Y$ platí $|f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x)| < \varepsilon$