Michaela Čiklová, Veronika Kurková

Řady funkcí

Nechť $X \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ mějme funkci $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$.

Řady funkcí

Nechť $X \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ mějme funkci $f_n : X \to \mathbb{R}$.

- Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ nazveme nekonečnou řadou funkcí.

Řady funkcí

Nechť $X \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ mějme funkci $f_n : X \to \mathbb{R}$.

- Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ nazveme nekonečnou řadou funkcí.
- Funkci $h_n : X \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$h_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$$

nazýváme *n-tý částečný součet* řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Řady funkcí

Nechť $X \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ mějme funkci $f_n : X \to \mathbb{R}$.

- Symbol $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ nazveme nekonečnou řadou funkcí.
- Funkci $h_n : X \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$h_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$$

  nazýváme n-tý částečný součet řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$.

Jestliže na množině $Y \subset X$ konverguje bodově (stejnoměrně) k funkci f posloupnost (h_n) částečných součtů, říkáme že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje bodově (stejnoměrně) k funkci f na množině Y.

Obor konvergence

Příklad

Najděte obor konvergence řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(3x)}{n}$.

Obor konvergence

Příklad

Najděte obor konvergence řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(3x)}{n}$.

Řešení

Obor konvergence

Příklad

Najděte obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(3x)}{n}$.

Řešení

Položme $f_n(x) = \frac{\ln^n(3x)}{n}$.

Obor konvergence

Příklad

Najděte obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(3x)}{n}$.

Řešení

Položme $f_n(x) = \frac{\ln^n(3x)}{n}$. Všechny funkce f_n jsou definovány na intervalu $(0, \infty)$.

Obor konvergence

Příklad

Najděte obor konvergence řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(3x)}{n}$.

Řešení

Položme $f_n(x) = \dfrac{\ln^n(3x)}{n}$. Všechny funkce f_n jsou definovány na intervalu $(0, \infty)$. Zajíma nás, pro která x z tohoto intervalu daná řada konverguje.

Obor konvergence

Příklad

Najděte obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(3x)}{n}$.

Řešení

Položme $f_n(x) = \frac{\ln^n(3x)}{n}$. Všechny funkce f_n jsou definovány na intervalu $(0, \infty)$. Zajíma nás, pro která x z tohoto intervalu daná řada konverguje.

Použijeme limitní odmocninové kritérium:

Obor konvergence

Příklad

Najděte obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(3x)}{n}$.

Řešení

Položme $f_n(x) = \frac{\ln^n(3x)}{n}$. Všechny funkce f_n jsou definovány na intervalu $(0, \infty)$. Zajíma nás, pro která x z tohoto intervalu daná řada konverguje.

Použijeme limitní odmocninové kritérium:

Jestliže je pro řadu s $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nezápornými členy

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, potom konverguje,
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, potom diverguje.

Obor konvergence

Příklad

Najděte obor konvergence řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(3x)}{n}$.

Řešení

Položme $f_n(x) = \dfrac{\ln^n(3x)}{n}$. Všechny funkce f_n jsou definovány na intervalu $(0, \infty)$. Zajíma nás, pro která x z tohoto intervalu daná řada konverguje.

Použijeme limitní odmocninové kritérium:

Jestliže je pro řadu s $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nezápornými členy

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, potom konverguje,
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, potom diverguje.

Uvažujme řadu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$.

Obor konvergence

Příklad

Najděte obor konvergence řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(3x)}{n}$.

Řešení

Položme $f_n(x) = \dfrac{\ln^n(3x)}{n}$. Všechny funkce f_n jsou definovány na intervalu $(0, \infty)$. Zajíma nás, pro která x z tohoto intervalu daná řada konverguje.

Použijeme limitní odmocninové kritérium:

Jestliže je pro řadu s $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nezápornými členy

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, potom konverguje,
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, potom diverguje.

Uvažujme řadu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$. Jestliže je pro $x \in (0, \infty)$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} < 1$, konverguje v tomto bodě řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ absolutně,

Obor konvergence

Příklad

Najděte obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(3x)}{n}$.

Řešení

Položme $f_n(x) = \frac{\ln^n(3x)}{n}$. Všechny funkce f_n jsou definovány na intervalu $(0, \infty)$. Zajíma nás, pro která x z tohoto intervalu daná řada konverguje.

Použijeme limitní odmocninové kritérium:

Jestliže je pro řadu s $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nezápornými členy

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, potom konverguje,
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, potom diverguje.

Uvažujme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$. Jestliže je pro $x \in (0, \infty)$

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} < 1$, konverguje v tomto bodě řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ absolutně,
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} > 1$, potom i $\lim_{n\to\infty} |f_n(x)| > 1$ a tedy není splněna nutná podmínka konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, tj. $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln^n(3x)}{n} \neq 0$.

Obor konvergence

Příklad

Najděte obor konvergence řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(3x)}{n}$.

