Věta 4.20 Libovolný otevřený interval (a,b) je homeomorfní s $\mathbb{R}$.

Důk.: $(a,b) \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} \mathbb{R}$

1. intervaly (a_1,b_1), (a_2,b_2) jsou homeomorfní

$$f(x) = \frac{x-b_1}{a_1-b_1}a_2 + \frac{x-a_1}{b_1-a_1}b_2 \qquad f\circ g \overset{?}{=} id_{(a_1,b_1)}$$

$$g(x) = \frac{x-b_2}{a_2-b_2}a_1 + \frac{x-a_2}{b_2-a_2}b_1 \qquad g\circ f = id_{(a_2,b_2)}$$

2. $(-1,1)$ je homeomorfní s $\mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}, \quad g(x) = \frac{x}{1-|x|}$$

Topologický Hausdorffovy prostory X, Y

$f: A \subset X \to Y$, číslo $y_0 \in Y$ nazveme

limitou zobrazení f v bodě $x_0 \in X$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ $\quad x_0 \in \mathrm{cl}\, A$

1. $x_0 \in A$ $\quad f(x_0) = y_0$
2. $x_0 \notin A$ $\quad \bar{f}: A \cup \{x_0\} \to Y$ $\quad \bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ y_0 & x \notin A \end{cases}$

   je spojitá v x_0.

$\lim_{x \to 1} f(x) = 1$

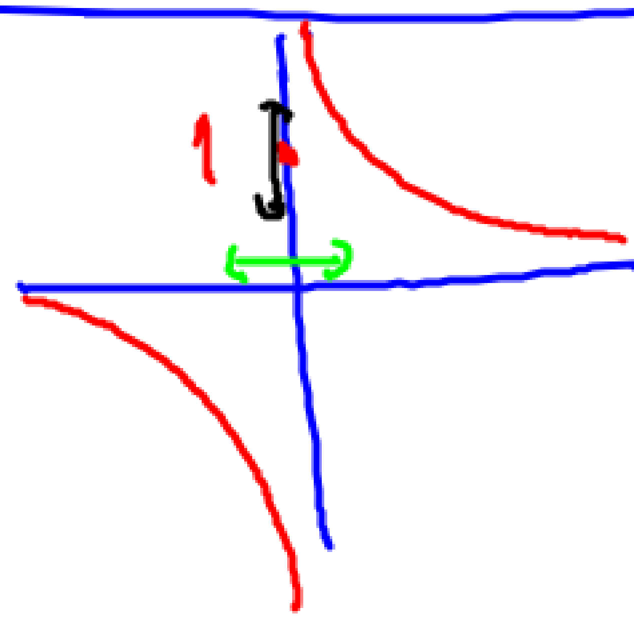
$\lim_{x \to 0} f(x) =$

$id_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} = f$

$\bar{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\bar{f}(x) = id_{\mathbb{R}}(x)$

$\lim_{x \to 0} f(x)$ neexistuje



$f(x) = \frac{1}{x}$

$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

Věta 4.22 $f: A \subset X \to Y$. Pak $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$ jestliže ke každému okolí V bodu y_0 existuje okolí U bodu x_0 takové, že $f(U \cap A) \subset V$.

Důkaz: důsledek definice limity a spojitosti funkce v bodě.

Věta 4.23 Každé zobrazení má v daném bodě nejvýše jednu limitu.

Důk.: y_1, y_2 dvě různé limity $f: A \subset X \to Y$ v bodě $x_0 \in X$

Zvolme si disjunktní okolí V_1, V_2 bodů y_1, y_2

Podle věty 4.22 existují okolí U_1, U_2 bodu x_0 tak, že $f(U_1 \cap A) \subset V_1$

$f(U_2 \cap A) \subset V_2$

$f(U_1 \cap U_2 \cap A) \begin{matrix} \subseteq V_1 \\ \subset V_2 \end{matrix}$

Věta 4.24 (o limitě složeného zobrazení)

