Věta 2.3: 1. $0 \cdot x = 0$

2. 0 nemá vzhledem k násobení inverzi

3. $(-1) \cdot x = -x$

Důkaz: 1. $0 + 0 = 0$

$$\underbrace{0 \cdot x}_{y} = (0+0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x \qquad \underbrace{y + y = y}$$

$$y = 0 + y = (y - y) + y = y + y - y = y - y = 0$$

2. $0 \cdot 0^{-1} = 0$

$0 \cdot 0^{-1} = 1$ ↯

3. $x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1)x = \underbrace{(1 + (-1))}_{0} x \cdot x = 0$

Uspořádání $\leq$ je úplné $\forall x, y$ platí buď $x \leq y$ nebo $y \leq x$

Uspořádání $\leq$ je kompatibilní s operací v X

$z \quad x \leq y \qquad x + z \leq y + z \qquad (2.2.1)$

když $0 \leq x$, $0 \leq y$ potom $0 \leq xy \qquad (2.2.2)$

Věta 2.4 V každém uspořádaném poli Xplatí

1. $0 < 1$
2. $x+z \leq y+z$ plyne $x \leq y$
3. $0 < x$ potom $0 < x^{-1}$
4. je-li $0 \leq z$ tak $x \leq y$ plyne $x \cdot z \leq y \cdot z$

Důkaz $0 < 1$ $\qquad \underline{1 \leq 0}$ $\qquad x=1, y=0, z=-1$

$$x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z$$

$$1 \leq 0 \Rightarrow 1+(-1) \leq 0+(-1)$$

$0 \leq x, 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq xy \qquad 0 \leq (-1)$

$0 \leq -1, 0 \leq -1 \Rightarrow 0 \leq (-1)(-1) = 1$

$$0 \leq 1 \qquad 0 < 1$$

2. $x+z \leq y+z$ plyne $x \leq y$

$$x+z+(-z) \leq y+z+(-z)$$

$$x+0 \leq y+0 \ldots x \leq y$$

4. je-li $0<z$ $\quad x\leq y \iff xz\leq yz$

$\Longrightarrow$ $x\leq y$

$0=x-x\leq y-x \quad \ldots \quad 0\leq (y-x)\cdot z = yz-xz$

$0+xz\leq yz-xz+xz$

$xz\leq yz$

3. $0<x \Rightarrow 0<x^{-1}$

$\exists\, 0<x,\ x^{-1}\leq 0$ podle bodu 4„$\Longrightarrow$"

$1=x^{-1}\cdot x\leq 0\cdot x=0$ spor!

4. $\Longleftarrow$ víme $0<z$ a $x\cdot z\leq y\cdot z \ldots$ $0\leq yz-xz$

$0<z$ podle 3. $0<z^{-1}$ $\quad$ $\underbrace{0<z^{-1}}_{(2.2.2)}$

$0\leq (yz-xz)\cdot z^{-1}=y-x$

$x\leq y$

$x,y\in X$ rozdíl $x-y=x+(-y)$

$x\in X, y\in X\setminus\{0\}$ podíl $x/y=x\cdot y^{-1}$

(x,y) otevřený interval $=\{z\in X \mid x<z<y\}$

$[x,y]$ $\quad x\leq z\leq y$

$(-\infty,x)=\{z\in X\mid z<x\}$

(x,∞)

$Y,Z\subset X$ $\quad Y\leq Z$ $\quad \forall y\in Y, z\in Z\ \ y\leq z$

$y\leq z$

REÁLNÁ ČÍSLA

X je <u>spojitě uspořádané</u> $\forall Y, Z \subset X$
$Y \leq Z$ existuje $x \in X$ takový, že $Y \leq x \leq Z$.

$\mathbb{R}$

Věta 2.5 O supremu: Každá neprázdná shora ohraničená podmnožina $\mathbb{R}$ má supremum.

Důkaz: $Y \subset \mathbb{R}$ neprázdná shora ohraničená

$Z = \{ z \in \mathbb{R} \mid Y \leq z \}$ – množina horních závor

$Y \leq Z$ existuje $x \in \mathbb{R}$ $Y \leq x \leq Z$

$x = \sup Y$

$[x, y] \subset \mathbb{R}$ $\quad \sup[x,y] = \max[x,y] = y$

$(x, y) \subset \mathbb{R}$ $\quad (x,y) \leq y \leq [y, \infty)$

Věta 2.7

$z = \sup X \iff \forall y \in \mathbb{R}\ y < z\ \exists x \in X$ takový, že

$y \le x \le z$

Důkaz: $\Rightarrow$ $y < z$ kdyby $(y, z) \cap X = \emptyset$

potom $X \le y$ y by byla horní závora X

spor s tím z nejmenší horní závora.

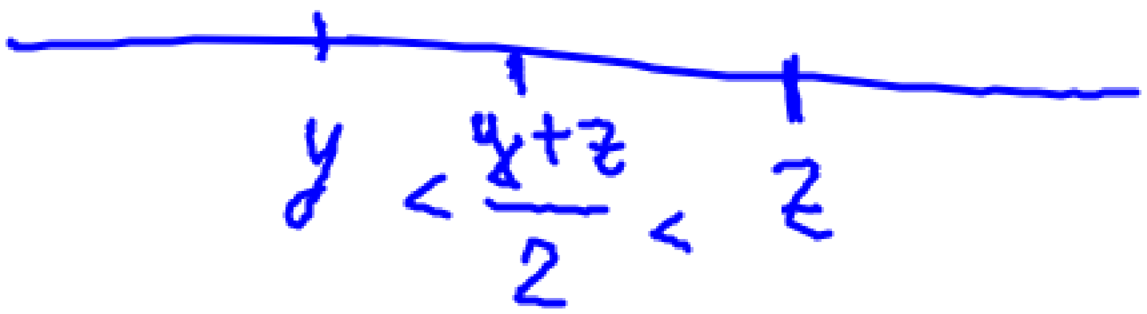
$\Leftarrow$ $x \le z$ z horní závora X

$y < z$ byla horní závorou, pak existuje $x \in X$

$y \le x \le z$

$$y < \frac{y+z}{2} < z$$

$$y < \frac{y+z}{2} \le x \le z$$



Přirozená čísla

$X \subset \mathbb{R}$ je induktivní $1 \in X$ a z toho, že $x \in X$ vyplývá $x+1 \in X$

Příklady $\mathbb{R}$, $[0,\infty)$ $[1,\infty)$

Lemma 2.9 Průnik systému induktivních množin je induktivní

Důkaz: S - systém $\cap S \ni 1$

- $A \in S$ $1 \in A$ $\forall A \in S$ $1 \in \cap S$
- $x \in \cap S \Rightarrow x+1 \in \cap S$

$\forall A \in S$ platí $x \in A$, $x+1 \in A$ $x+1 \in \cap S$

$\mathbb{N}$ - přirozená čísla - průnik induktivních podmnožin $\mathbb{R}$

Věta 2.10 1. $\mathbb{N}$ je induktivní

2. pokud $X \subset \mathbb{N}$ a X je induktivní $X = \mathbb{N}$