Řešení

Položme $f_n(x) = \dfrac{\ln^n(3x)}{n}$. Všechny funkce f_n jsou definovány na intervalu $(0, \infty)$. Zajíma nás, pro která x z tohoto intervalu daná řada konverguje.

Použijeme limitní odmocninové kritérium:

Jestliže je pro řadu s $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nezápornými členy

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, potom konverguje,
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, potom diverguje.

Uvažujme řadu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$. Jestliže je pro $x \in (0, \infty)$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} < 1$, konverguje v tomto bodě řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ absolutně,
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} > 1$, potom i $\lim_{n\to\infty} |f_n(x)| > 1$ a tedy není splněna nutná podmínka konvergence řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln^n(3x)}{n} \neq 0$.

Musíme tedy určit, jakých hodnot pro různá $x \in (0, \infty)$ nabývá $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|}$.

Obor konvergence

Příklad

Najděte obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(3x)}{n}$.

Řešení

Položme $f_n(x) = \frac{\ln^n(3x)}{n}$. Všechny funkce f_n jsou definovány na intervalu $(0, \infty)$. Zajíma nás, pro která x z tohoto intervalu daná řada konverguje.

Použijeme limitní odmocninové kritérium: $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = ?$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} =$$

Obor konvergence

Příklad

Najděte obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(3x)}{n}$.

Řešení

Položme $f_n(x) = \frac{\ln^n(3x)}{n}$. Všechny funkce f_n jsou definovány na intervalu $(0, \infty)$. Zajíma nás, pro která x z tohoto intervalu daná řada konverguje.

Použijeme limitní odmocninové kritérium: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = ?$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|\ln^n(3x)|}{n}} =$$

Obor konvergence

Příklad

Najděte obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(3x)}{n}$.

Řešení

Položme $f_n(x) = \frac{\ln^n(3x)}{n}$. Všechny funkce f_n jsou definovány na intervalu $(0, \infty)$. Zajíma nás, pro která x z tohoto intervalu daná řada konverguje.

Použijeme limitní odmocninové kritérium: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = ?$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|\ln^n(3x)|}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\ln(3x)|}{\sqrt[n]{n}} =$$

Obor konvergence

Příklad

Najděte obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(3x)}{n}$.

Řešení

Položme $f_n(x) = \frac{\ln^n(3x)}{n}$. Všechny funkce f_n jsou definovány na intervalu $(0, \infty)$. Zajíma nás, pro která x z tohoto intervalu daná řada konverguje.

Použijeme limitní odmocninové kritérium: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = |\ln(3x)|$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|\ln^n(3x)|}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\ln(3x)|}{\sqrt[n]{n}} = |\ln(3x)|$$

Obor konvergence

Příklad

Najděte obor konvergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(3x)}{n}$.

Řešení

Položme $f_n(x) = \frac{\ln^n(3x)}{n}$. Všechny funkce f_n jsou definovány na intervalu $(0, \infty)$. Zajíma nás, pro která x z tohoto intervalu daná řada konverguje.

Použijeme limitní odmocninové kritérium: $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = |\ln(3x)|$

- řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ absolutně konverguje, jestliže $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = |\ln(3x)| < 1$

Obor konvergence

Příklad

Najděte obor konvergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(3x)}{n}$.

Řešení

Položme $f_n(x) = \frac{\ln^n(3x)}{n}$. Všechny funkce f_n jsou definovány na intervalu $(0, \infty)$. Zajíma nás, pro která x z tohoto intervalu daná řada konverguje.

Použijeme limitní odmocninové kritérium: $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = |\ln(3x)|$

- řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ absolutně konverguje, jestliže $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = |\ln(3x)| < 1$

Vyřešíme nerovnici $|\ln(3x)| < 1$:

Obor konvergence

Příklad

Najděte obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(3x)}{n}$.

Řešení

Položme $f_n(x) = \frac{\ln^n(3x)}{n}$. Všechny funkce f_n jsou definovány na intervalu $(0, \infty)$. Zajíma nás, pro která x z tohoto intervalu daná řada konverguje.

Použijeme limitní odmocninové kritérium: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = |\ln(3x)|$

- řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ absolutně konverguje, jestliže $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = |\ln(3x)| < 1$

Vyřešíme nerovnici $|\ln(3x)| < 1$:

$$-1 < \ln(3x) < 1$$

Obor konvergence

Příklad

Najděte obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(3x)}{n}$.

Řešení

Položme $f_n(x) = \frac{\ln^n(3x)}{n}$. Všechny funkce f_n jsou definovány na intervalu $(0, \infty)$. Zajíma nás, pro která x z tohoto intervalu daná řada konverguje.

Použijeme limitní odmocninové kritérium: $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = |\ln(3x)|$

- řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ absolutně konverguje, jestliže $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = |\ln(3x)| < 1$

Vyřešíme nerovnici $|\ln(3x)| < 1$:

$$-1 < \ln(3x) < 1$$

$$\mathrm{e}^{-1} < 3x < \mathrm{e}$$

Obor konvergence

Příklad

Najděte obor konvergence řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(3x)}{n}$.

