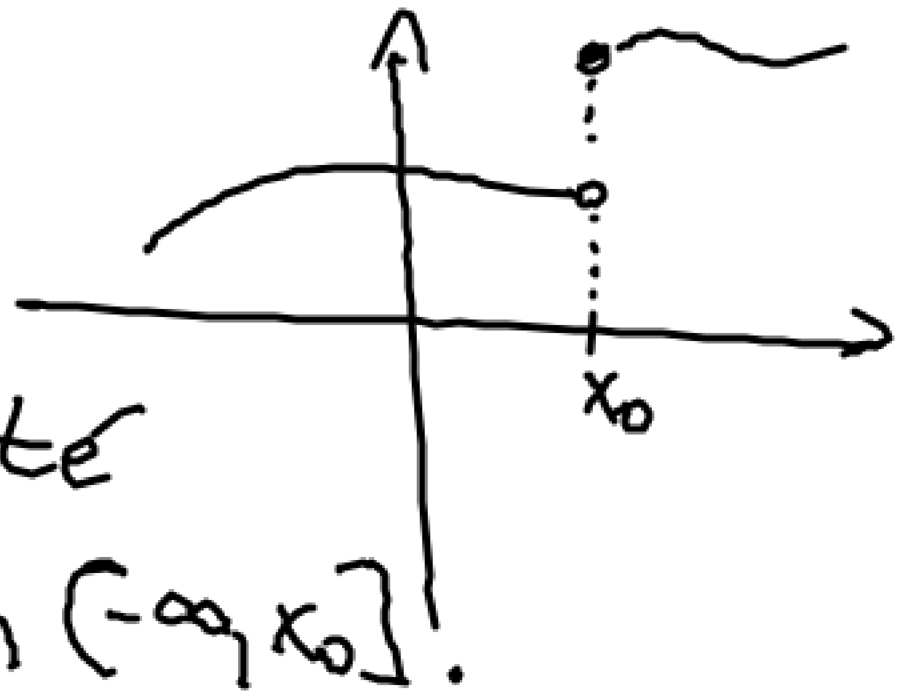
Vlastnosti spojitých funkcí



$f: X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
je spojitá zleva v x_0,
když je v x_0 spojité
její zúžení na $X \cap (-\infty, x_0]$.

<u>Věta 4.9</u>: Funkce je spojitá v x_0 $\Leftrightarrow$ je spojitá v x_0 zleva i zprava.

<u>V 4.10</u>: Funkce f je spojitá v $x_0 \in X$
$\Leftrightarrow$ ke každému otevřenému intervalu J se středem v bodě $f(x_0)$ existuje ot. interval I se středem v x_0 : $f(I \cap X) \subset J$.

<u>Důkaz</u>: „$\Rightarrow$" Zvolíme J - ot. interval, $f(x_0) \in J \Rightarrow \exists$ okolí $U \ni x_0$: $f(U \cap X) \subset J$. $\exists\, I \ni x_0 : I \subset U$.

„$\Leftarrow$" Zvolíme $U \ni f(x_0)$.
$\exists$ interval $J \ni f(x_0)$, $J \subset U$.
$\Rightarrow \exists\, I \ni x_0$: $f(I \cap X) \subset J \subset U$.

Důsledek 4.11: (ε, δ) definice spojitosti

Funkce f je spojitá v x_0 $\Leftrightarrow$ ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna x: $|x - x_0| < \delta$ platí $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Dk:

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

$$(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$$

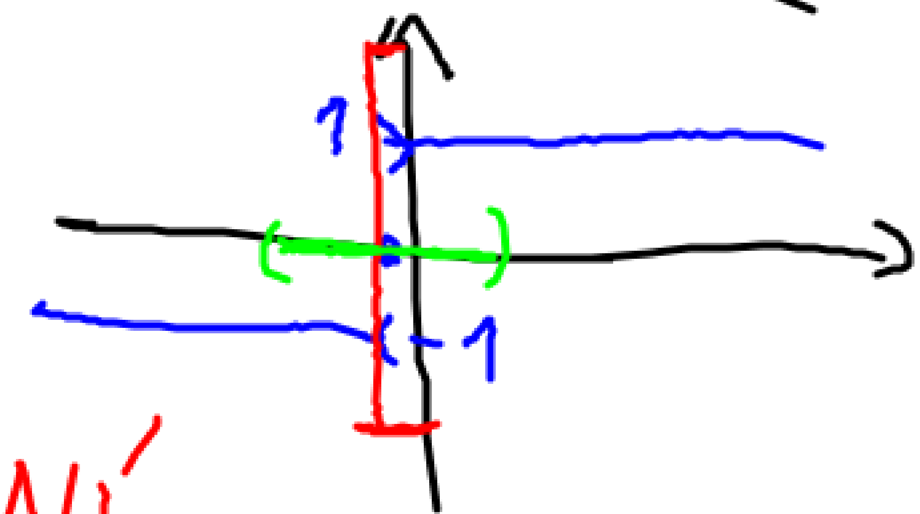
1) $f(x) = |x|$.