X, Y, Z Hausd. topologické prostory

$f : A \subset X \to Y$, $g : Y \to Z$ $y_0 = \lim_{x \to x_0} f(x)$ a

g je spojité v y_0. Potom má limitu

$g \circ f$ v bodě x_0 a platí

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = g(y_0).$$

$f(x) = x^2$

$g(x) = x + 3$

$y_0 = \lim_{x \to 2} x^2 = 4$

$$\lim_{x \to 2} x^2 + 3 = \lim_{x \to 2} (g \circ f)(x) = g(y_0) = g(4) = 7$$

Rozšířená množina reálných čísel

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad -\infty < x < \infty$

$(1, \infty] = (1, \infty) \cup \{\infty\}$

$[-\infty, 1) = (-\infty, 1) \cup \{-\infty\}$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$

limita v nevlastním bodě. nevlastní limita

Věta 4.25 (zobecněná věta o suprému a infimu)

Každá množina v $\overline{\mathbb{R}}$ má v $\overline{\mathbb{R}}$ suprémum a infimum.

Důkaz: $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ pokud A neprázdná shora ohraničená pak podle 2.5 (2.6) má své suprémum (infimum)

- pokud shora neohraničená $\sup A = \infty$
- pokud A zdola neohraničená $\inf A = -\infty$
- $A = \emptyset$ $\sup \emptyset = -\infty$. $\inf \emptyset = \infty$

Množina horních závor $\emptyset$ $\overline{\mathbb{R}}$

dolních $\overline{\mathbb{R}}$

Věta 4.26 $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotónní funkce x_0 bod uzávěru $(-\infty, x_0) \cap X$ pak existuje limita

$$\left.\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in (-\infty, x_0)}} f(x).\right\} \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

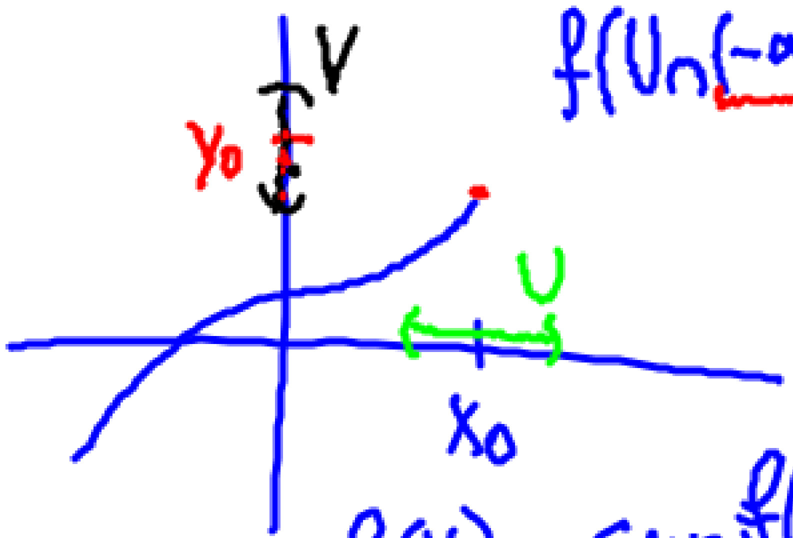
Je-li bod x_0 bodem uzávěru $(x_0, \infty) \cap X$ pak existuje limita

$$\left.\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in (x_0, \infty)}} f(x).\right\} \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Důkaz: $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$, f neklesající