Řešení

Položme $f_n(x) = \dfrac{\ln^n(3x)}{n}$. Všechny funkce f_n jsou definovány na intervalu $(0, \infty)$. Zajíma nás, pro která x z tohoto intervalu daná řada konverguje.

Použijeme limitní odmocninové kritérium: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = |\ln(3x)|$

- řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ absolutně konverguje, jestliže $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = |\ln(3x)| < 1$

Vyřešíme nerovnici $|\ln(3x)| < 1$:

$$
\begin{aligned}
-1 &< \ln(3x) < 1 \\
\mathrm{e}^{-1} &< 3x < \mathrm{e} \\
\frac{1}{3\,\mathrm{e}} &< x < \frac{\mathrm{e}}{3}
\end{aligned}
$$

Obor konvergence

Příklad

Najděte obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(3x)}{n}$.

Řešení

Položme $f_n(x) = \frac{\ln^n(3x)}{n}$. Všechny funkce f_n jsou definovány na intervalu $(0, \infty)$. Zajíma nás, pro která x z tohoto intervalu daná řada konverguje.

Použijeme limitní odmocninové kritérium: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = |\ln(3x)|$

- řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ absolutně konverguje, jestliže $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = |\ln(3x)| < 1$, tedy pro $x \in \left(\frac{1}{3\,\mathrm{e}}, \frac{\mathrm{e}}{3}\right)$,

Vyřešíme nerovnici $|\ln(3x)| < 1$:

$$
\begin{aligned}
-1 &< \ln(3x) < 1 \\
\mathrm{e}^{-1} &< 3x < \mathrm{e} \\
\frac{1}{3\,\mathrm{e}} &< x < \frac{\mathrm{e}}{3}
\end{aligned}
$$

Obor konvergence

Příklad

Najděte obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(3x)}{n}$.

Řešení

Položme $f_n(x) = \frac{\ln^n(3x)}{n}$. Všechny funkce f_n jsou definovány na intervalu $(0, \infty)$. Zajíma nás, pro která x z tohoto intervalu daná řada konverguje.

Použijeme limitní odmocninové kritérium: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = |\ln(3x)|$

- řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ absolutně konverguje, jestliže $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = |\ln(3x)| < 1$, tedy pro $x \in \left(\frac{1}{3\,\mathrm{e}}, \frac{\mathrm{e}}{3}\right)$,
- řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ diverguje, jestliže $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f_n(x)} = |\ln(3x)| > 1$

Obor konvergence

Příklad

Najděte obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(3x)}{n}$.

Řešení

Položme $f_n(x) = \frac{\ln^n(3x)}{n}$. Všechny funkce f_n jsou definovány na intervalu $(0, \infty)$. Zajíma nás, pro která x z tohoto intervalu daná řada konverguje.

Použijeme limitní odmocninové kritérium: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = |\ln(3x)|$

- řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ absolutně konverguje, jestliže $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = |\ln(3x)| < 1$, tedy pro $x \in \left(\frac{1}{3\,\mathrm{e}}, \frac{\mathrm{e}}{3}\right)$,
- řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ diverguje, jestliže $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f_n(x)} = |\ln(3x)| > 1$

Vyřešíme nerovnici $|\ln(3x)| > 1$:

Obor konvergence

Příklad

Najděte obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(3x)}{n}$.

Řešení

Položme $f_n(x) = \frac{\ln^n(3x)}{n}$. Všechny funkce f_n jsou definovány na intervalu $(0, \infty)$. Zajíma nás, pro která x z tohoto intervalu daná řada konverguje.

Použijeme limitní odmocninové kritérium: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = |\ln(3x)|$

- řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ absolutně konverguje, jestliže $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = |\ln(3x)| < 1$, tedy pro $x \in \left(\frac{1}{3\,\mathrm{e}}, \frac{\mathrm{e}}{3}\right)$,
- řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ diverguje, jestliže $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f_n(x)} = |\ln(3x)| > 1$

Vyřešíme nerovnici $|\ln(3x)| > 1$:

$$-1 > \ln(3x) \quad \vee \quad \ln(3x) > 1$$

Obor konvergence

Příklad

Najděte obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(3x)}{n}$.

Řešení

Položme $f_n(x) = \frac{\ln^n(3x)}{n}$. Všechny funkce f_n jsou definovány na intervalu $(0, \infty)$. Zajíma nás, pro která x z tohoto intervalu daná řada konverguje.

Použijeme limitní odmocninové kritérium: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = |\ln(3x)|$

- řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ absolutně konverguje, jestliže $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = |\ln(3x)| < 1$, tedy pro $x \in \left(\frac{1}{3\,\mathrm{e}}, \frac{\mathrm{e}}{3}\right)$,
- řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ diverguje, jestliže $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f_n(x)} = |\ln(3x)| > 1$

Vyřešíme nerovnici $|\ln(3x)| > 1$:

$$-1 > \ln(3x) \quad \vee \quad \ln(3x) > 1$$

$$\mathrm{e}^{-1} > 3x \quad \vee \quad 3x > \mathrm{e}$$

Obor konvergence

Příklad

Najděte obor konvergence řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(3x)}{n}$.

