Důkaz 1. Důsledek definice $\mathbb{N}$ a Lemmatu 2.9

2. $\mathbb{N} = \bigcap \{X \mid X \subset \mathbb{R},\ X$ je induktivních množ$\}$

$X \subset \mathbb{N}$ $\quad X \supset \mathbb{N} \Rightarrow X = \mathbb{N}$

3. $1 = \min \mathbb{N}$ $\quad$ Protože $\mathbb{N}$ je induktivní $1 \in \mathbb{N}$

$[1,\infty)$ je induktivní $\mathbb{N} \subset [1,\infty)$

$1 \leq [1,\infty) \supset \mathbb{N} \ldots 1 \leq \mathbb{N}$ $\quad \min \mathbb{N} = 1$

4. $n \neq 1 \Rightarrow n-1 \in \mathbb{N}$. Sporem $n \neq 1$ $\quad n-1 \notin \mathbb{N}$

$\mathbb{N} \setminus \{n\}$ je induktivní $\mathbb{N} \subset \mathbb{N} \setminus \{n\}$

$n \notin \mathbb{N}$ spor.

5. $(n, n+1) \cap \mathbb{N} = \emptyset$ $\quad X =$ množina n pro které 5. platí

$\underline{\underline{1 \in X}}$ $\quad (1,2) \cap \mathbb{N} = \emptyset$ $\quad$ $p \in (1,2)$ $\quad p \neq 1$ $\quad$ Z

$p-1 \in \mathbb{N}$

$p-1 < 1 = \min$

$n \in X$ $\quad (n, n+1) \cap \mathbb{N} = \emptyset$

$(n+1, n+2) \cap \mathbb{N} = \emptyset$

$p \in$ $\quad n+1 < p < n+2$

$n < p-1 < n+1 \ldots p-1 \in (n, n+1) \cap \mathbb{N}$

6. Každá neprázdná podmnožina $\mathbb{N}$ má nejmenší prvek

$Y \subset \mathbb{N}$ nemá minimum.

$X = \{n \in \mathbb{N} \mid n < Y\}$

$\underset{\underset{\mathbb{N}}{\parallel}}{X} \cap \overset{\overset{\mathbb{N}}{\cup}}{Y} = \emptyset$ $\emptyset$

$1 \in X$ ✓ $1 < Y$

$n \in X$ $n < Y$ Co $n+1 < Y$

$n+1 \in X$ $(n, n+1) \cap Y = \emptyset$ $n+1 \leq Y$

X induktivní $\cancel{n+1 \in Y}$ $\min Y = n+1$

$X = \mathbb{N}$ $n+1 < Y$

7. $x \in \mathbb{R}$ $\exists n \in \mathbb{N}$ $n > x$

$X = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \mathbb{N}\}$ $\mathbb{N} \leq X$

$x \in \mathbb{R}$ $\mathbb{N} \leq x \leq X$ kdyby $x \in \mathbb{N}$ $x+1 \in \mathbb{N}$

$x \notin \mathbb{N} \Rightarrow x-1 \notin \mathbb{N}$ $x \notin \mathbb{N}$

$(x-1, x) \cap \mathbb{N} = \emptyset$

$\mathbb{N} < x-1 \in X$ spor $x \leq X$

$\{1,\dots,n\} = \{m \in \mathbb{N} \mid m \leq n\}$

A konečná $\exists n \in \mathbb{N}$ A má n prvků

nebo $A = \emptyset$

Jinak A je nekonečná

$(x_1,\dots,x_n) = (x_1',\dots,x_n') \Leftrightarrow x_i = x_i' \quad \forall i \in \{1,\dots,n\}$

$X_1,\dots,X_n \qquad X_1 \times \dots \times X_n = \{(x_1,\dots,x_n) \mid x_i \in X_i\}$

$pr_i(x_1,\dots,x_n) = x_i \qquad pr_i : X_1 \times \dots \times X_n \to X_i$

$a : \mathbb{N} \to X \qquad (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \qquad a_n = a(n)$

Racionální a iracionální

$\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$ – Celá čísla

$\mathbb{Q} = \{ p \cdot q^{-1} \mid p \in \mathbb{Z} \text{ a } q \in \mathbb{N} \}$

Racionální čísla $p \cdot q^{-1} = \frac{p}{q}$

$\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ Iracionální čísla

Věta 2.11 V každém intervalu délky větší než 1 leží celé číslo.

Důkaz.: (x, y) $y - x > 1$

1) $x \geq 1$ $X = \{ n \in \mathbb{N} \mid n \geq x \}$

$p = \min X$ $p \notin (x, y)$

$x \leq p - 1 \in X$ spor s $p = \min X$

$x < 0, y > 0$ $(x, y) \ni 0$ $p \in (x, y)$

$x, y < 0$ $(-y, -x) \ni n$ $p = -n$

$-y < n < -x$ $p \in (x, y)$

$y > -n = p > x$

Věta 2.12 V každém neprázdném otevřeném intervalu leží racionální číslo.

Důkaz $(x,y) \ni \frac{p}{q}$ $\underline{x < y} \Rightarrow \underline{y-x} > 0$

$p \cdot q^{-1} \in \mathbb{Q}$ $x < p \cdot q^{-1} < y$ ✓

$xq < p < yq$ ✓

$\mathbb{Z} \ni p \in (xq, yq)$

$yq - xq > 1$

$q(y-x) > 1$

$\mathbb{N} \ni q > \frac{1}{y-x} \in \mathbb{R}$

$q \in \mathbb{N}$ existuje podle Archimedovy vlastnosti

Funkce reálné proměnné.

Funkce $f: X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$

$f: X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

ohraničená na $X' \subset X$ $f(X')$

Minimum, maximum supremum infimum

$\min f(X')$ $\max f(X')$ $\sup f(X')$ $\inf f(X')$

f nabývá minima v $x \in X$ $f(x) = \min_{x \in X'} f(x)$

f je rostoucí (klesající, nerostoucí, neklesající)

na množině $X' \subset X$ $\forall x, y \in X'$ $x < y$

$f(x) < f(y)$ $f(x) > f(y)$ $f(x) \geq f(y)$ $f(x) \leq f(y)$

f je konvexní (konkávní) na intervalu $I \subset X$

$\forall x < y < z$ $x, y, z \in I$

$f(x)(z-y) + f(y)$

$f: X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$X' \subset X$ $\quad y = \max_{x \in X'} f(x) = \max f(X')$

$y \geq f(X')$ a $y \in f(X')$

$(0,1) = X'$ $\quad x \in X'$ $\underbrace{f(x) = y}_{f(x) = \max f(X')}$

$f = id_{\mathbb{R}}$ $\quad \sup_{x \in (0,1)} id_{\mathbb{R}} =$

$= \sup id_{\mathbb{R}}(0,1) = \sup (0,1) = 1$

$f: X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sudá jestliže

$\forall x \in X$ platí jednak $-x \in X$ $f(-x) = f(x)$

lichá

$\forall x \in X$

$-x \in X$ $f(-x) = -f(x)$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je afinní když existují čísla

$a, b \in \mathbb{R}$ současně obě nejsou rovna nule

$f(x) = a \cdot x + b$ $\forall x \in \mathbb{R}$.