Konvexnost $f: X \to \mathbb{R}$ $I \subset X$

$\forall x_1, x_2, x_3 \in I \quad x_1 < x_2 < x_3$

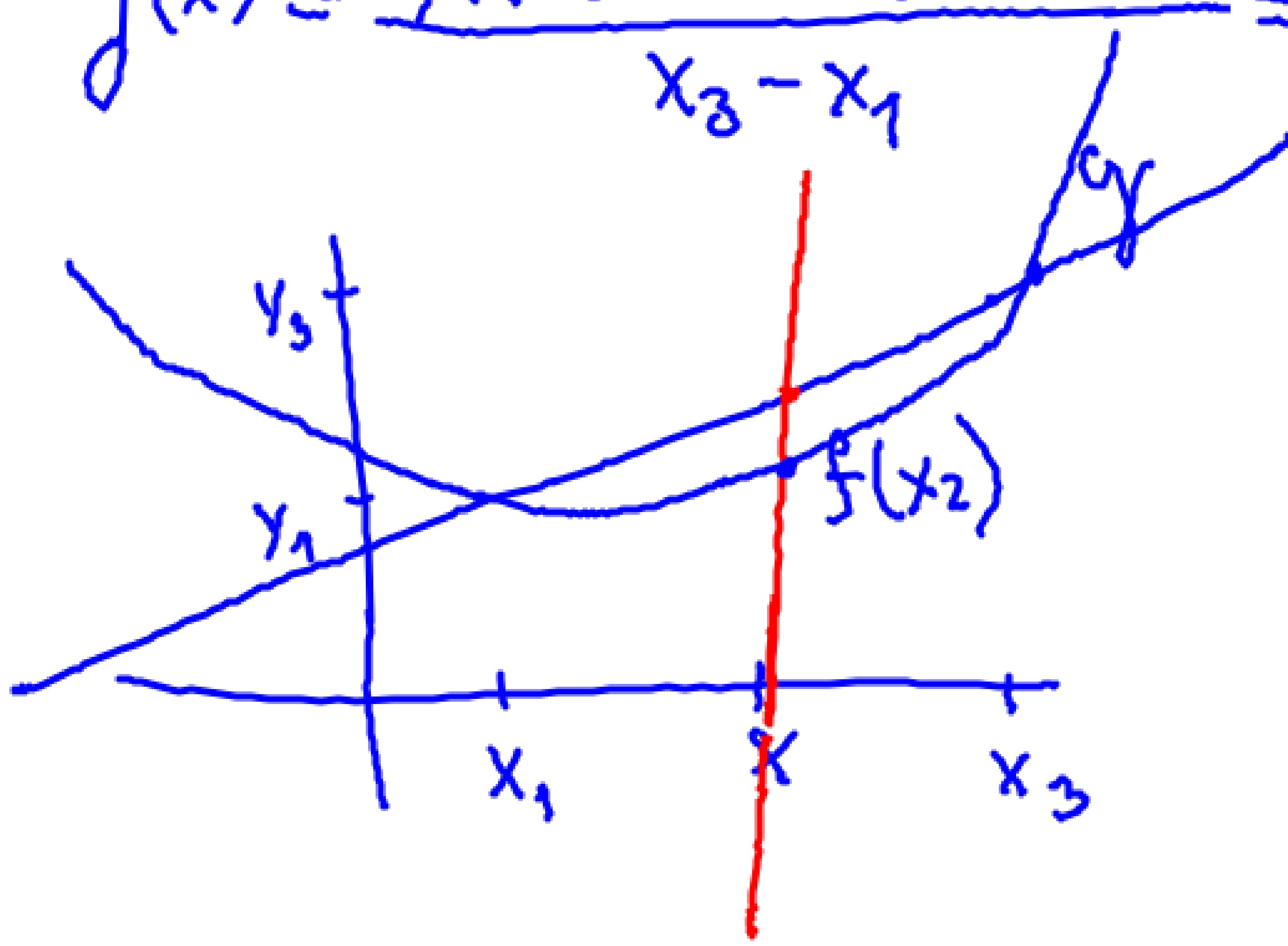
$$f(x_1)(x_3 - x_2) + f(x_2)(x_1 - x_3) + f(x_3)(x_2 - x_1) \geq 0$$

