$f: X \longrightarrow Y$ homeomorfismus

f je spojité, f - bijekce f^{-1} je spojité

Věta 3.8 Složení homeomorfismů je homeomorfismus

Důk $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ homeo.

$g \circ f$? homeo? $g \circ f$ je bijekce - cvičení

$g \circ f$ - je spojité věta 3.5

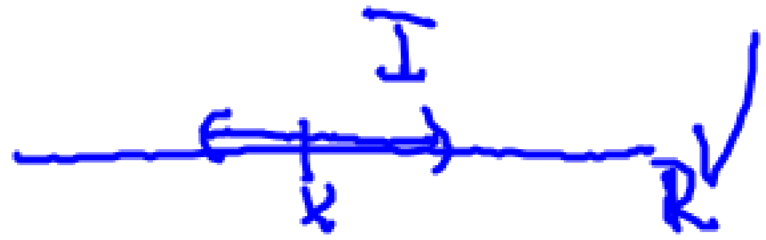
$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ - je spojité podle věty 3.5

TOPOLOGICKÉ VLASTNOSTI MNOŽINY REÁLNYCH ČÍSEL

$U \subset \mathbb{R}$ je otevřená v přirozené topologii $\mathbb{R}$ jestliže ke každému bodu $x \in U$ existuje otevřený interval I takový, že $x \in I \subset U$.

Věta 4.1 Systém otevřených množin je topologie na $\mathbb{R}$.

Důkaz: Axiom 1 $\emptyset, \mathbb{R} \subset \tau$



✓

Axiom 2 $U, V \in \tau$, potom $U \cap V \in \tau$

$x \in U \cap V$ $\quad x \in U$ $\quad I$ - otevřený interval $\quad x \in I \subset U$

$\quad\quad\quad\quad x \in V$ $\quad J$ $\quad\quad x \in J \subset V$

$I \cap J$ - otevřený interval $x \in I \cap J \subset U \cap V$ ✓

Axiom 3 $S \subset \tau$ $\quad \cup S \in \tau$

$x \in \cup S$ existuje množina $U \in S$ taková, že $x \in U$

existuje ot. interval I $\quad x \in I \subset U \in S$

$x \in I \subset \cup S$ $\quad I \subset U$ ✓

Lemma 4.2 $X \subset \mathbb{R}$ $\forall x,y \in X$ $[x,y] \subset X$
potom X je interval

Věta 4.3 Množina X je souvislá v $\mathbb{R}$ právě, když X je interval.

Důkaz: $\Longrightarrow$ (X není interval $\Rightarrow$ X není souvislá)

existuje x,y,z $\quad x,y \in X \quad x<z<y \quad z \notin X$

U,V otevřené disjunktní $U \cap X, V \cap X \neq \emptyset$

$X = (U \cap X) \cup (V \cap X) \quad U = (-\infty, z), V = (z, \infty)$

$\emptyset \neq U \cap X \ni x$, $V \cap X \ni y$ $\quad X = (X \cap U) \cup (V \cap X)$

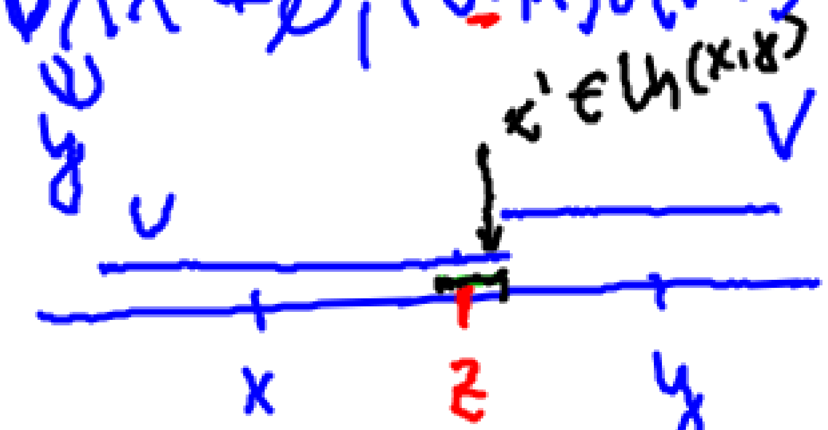
$\Longleftarrow$ (předp. existuje nesouvislý interval $X \Rightarrow$ spor)