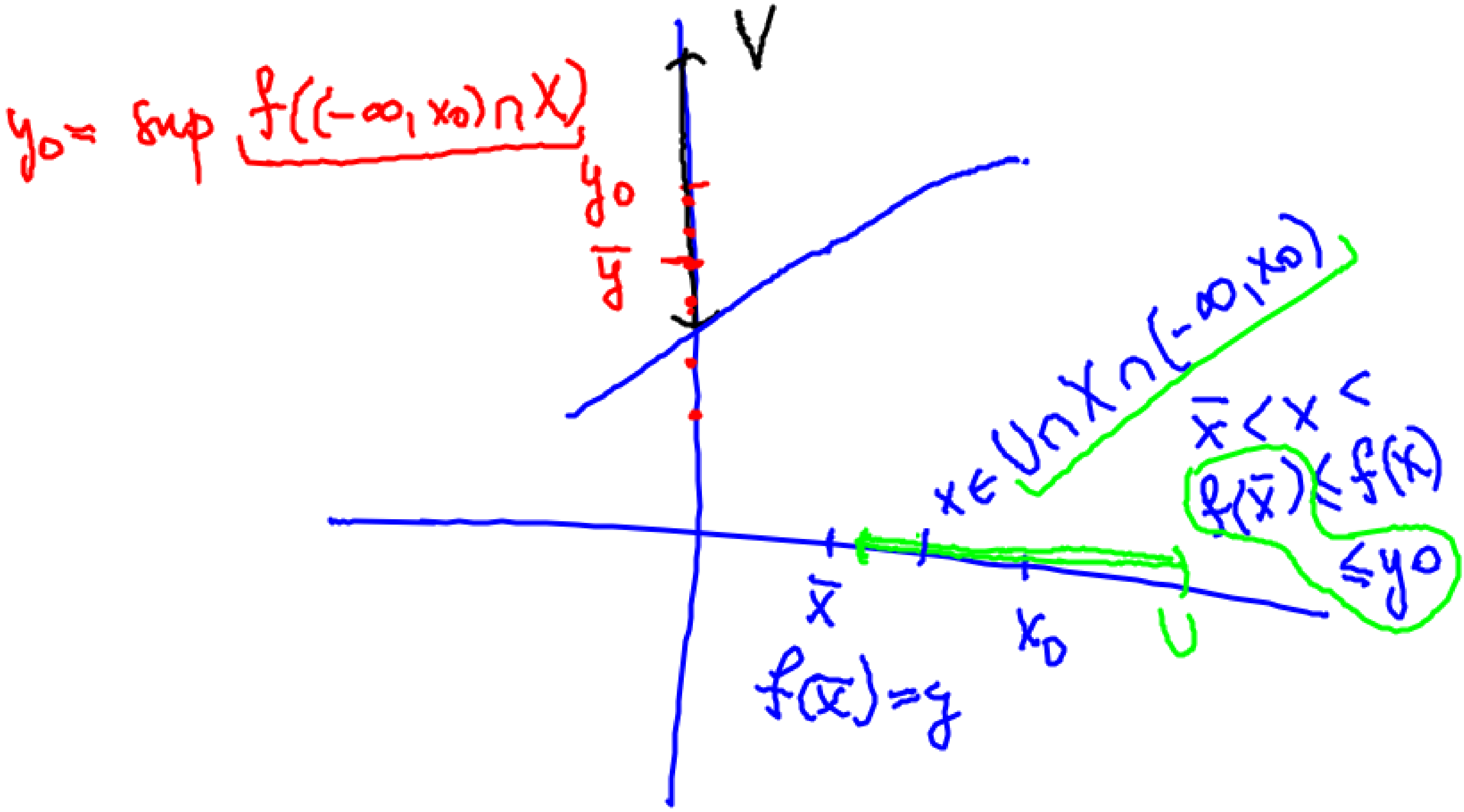
$f(U \cap \underline{(-\infty, x_0) \cap X)} \subset V$

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = y_0$



$f(x) \leq \sup f((-\infty, x_0) \cap X)$

$y_0 = \sup_{x \in (-\infty, x_0) \cap X}$



V
$y_0 = \sup \underbrace{f((-\infty, x_0) \cap X)}$
y_0
$\bar{y}$
$x \in \underbrace{U \cap X \cap (-\infty, x_0)}$
$\bar{x} < x <$
$f(\bar{x}) \leq f(x)$
$\leq y_0$
$\bar{x}$
x_0
U
$f(\bar{x}) = y$