Řešení

Položme $f_n(x) = \dfrac{\ln^n(3x)}{n}$. Všechny funkce f_n jsou definovány na intervalu $(0, \infty)$. Zajíma nás, pro která x z tohoto intervalu daná řada konverguje.

Použijeme limitní odmocninové kritérium: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = |\ln(3x)|$

- řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ absolutně konverguje, jestliže $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = |\ln(3x)| < 1$, tedy pro $x \in \left(\dfrac{1}{3\,\mathrm{e}}, \dfrac{\mathrm{e}}{3}\right)$,
- řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ diverguje, jestliže $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f_n(x)} = |\ln(3x)| > 1$

Vyřešíme nerovnici $|\ln(3x)| > 1$:

$$\begin{aligned} -1 &> \ln(3x) &\quad\vee\quad&& \ln(3x) &> 1 \\ \mathrm{e}^{-1} &> 3x &\quad\vee\quad&& 3x &> \mathrm{e} \\ \frac{1}{3\,\mathrm{e}} &> x &\quad\vee\quad&& x &> \frac{\mathrm{e}}{3} \end{aligned}$$

Obor konvergence

Příklad

Najděte obor konvergence řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(3x)}{n}$.

Řešení

Položme $f_n(x) = \dfrac{\ln^n(3x)}{n}$. Všechny funkce f_n jsou definovány na intervalu $(0, \infty)$. Zajíma nás, pro která x z tohoto intervalu daná řada konverguje.

Použijeme limitní odmocninové kritérium: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = |\ln(3x)|$

- řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ absolutně konverguje, jestliže $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = |\ln(3x)| < 1$, tedy pro $x \in \left(\frac{1}{3\,\mathrm{e}}, \frac{\mathrm{e}}{3}\right)$,
- řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ diverguje, jestliže $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f_n(x)} = |\ln(3x)| > 1$, tedy pro $x \in \left(0, \frac{1}{3\,\mathrm{e}}\right) \cup \left(\frac{\mathrm{e}}{3}, +\infty\right)$.

Vyřešíme nerovnici $|\ln(3x)| > 1$:

$$\begin{array}{rcl}
-1 > \ln(3x) & \vee & \ln(3x) > 1 \\
\mathrm{e}^{-1} > 3x & \vee & 3x > \mathrm{e} \\
\dfrac{1}{3\,\mathrm{e}} > x & \vee & x > \dfrac{\mathrm{e}}{3}
\end{array}$$

Obor konvergence

Příklad

Najděte obor konvergence řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(3x)}{n}$.

Řešení

Položme $f_n(x) = \dfrac{\ln^n(3x)}{n}$. Všechny funkce f_n jsou definovány na intervalu $(0, \infty)$. Zajíma nás, pro která x z tohoto intervalu daná řada konverguje.

Použijeme limitní odmocninové kritérium: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = |\ln(3x)|$

- řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ absolutně konverguje, jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = |\ln(3x)| < 1$, tedy pro $x \in \left(\dfrac{1}{3\,\mathrm{e}}, \dfrac{\mathrm{e}}{3}\right)$,
- řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ diverguje, jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{f_n(x)} = |\ln(3x)| > 1$, tedy pro $x \in \left(0, \dfrac{1}{3\,\mathrm{e}}\right) \cup \left(\dfrac{\mathrm{e}}{3}, +\infty\right)$.

Případ, kdy $|\ln(3x)| = 1$, vyřešíme zvlášť.

Obor konvergence

Příklad

Najděte obor konvergence řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(3x)}{n}$.

Řešení

Položme $f_n(x) = \dfrac{\ln^n(3x)}{n}$. Všechny funkce f_n jsou definovány na intervalu $(0, \infty)$. Zajíma nás, pro která x z tohoto intervalu daná řada konverguje.

- Jestliže $\ln(3x) = 1$, tj. jestliže $x = \dfrac{\mathrm{e}}{3}$,

Obor konvergence

Příklad

Najděte obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(3x)}{n}$.

Řešení

Položme $f_n(x) = \frac{\ln^n(3x)}{n}$. Všechny funkce f_n jsou definovány na intervalu $(0, \infty)$. Zajíma nás, pro která x z tohoto intervalu daná řada konverguje.

- Jestliže $\ln(3x) = 1$, tj. jestliže $x = \frac{\mathrm{e}}{3}$, pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(3x)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n}$$

Obor konvergence

Příklad

Najděte obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(3x)}{n}$.

Řešení

Položme $f_n(x) = \frac{\ln^n(3x)}{n}$. Všechny funkce f_n jsou definovány na intervalu $(0, \infty)$. Zajíma nás, pro která x z tohoto intervalu daná řada konverguje.