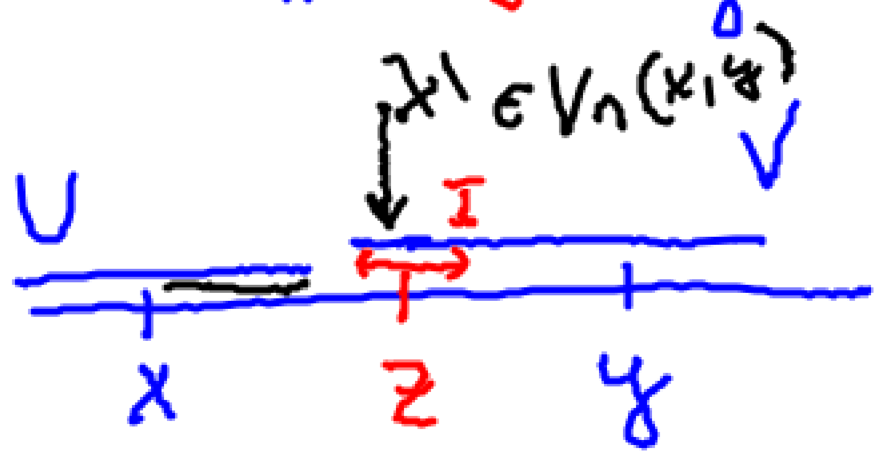
U,V - otevřené, disj. $\underset{\in}{U \cap X}, \underset{\in}{V \cap X} \neq \emptyset$, $(U \cap X) \cup (V \cap X) = X$

$[x,y] \subset X \qquad x < y$

$z = \sup\, (x,y) \cap U$

$x < z < y \quad z \notin U \cap X$.
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad \notin V \cap X$





Důsledek 4.4 (Bolzano)

Spojitý obraz intervalu je interval

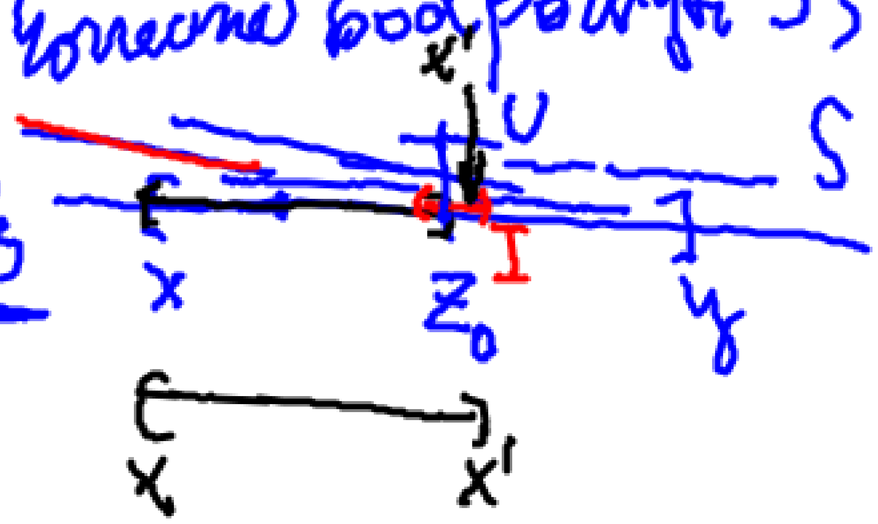
Lemma 4.5 (Heine-Borel)

$[x,y] \subset \mathbb{R}$ je kompaktní množina.

