Taylorův vzorec

Buď f funkce, $a \in \mathrm{Dom} f$. Nechť funkce f má v bodě a derivaci až do řádu m. Potom se polynom

$$T_m(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

nazývá Taylorův polynom stupně m funkce f v bodě a.

Je-li $a=0$, nazývá se tento polynom Maclaurinův.

$$F(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(m)}(0)}{m!}x^m$$

Věta: Buď f funkce, $a \in \mathrm{Dom} f$, $m \in \mathbb{N}$. Nechť existuje okolí $O(a)$ bodu a takové, že funkce f má $(m+1)$-tou derivaci v každém bodě $\not O(a)$. Buď $x \in O(a)$.
Pak existuje $c \in (a,x)$ (případně $c \in (x,a)$) takové, že

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m + \underbrace{\frac{f^{(m+1)}(c)}{(m+1)!}(x-a)^{m+1}}_{= R_m(x)}$$

Poznámka: Číslo c lze zapsat ve tvaru $c = a + \xi(x-a)$, $\xi \in (0,1)$)

Tato věta slouží k přibližnému výpočtu funkčních hodnot.

Příklad: Odhadněte číslo e s chybou menší než 10^{-5}.

Musíme zjistit kolik členů Taylorovy řady je potřeba, abychom dosáhli požadované přesnosti.

Označme $f(x) = e^x$, zajímá nás $f(1)$ s chybou menší než 10^{-5}.

Maclaurinův rozvoj funkce f:

$$f'(x) = (e^x)' = e^x \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = (e^x)' = e^x \qquad f''(0) = 1$$

$$\dots \qquad \vdots$$

$$f^{(m)}(x) = (e^x)' = e^x \qquad f^{(m)}(0) = 1$$

$$F(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(m)}(0)}{m!}x^m$$

$$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^m}{m!}$$

Podle předchozí věty $\exists\, c = \xi x$, $\xi \in (0,1)$ takové, že

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^m}{m!} + R_m(x)$$

$$R_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(c)}{(m+1)!} \cdot x^{m+1} = \frac{f^{(m+1)}(\xi x)}{(m+1)!} \cdot x^{m+1} =$$

$$= \frac{e^{\xi x}}{(m+1)!} \cdot x^{m+1} \qquad \xi \in (0,1) \Rightarrow 0 < \xi x < x$$

$$\Rightarrow e^{\xi x} < e^x$$

Tedy pro $x > 0$: $\quad R_m(x) = \dfrac{e^{\xi x}}{(m+1)!}x^{m+1} < \dfrac{e^x}{(m+1)!}x^{m+1}$

pro $x = 1$: $\quad R_m(1) < \dfrac{e}{(m+1)!}$

Protože víme, že $e < 3$: $\quad R_m(1) < \dfrac{3}{(m+1)!}$

Teď budeme zjišťovat, pro jaké m je $R_m(1) < 10^{-5}$

$$R_1(1) = \frac{3}{2} > 10^{-5}$$

$$R_2(1) = \frac{3}{3!} > 10^{-5}$$

$$\dots$$

$$R_7(1) = \frac{3}{8!} = 7{,}44 \cdot 10^{-5} > 10^{-5}$$

$$\underline{R_8(1)} = \frac{3}{9!} = 8{,}267 \cdot 10^{-6} \ \underline{< 10^{-5}}$$

Teď uvážíme rozvoj až do řádu 8.

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} = \underline{\underline{2{,}71827877}}$$