- Jestliže $\ln(3x) = 1$, tj. jestliže $x = \frac{\mathrm{e}}{3}$, pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(3x)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Obor konvergence

Příklad

Najděte obor konvergence řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(3x)}{n}$.

Řešení

Položme $f_n(x) = \dfrac{\ln^n(3x)}{n}$. Všechny funkce f_n jsou definovány na intervalu $(0, \infty)$. Zajíma nás, pro která x z tohoto intervalu daná řada konverguje.

- Jestliže $\ln(3x) = 1$, tj. jestliže $x = \dfrac{\mathrm{e}}{3}$, pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(3x)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Podle integrálního kritéria jsme ukázali, že tato řada diverguje.

Obor konvergence

Příklad

Najděte obor konvergence řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(3x)}{n}$.

Řešení

Položme $f_n(x) = \dfrac{\ln^n(3x)}{n}$. Všechny funkce f_n jsou definovány na intervalu $(0, \infty)$. Zajíma nás, pro která x z tohoto intervalu daná řada konverguje.

- Jestliže $\ln(3x) = 1$, tj. jestliže $x = \frac{\mathrm{e}}{3}$, pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(3x)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Podle integrálního kritéria jsme ukázali, že tato řada diverguje.

- Jestliže $\ln(3x) = -1$, tj. jestliže $x = \dfrac{1}{3\,\mathrm{e}}$,

Obor konvergence

Příklad

Najděte obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(3x)}{n}$.

Řešení

Položme $f_n(x) = \frac{\ln^n(3x)}{n}$. Všechny funkce f_n jsou definovány na intervalu $(0, \infty)$. Zajíma nás, pro která x z tohoto intervalu daná řada konverguje.

- Jestliže $\ln(3x) = 1$, tj. jestliže $x = \frac{\mathrm{e}}{3}$, pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(3x)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Podle integrálního kritéria jsme ukázali, že tato řada diverguje.

- Jestliže $\ln(3x) = -1$, tj. jestliže $x = \frac{1}{3\,\mathrm{e}}$, pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(3x)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Obor konvergence

Příklad

Najděte obor konvergence řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(3x)}{n}$.

Řešení

Položme $f_n(x) = \dfrac{\ln^n(3x)}{n}$. Všechny funkce f_n jsou definovány na intervalu $(0, \infty)$. Zajíma nás, pro která x z tohoto intervalu daná řada konverguje.

- Jestliže $\ln(3x) = 1$, tj. jestliže $x = \dfrac{\mathrm{e}}{3}$, pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(3x)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Podle integrálního kritéria jsme ukázali, že tato řada diverguje.

- Jestliže $\ln(3x) = -1$, tj. jestliže $x = \dfrac{1}{3\,\mathrm{e}}$, pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(3x)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Tato řada splňuje předpoklady Leibnitzova kritéria pro alternující řady a tedy konverguje (ovšem pouze relativně).

Michaela Čiklová, Veronika Kurková

Obor konvergence

Příklad

Najděte obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(3x)}{n}$.

Řešení

Položme $f_n(x) = \frac{\ln^n(3x)}{n}$. Všechny funkce f_n jsou definovány na intervalu $(0, \infty)$. Zajíma nás, pro která x z tohoto intervalu daná řada konverguje.

Celkově platí, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(3x)}{n}$ konverguje pro

$$x \in \left(\frac{1}{3\,\mathrm{e}}, \frac{\mathrm{e}}{3} \right) \quad \text{a} \quad x = \frac{1}{3\,\mathrm{e}}.$$

Obor konvergence

Příklad

Najděte obor konvergence řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(3x)}{n}$.

Řešení

Položme $f_n(x) = \dfrac{\ln^n(3x)}{n}$. Všechny funkce f_n jsou definovány na intervalu $(0, \infty)$. Zajíma nás, pro která x z tohoto intervalu daná řada konverguje.

Celkově platí, že řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(3x)}{n}$ konverguje pro

$$x \in \left(\frac{1}{3\,\mathrm{e}}, \frac{\mathrm{e}}{3} \right) \quad \text{a} \quad x = \frac{1}{3\,\mathrm{e}}.$$

Obor konvergence dané řady je tedy interval $\left[\dfrac{1}{3\,\mathrm{e}}, \dfrac{\mathrm{e}}{3} \right)$, přičemž uvnitř tohoto intervalu řada konverguje absolutně a v levém krajním bodě relativně.

Stenoměrná konvergence řad

Příklad

Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{2^n \cdot n}$ *konverguje stejnoměrně na* $\mathbb{R}$.

Stenoměrná konvergence řad

Příklad

Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{2^n \cdot n}$ *konverguje stejnoměrně na* $\mathbb{R}$.

Řešení

Stenoměrná konvergence řad

Příklad

Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{2^n \cdot n}$ *konverguje stejnoměrně na* $\mathbb{R}$.

Řešení

Použijeme Weierstrassovo kritérium.