Důk.: S systém otevřených množin pokrývající $[x,y]$

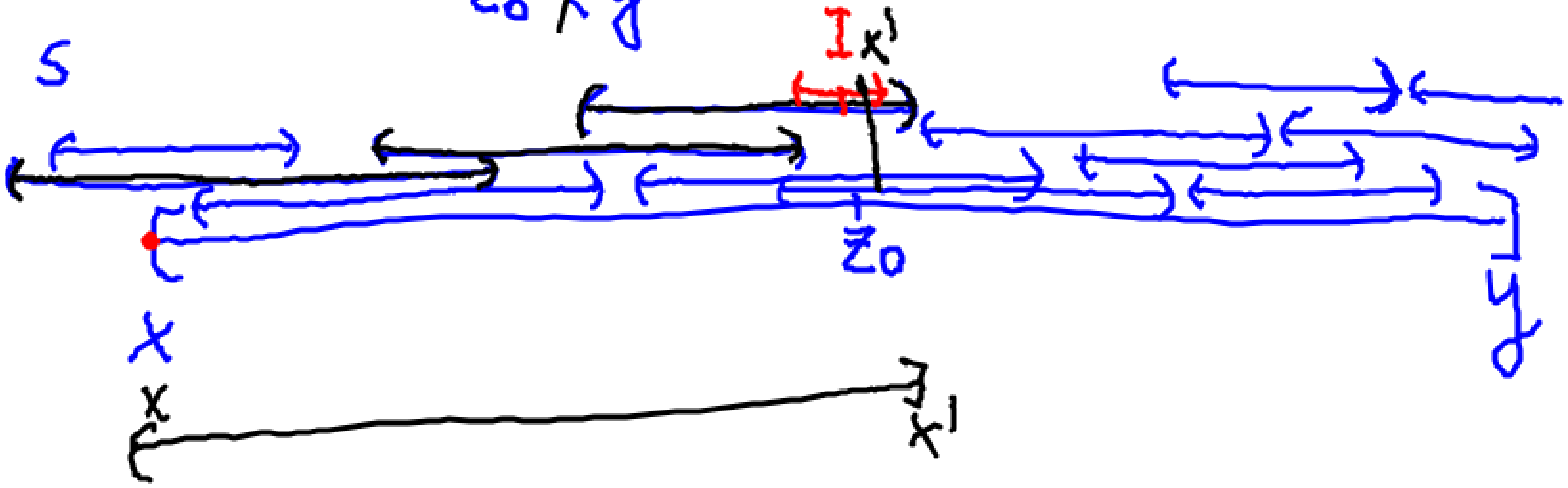
$A = \{ z \in [x,y] \mid [x,z]$ má konečné podpokrytí $S \}$

$x \in A$ $\qquad [x,x] = \{x\}$



$z_0 = \sup A$ $\qquad z_0 = y$?

$z_0 \not< y$



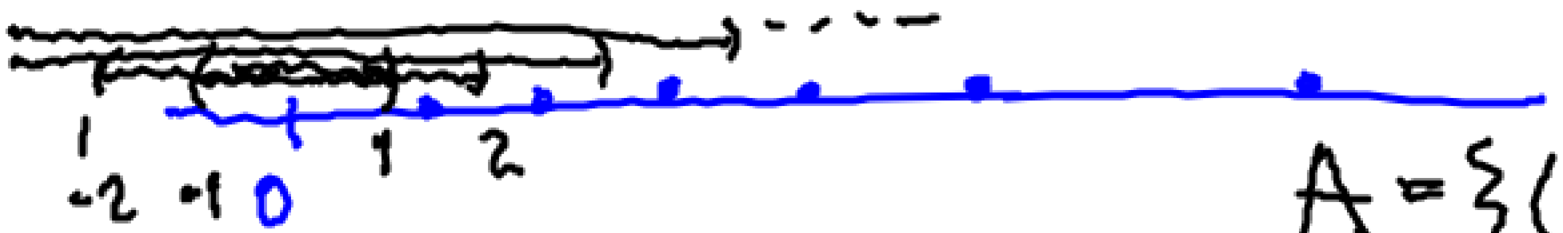
Věta 4.6 $X \subset \mathbb{R}$

1. X je kompaktní množina.
2. X je uzavřená a ohraničená.

Důkaz:

$\Rightarrow$ ✓ X komp. v Hausdorffově prostoru $\xRightarrow{V. 3.2}$ uzavřená.

předpokládejme, že X není ohraničená $\Rightarrow$ není kompaktní



$A = \{(-n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$

$\cup \{(-1,1), \dots, (-100000, 100000)\}$

$(-100\,000, 100\,000)$

$\Leftarrow$ uzav., ohranič $\Rightarrow$ komp.

$\underbrace{[m, M]}_{\text{kompaktní}} \supset X$ podle věty 3.3 X kompaktní

Důsledek 4.7 každá kompaktní množina má maximum a minimum

Důsledek 4.8 (Weierstrass)
každá spojitá funkce nabývá na kompaktní množině svého maxima i minima.