$y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2),\ y_3 = f(x_3)$

$$y_1(x_3 - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_1) \geq 0$$

$$f(x_2) = y_2 \leq \frac{y_1(x_3 - x_2) + y_3(x_2 - x_1)}{x_3 - x_1} \qquad (2.6.4)$$

$$g(x) = \frac{y_1(x_3 - x) + y_3(x - x_1)}{x_3 - x_1} = \underbrace{\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}}_{k} \cdot x + \underbrace{\frac{y_1 x_3 - y_3 x_1}{x_3 - x_1}}_{q}$$



$f, g : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f+g : X \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$f \cdot g : X \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$pow_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tak, že $pow_1 = id_{\mathbb{R}}$

$pow_{n+1} = id_{\mathbb{R}} \cdot pow_n$ $pow_3(x) = x^3$

TOPOLOGIE

X – množina τ – systém podmnožin

1. $\emptyset, X \in \tau$
2. $U, V \in \tau$ potom $U \cap V \in \tau$
3. $S \subset \tau$ potom $\cup S \in \tau$

otevřené množiny, $x \in X$ $U \in \tau$ $x \in U$

U okolí bodu x

kritérium otevřenosti

$U \in \tau \iff \forall x \in U \ \exists V \in \tau, x \in V$ takové, že $V \subset U$

$\Leftarrow$

Přirozená topologie na $\mathbb{R}$

U je otevřená množina $\forall x \in U$ $\exists$ otevřený interval I taký, že $x \in I \subset U$

(a,b) – otevřená $[0,1]$

$\mathbb{R}$ – otevřená $(0,\infty) = \mathbb{R}^+$

$\mathbb{N}$ – není otevřená

$$\mathbb{R} - \mathbb{Z} = \cup\{(n-1,n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

$X, \tau \quad , Y \subset X$

$$\tau_Y = \{ Y \cap U \mid U \in \tau \}$$

Věta 3.1 Systém τ_Y je topologie na Y.

Důk.: Axiom 1. $\emptyset, Y \in \tau_Y$?

$\emptyset, X \in \tau \qquad U = \emptyset \quad Y \cap U = \emptyset \in \tau_Y$

$\qquad\qquad U = X \quad Y \cap U = Y \in \tau_Y$

Axiom 2. $V', U' \in \tau_Y \quad U' \cap V' \in \tau_Y \quad U, V \in \tau \quad U' = Y \cap U$, $V' = Y \cap V$

$U' \cap V' = (Y \cap U) \cap (Y \cap V) =$

$= (Y \cap Y) \cap (U \cap V) = Y \cap \underbrace{(U \cap V)}_{\in \tau} \in \tau_Y$

Axiom 3.

$S \subset \tau_Y \quad S' \subset \tau \quad S = \{ Y \cap U \mid U \in S' \}$

$\cup S = \cup \{ Y \cap U \mid U \in S' \} =$

$= Y \cap (\cup \{ U \mid U \in S' \}) =$

$= Y \cap \underbrace{(\cup S')}_{\in \tau} \in \tau_Y$

τ_Y – indukovaná topologie na Y

$X, \tau \quad x \in X \quad Y \subset X$

1. Existuje okolí U bodu x $\quad U \subset Y$ $\quad$ vnitřní

2. Existuje okolí U bodu x $\quad U \subset X \setminus Y$ $\quad$ vnější

3. Každé okolí U bodu x $\quad U \cap Y \neq \emptyset \quad U \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset$ $\quad$ hraniční

int Y – vnitřek Y
ext Y – vnějšek Y
fr Y – hranice Y

disjunktní $\quad X = \operatorname{int} Y \cup \operatorname{ext} Y \cup \operatorname{fr} Y$

$Y = (1,5] \quad \operatorname{int} Y = (1,5), \quad \operatorname{ext} Y = (-\infty,1) \cup (5,\infty)$

$\operatorname{fr} Y = \{1,5\}$

$\operatorname{cl} Y$ – uzávěr

x hromadným bodem Y $\forall$ okolí U bodu x existuje $y \in Y \quad y \in U \quad y \neq x$

$Y = (1,5] \cup \{6\}$

X, τ nesouvislý když existují U, V otevřené disjunktní takové, že neprázdných

$$X = U \cup V$$

souvislý není-li nesouvislý

$X \subset \mathbb{R}$ $\quad X = (1,5] \cup \{6\}$

$U = (1,5]$, $V = \{6\}$ $\quad U = (0, \frac{11}{2}) \cap X \in \tau_X$

$V = (\frac{11}{2}, \frac{13}{2}) \cap X \in \tau_X$