Stenoměrná konvergence řad

Příklad

Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{2^n \cdot n}$ *konverguje stejnoměrně na* $\mathbb{R}$.

Řešení

Použijeme Weierstrassovo kritérium.

Nechť (f_n) je posloupnost funkcí na I. Jestliže existuje posloupnost nezáporných čísel (x_n) taková, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje a pro všechna $x \in I$ a $n \in \mathbb{N}$ platí $|f_n(x)| \leq x_n$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na I.

Stenoměrná konvergence řad

Příklad

Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{2^n \cdot n}$ *konverguje stejnoměrně na* $\mathbb{R}$.

Řešení

Použijeme Weierstrassovo kritérium.

Nechť (f_n) je posloupnost funkcí na I. Jestliže existuje posloupnost nezáporných čísel (x_n) taková, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje a pro všechna $x \in I$ a $n \in \mathbb{N}$ platí $|f_n(x)| \leq x_n$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na I. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ nazýváme majorantou funkční řady $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$.

Stenoměrná konvergence řad

Příklad

Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{2^n \cdot n}$ *konverguje stejnoměrně na* $\mathbb{R}$.

Řešení

Použijeme Weierstrassovo kritérium.

Nechť (f_n) je posloupnost funkcí na I. Jestliže existuje posloupnost nezáporných čísel (x_n) taková, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje a pro všechna $x \in I$ a $n \in \mathbb{N}$ platí $|f_n(x)| \leq x_n$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na I. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ nazýváme majorantou funkční řady $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$.

Najdeme majorantu řady $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(nx)}{2^n \cdot n} \right|$.

Stenoměrná konvergence řad

Příklad

Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{2^n \cdot n}$ *konverguje stejnoměrně na* $\mathbb{R}$.

Řešení

Použijeme Weierstrassovo kritérium.

Nechť (f_n) je posloupnost funkcí na I. Jestliže existuje posloupnost nezáporných čísel (x_n) taková, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje a pro všechna $x \in I$ a $n \in \mathbb{N}$ platí $|f_n(x)| \leq x_n$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na I. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ nazýváme majorantou funkční řady $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$.

Položme

$$|f_n|(x) = \left| \frac{\sin(nx)}{2^n \cdot n} \right| \quad \text{a} \quad x_n = \frac{1}{2^n \cdot n}.$$

Stenoměrná konvergence řad

Příklad

Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{2^n \cdot n}$ *konverguje stejnoměrně na* $\mathbb{R}$.

Řešení

Použijeme Weierstrassovo kritérium.

Nechť (f_n) je posloupnost funkcí na I. Jestliže existuje posloupnost nezáporných čísel (x_n) taková, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje a pro všechna $x \in I$ a $n \in \mathbb{N}$ platí $|f_n(x)| \leq x_n$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na I. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ nazýváme majorantou funkční řady $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$.

Položme

$$|f_n|(x) = \left| \frac{\sin(nx)}{2^n \cdot n} \right| \quad \text{a} \quad x_n = \frac{1}{2^n \cdot n}.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je majorantou řady $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$.

Stenoměrná konvergence řad

Příklad

Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{2^n \cdot n}$ *konverguje stejnoměrně na* $\mathbb{R}$.

Řešení

Použijeme Weierstrassovo kritérium.

Nechť (f_n) je posloupnost funkcí na I. Jestliže existuje posloupnost nezáporných čísel (x_n) taková, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje a pro všechna $x \in I$ a $n \in \mathbb{N}$ platí $|f_n(x)| \leq x_n$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na I. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ nazýváme majorantou funkční řady $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$.

Položme

$$|f_n|(x) = \left| \frac{\sin(nx)}{2^n \cdot n} \right| \quad \text{a} \quad x_n = \frac{1}{2^n \cdot n}.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je majorantou řady $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$.

Proč?

Stenoměrná konvergence řad

Příklad

Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{2^n \cdot n}$ *konverguje stejnoměrně na* $\mathbb{R}$.

Řešení

Použijeme Weierstrassovo kritérium.

Nechť (f_n) je posloupnost funkcí na I. Jestliže existuje posloupnost nezáporných čísel (x_n) taková, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje a pro všechna $x \in I$ a $n \in \mathbb{N}$ platí $|f_n(x)| \leq x_n$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na I. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ nazýváme majorantou funkční řady $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$.

Položme

$$|f_n|(x) = \left| \frac{\sin(nx)}{2^n \cdot n} \right| \quad \text{a} \quad x_n = \frac{1}{2^n \cdot n}.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je majorantou řady $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$.

Proč?

Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ platí $|\sin(nx)| \leq 1$.

Stenoměrná konvergence řad

Příklad

Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{2^n \cdot n}$ *konverguje stejnoměrně na* $\mathbb{R}$.

Řešení

Použijeme Weierstrassovo kritérium.

Nechť (f_n) je posloupnost funkcí na I. Jestliže existuje posloupnost nezáporných čísel (x_n) taková, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje a pro všechna $x \in I$ a $n \in \mathbb{N}$ platí $|f_n(x)| \leq x_n$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na I. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ nazýváme majorantou funkční řady $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$.

