- množina $Z \subset X \times X$

σ: relace na X $Z = Gr\,\sigma$

$x, y \in X$ $(x, y) \in Gr$ $x \sigma y$

$\exp Z$ $X \subset Y$, $X, Y \in \exp Z$

σ - relace na X

reflexivní $\iff$ $\forall x \in X$ platí $x \sigma x$

symetrická $\iff$ z $x \sigma y$ plyne $y \sigma x$

antisymetrická $\iff$ z $x \sigma y$ a $y \sigma x$ plyne $x = y$

tranzitivní $\iff$ z $x \sigma y$ a $y \sigma z$ plyne $x \sigma z$,

ekvivalence když je reflexivní, symetrická a trazitivní

uspořádání $\iff$ reflexivní antisymetrická a tranzitivní

X

$X = \{a, b, c\}$ $\exp X = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{c,a\}, \{a,b,c\}\}$

$X \quad S \subset \exp X$ 1. $\emptyset \notin S$ ✓

2. $\forall \underline{X, Y} \in S$ platí $X \cap Y = \emptyset$

3. $\bigcup S = X$

$X = \{a, b, c\}$

$S = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$

$S = \{\{a, b\}, \{c\}\}$

$S = \{\{a, b, c\}\}$

$X, \sim$ ekvivalence

$$[x]_\sim = \{\underline{y \in X \mid x \sim y}\} \qquad (1.5.2)$$

Věta 1.6 Systém definovaný (1.5.2) je rozklad X.

Důkaz:

1. $\emptyset \notin S$? $\quad [x]_\sim \ni x$ musel by platit že $x \sim x$

2. $\underline{[x]_\sim} \neq \underline{[y]_\sim} \Rightarrow [x]_\sim \cap [y]_\sim$

$z \in [x]_\sim \cap [y]_\sim \quad x \sim z,\ y \sim z$

$z \sim y$ — $x \sim y$

3. $\bigcup S = X$ „$\subset$"

„$\supset$"

$x \in X \qquad [x]_\sim \qquad \bigcup\{[x]_\sim \mid x \in X\}$

$= X$

X $\quad S$ - rozklad S

$$x \sim y \iff [x]_S = [y]_S \qquad (1.5.1)$$

Věta 1.7 Relace definovaná vztahem (1.5.1) je relace ekvivalence.