zvolíme $\varepsilon > 0$.

$$\left.\begin{aligned} &|x - x_0| < \delta = \varepsilon \\ &|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \\ &\big||x| - |x_0|\big| \leq |x - x_0| < \varepsilon \end{aligned}\right\} \text{ |x| je spojitá fce.}$$

---

2) $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$



Spojitá v 0? NENÍ

Okolí $f(0) = 0$ $U_1 = (-3, 5)$

okolí 0 $V_1 = (-3, 5)$

$f(V_1) = \{-1, 0, 1\} \subset U_1$

$f(0)$: $U_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

0: $V_2 = (-1, 1)$ $f(V_2) = \{-1, 1, 0\}$

V 4.12: Funkce $\frac{1}{x}$ je spojitá..

Buď $\varepsilon > 0$.

$$\delta < \min \left\{ \frac{|x_0|}{2}, \frac{\varepsilon x_0^2}{2} \right\}$$

$$|x - x_0| < \delta$$

$$\delta > |x - x_0| = |x_0 - x| \geq \big| |x_0| - |x| \big| \geq$$

$$|x_0| - |x|$$

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| = \left| \frac{x_0 - x}{x x_0} \right| < \frac{\delta}{|x| |x_0|} < \frac{\delta}{(|x_0| - \delta) \cdot |x_0|}$$

$$< \frac{\delta}{\left(|x_0| - \frac{|x_0|}{2}\right) \cdot |x_0|} = \frac{2\delta}{|x_0|^2} \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon} < \frac{\delta}{\delta} \varepsilon = \varepsilon$$

V 4.13: Buďte f, g, h funkce spojité v x_0, $0 \notin h(X)$. Pak následující funkce jsou spojité v x_0:

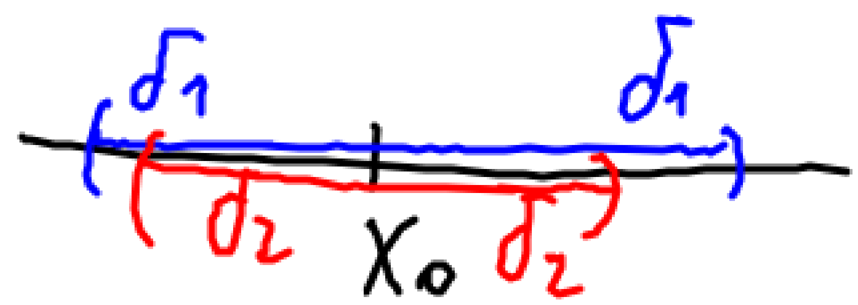
1) $f+g$
2) $f \cdot g$
3) $\dfrac{f}{h}$:

Důkaz: 1) Buď $\varepsilon > 0$.

f je spojitá $\Rightarrow \exists\, \delta_1 > 0$: když $|x - x_0| < \delta_1$
$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

g je spojitá $\Rightarrow \exists\, \delta_2 > 0$: když $|x - x_0| < \delta_2$
$$|g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$



Pak $|x - x_0| < \delta$

$$|(f+g)(x) - (f+g)(x_0)| = |f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)|$$
$$\leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

2) Buď $\varepsilon > 0$. $\delta_1 > 0,\ M > 0$.

f je spojitá v $x_0 \Rightarrow \exists$ čísla δ_1, M taková, že pokud $|x - x_0| < \delta_1$: $|f(x) - f(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{2|g(x_0)|}$

$|f(x)| < M$.

g je spojitá v $x_0 \Rightarrow \exists\, \delta_2 > 0$:

$|x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$.

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

Pak $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ platí:

$$|(f\cdot g)(x) - (f\cdot g)(x_0)| = |f(x)\cdot g(x) - f(x_0)\cdot g(x_0)|$$

$$= |\underline{f(x)g(x) - f(x)g(x_0)} \underline{+ f(x)\,g(x_0)} \underline{- f(x_0)g(x_0)}| \le |f(x)|\,|g(x) - g(x_0)|$$

$$+ |g(x_0)|\,|f(x) - f(x_0)| < M\cdot\frac{\varepsilon}{2M} + |g(x_0)|\frac{\varepsilon}{2|g(x_0)|}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

3) $\frac{f}{h}$ je spojitá v x_0?

$h(x) = \frac{1}{x}$ - spojitá (V 4.12)

$(h \circ k)(x) = \frac{1}{k(x)}$ spojitá (kompozice dvou spojitých fcí)

$\frac{f}{k} = f \cdot \frac{1}{k}$ součin spojitých fcí