Položme

$$|f_n|(x) = \left| \frac{\sin(nx)}{2^n \cdot n} \right| \quad \text{a} \quad x_n = \frac{1}{2^n \cdot n}.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je majorantou řady $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$.

Proč?

Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ platí $|\sin(nx)| \leq 1$. Tedy:

$$\left| \frac{\sin(nx)}{2^n \cdot n} \right| \leq \frac{1}{2^n \cdot n}.$$

Stenoměrná konvergence řad

Příklad

Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{2^n \cdot n}$ *konverguje stejnoměrně na* $\mathbb{R}$.

Řešení

Použijeme Weierstrassovo kritérium.

Nechť (f_n) je posloupnost funkcí na I. Jestliže existuje posloupnost nezáporných čísel (x_n) taková, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje a pro všechna $x \in I$ a $n \in \mathbb{N}$ platí $|f_n(x)| \leq x_n$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na I. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ nazýváme majorantou funkční řady $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$.

Položme

$$|f_n|(x) = \left|\frac{\sin(nx)}{2^n \cdot n}\right| \quad \text{a} \quad x_n = \frac{1}{2^n \cdot n}.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je majorantou řady $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$.

Již dříve jsme pomocí limitního odmocninového kritéria ukázali, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje.

Stenoměrná konvergence řad

Příklad

Dokažte, že řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{2^n \cdot n}$ *konverguje stejnoměrně na* $\mathbb{R}$.

Řešení

Použijeme Weierstrassovo kritérium.

Nechť (f_n) je posloupnost funkcí na I. Jestliže existuje posloupnost nezáporných čísel (x_n) taková, že řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje a pro všechna $x \in I$ a $n \in \mathbb{N}$ platí $|f_n(x)| \leq x_n$, pak řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na I. Řadu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ nazýváme majorantou funkční řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$.

Položme

$$|f_n|(x) = \left| \frac{\sin(nx)}{2^n \cdot n} \right| \quad \text{a} \quad x_n = \frac{1}{2^n \cdot n}.$$

Řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je majorantou řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$.

Již dříve jsme pomocí limitního odmocninového kritéria ukázali, že řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje.

Protože jsou splněny všechny předpoklady Weierstrassova kritéria,

$$\text{řada } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{2^n \cdot n} \text{ na } \mathbb{R} \textbf{ stejnoměrně konverguje}.$$

Stenoměrná konvergence řad

Příklad

Dokažte, že řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{2^n \cdot n}$ *konverguje stejnoměrně na* $\mathbb{R}$.

Řešení

Použijeme Weierstrassovo kritérium.

Nechť (f_n) je posloupnost funkcí na I. Jestliže existuje posloupnost nezáporných čísel (x_n) taková, že řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje a pro všechna $x \in I$ a $n \in \mathbb{N}$ platí $|f_n(x)| \leq x_n$, pak řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na I. Řadu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ nazýváme majorantou funkční řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$.

Položme

$$|f_n|(x) = \left| \frac{\sin(nx)}{2^n \cdot n} \right| \quad \text{a} \quad x_n = \frac{1}{2^n \cdot n}.$$

Řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je majorantou řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$.

Je zřejmé, že majoranta není dána jednoznačně.

Stenoměrná konvergence řad

Příklad

Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{2^n \cdot n}$ *konverguje stejnoměrně na* $\mathbb{R}$.

Řešení

Použijeme Weierstrassovo kritérium.

Nechť (f_n) je posloupnost funkcí na I. Jestliže existuje posloupnost nezáporných čísel (x_n) taková, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje a pro všechna $x \in I$ a $n \in \mathbb{N}$ platí $|f_n(x)| \leq x_n$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na I. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ nazýváme majorantou funkční řady $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$.

Položme

$$|f_n|(x) = \left| \frac{\sin(nx)}{2^n \cdot n} \right| \quad \text{a} \quad x_n = \frac{1}{2^n \cdot n}.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je majorantou řady $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$.

Je zřejmé, že majoranta není dána jednoznačně. Například konvergentní geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ s nezápornými členy je též majorantou řady $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(nx)}{2^n \cdot n} \right|$.

Stenoměrná konvergence řad

Příklad

Dokažte, že řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{2^n \cdot n}$ *konverguje stejnoměrně na* $\mathbb{R}$.

Řešení

Použijeme Weierstrassovo kritérium.

Nechť (f_n) je posloupnost funkcí na I. Jestliže existuje posloupnost nezáporných čísel (x_n) taková, že řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje a pro všechna $x \in I$ a $n \in \mathbb{N}$ platí $|f_n(x)| \leq x_n$, pak řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na I. Řadu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ nazýváme majorantou funkční řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$.

Položme

$$|f_n|(x) = \left|\frac{\sin(nx)}{2^n \cdot n}\right| \quad \text{a} \quad x_n = \frac{1}{2^n \cdot n}.$$

Řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je majorantou řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$.