Důkaz $\sim$

$X, \leqslant \quad Y \subset X$

$x \in X$ je horní závora Y $\forall y \in Y$ $y \leqslant x$

dolní závora $x \leqslant y$

minimum Y, x je dolní závora a $x \in Y$

maximum Y, x je horní závora a $x \in Y$

$\sup Y$ suprémum množiny Y nejmenší horní závora

$\inf Y$ infimum množiny Y největší dolní závoru Y

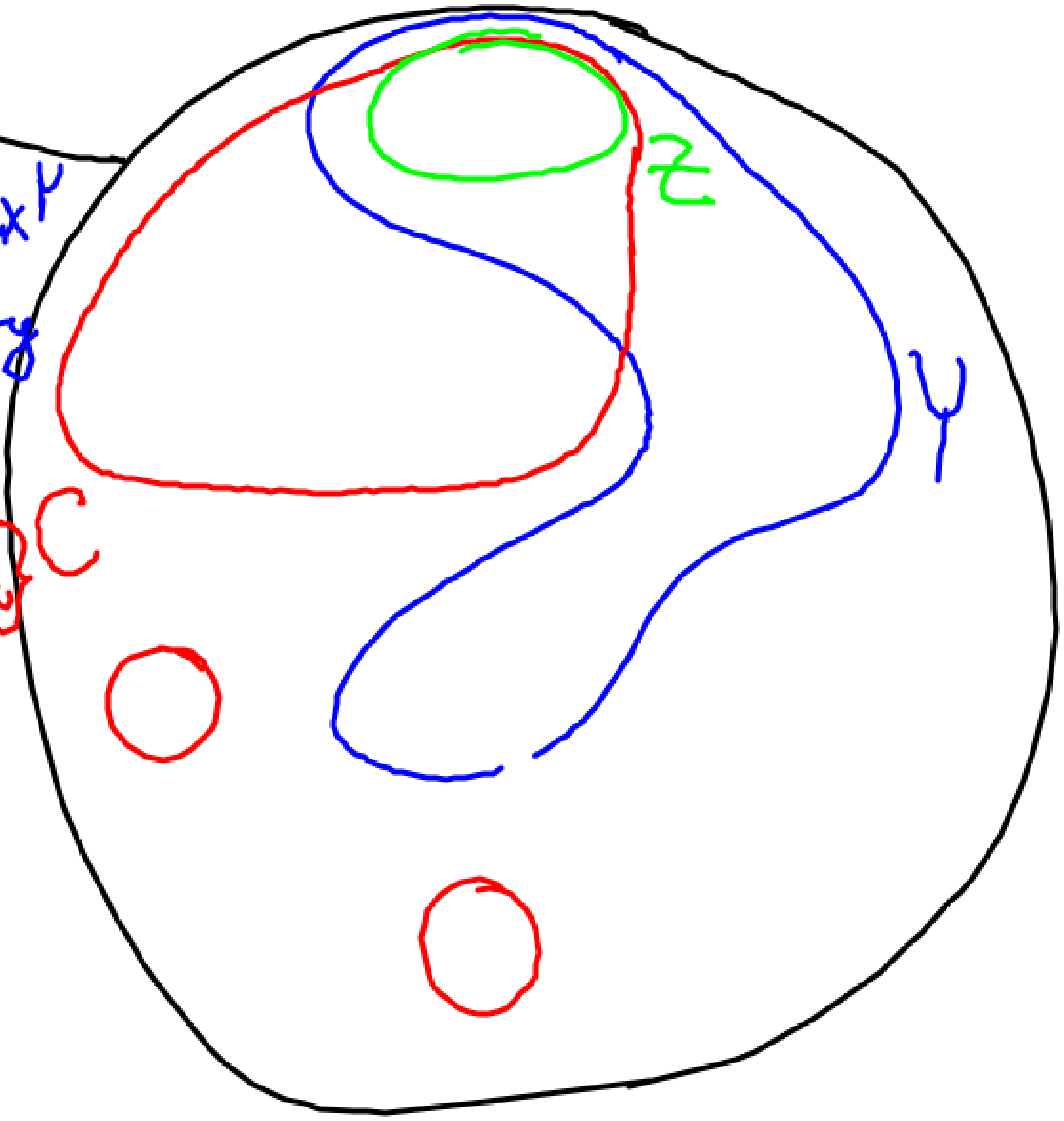
X

$\{a,b,c\} = \max Y$

dolní závory

$\{b\}, \emptyset$

$\inf C = \{a\}$



$X \quad * : X \times X \longrightarrow X$ binární operace

<u>komutativní</u> $\forall x, y \in X \quad x * y = y * x$

<u>asociativní</u> $\forall x, y, z \in X \quad (x * y) * z = x * (y * z)$

$e \in X$ je <u>neutrální prvek</u> vzhledem k $*$

$\forall x \in X$

$$x * e = x$$
$$e * x = x$$

Věta 2.1 každá binární operace má nejvýše jeden neutrální prvek

Důk.: e_1, e_2 dva neutrální prvky

$$e_1 = e_1 * e_2 = e_2$$

Řekneme, že y je <u>inverzní</u> k x

$$y * x = e$$
$$x * y = e$$

Věta 2.2 Každý prvek má nejvýše jedinu inverzi

$*$ je asociativní

Důkaz $x \in X$ a nechť y_1, y_2 jsou dvě inverze x

$x * y_1 = e = \underline{y_1 * x}$

$x * y_2 = e = y_2 * x$

$$y_1 = y_1 * e = y_1 * (x * y_2) =$$
$$= (y_1 * x) * y_2 = e * y_2$$
$$= y_2$$