Je zřejmé, že majoranta není dána jednoznačně. Například konvergentní geometrická řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ s nezápornými členy je též majorantou řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin(nx)}{2^n \cdot n}\right|$. Toto opět dokazuje, že daná řada na $\mathbb{R}$ **stejnoměrně konverguje**.

Spojitost

Příklad

Dokažte, že součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{x^2}}{n(n^2+1)}$ *je na* $\mathbb{R}$ *spojitá funkce.*

Michaela Čiklová, Veronika Kurková

Spojitost

Příklad

Dokažte, že součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{n(n^2+1)}$ *je na* $\mathbb{R}$ *spojitá funkce.*

Řešení

Spojitost

Příklad

Dokažte, že součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{n(n^2+1)}$ *je na* $\mathbb{R}$ *spojitá funkce.*

Řešení

Ukážeme, že součet dané řady je funkce spojitá na každém intervalu $[-a, a]$.

Spojitost

Příklad

Dokažte, že součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{n(n^2+1)}$ *je na* $\mathbb{R}$ *spojitá funkce.*

Řešení

Ukážeme, že součet dané řady je funkce spojitá na každém intervalu $[-a, a]$.
Je zřejmé, že potom bude tento součet spojitá funkce na $\mathbb{R}$.

Spojitost

Příklad

Dokažte, že součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{n(n^2+1)}$ *je na* $\mathbb{R}$ *spojitá funkce.*

Řešení

Ukážeme, že součet dané řady je funkce spojitá na každém intervalu $[-a, a]$.
Je zřejmé, že potom bude tento součet spojitá funkce na $\mathbb{R}$.
Nechť $a > 0$.

Spojitost

Příklad

Dokažte, že součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{n(n^2+1)}$ *je na* $\mathbb{R}$ *spojitá funkce.*

Řešení

Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ na množině Y stejnoměrně konverguje k funkci f a funkce f_n jsou na Y spojité, potom je na Y spojitá i funkce f.

Spojitost

Příklad

Dokažte, že součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{x^2}}{n(n^2+1)}$ *je na* $\mathbb{R}$ *spojitá funkce.*

Řešení

Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ na množině Y stejnoměrně konverguje k funkci f a funkce f_n jsou na Y spojité, potom je na Y spojitá i funkce f.

Označíme $f_n(x) = \frac{e^{x^2}}{n(n^2+1)}$ a $Y = [-a, a]$.

Spojitost

Příklad

Dokažte, že součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{x^2}}{n(n^2+1)}$ *je na* $\mathbb{R}$ *spojitá funkce.*

Řešení

Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ na množině Y stejnoměrně konverguje k funkci f a funkce f_n jsou na Y spojité, potom je na Y spojitá i funkce f.

Označíme $f_n(x) = \frac{e^{x^2}}{n(n^2+1)}$ a $Y = [-a, a]$.

K ověření, zda řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ na Y stejnoměrně konverguje, použijeme Weierstrassovo kritérium.

Spojitost

Příklad

Dokažte, že součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{x^2}}{n(n^2+1)}$ *je na* $\mathbb{R}$ *spojitá funkce.*

Řešení

Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ na množině Y stejnoměrně konverguje k funkci f a funkce f_n jsou na Y spojité, potom je na Y spojitá i funkce f.

Označíme $f_n(x) = \frac{e^{x^2}}{n(n^2+1)}$ a $Y = [-a, a]$.

K ověření, zda řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ na Y stejnoměrně konverguje, použijeme Weierstrassovo kritérium.

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x \in Y = [-a, a]$ platí $\frac{e^{x^2}}{n(n^2+1)} \leq \frac{e^{a^2}}{n(n^2+1)}$

Spojitost

Příklad

Dokažte, že součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{x^2}}{n(n^2+1)}$ *je na* $\mathbb{R}$ *spojitá funkce.*

Řešení

Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ na množině Y stejnoměrně konverguje k funkci f a funkce f_n jsou na Y spojité, potom je na Y spojitá i funkce f.

Označíme $f_n(x) = \frac{e^{x^2}}{n(n^2+1)}$ a $Y = [-a, a]$.

K ověření, zda řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ na Y stejnoměrně konverguje, použijeme Weierstrassovo kritérium.

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x \in Y = [-a, a]$ platí $\frac{e^{x^2}}{n(n^2+1)} \leq \frac{e^{a^2}}{n(n^2+1)} = \frac{e^{a^2}}{n^3+n} < \frac{e^{a^2}}{n^3}$.

Spojitost

Příklad

Dokažte, že součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{x^2}}{n(n^2+1)}$ *je na* $\mathbb{R}$ *spojitá funkce.*

Řešení

Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ na množině Y stejnoměrně konverguje k funkci f a funkce f_n jsou na Y spojité, potom je na Y spojitá i funkce f.

Označíme $f_n(x) = \frac{e^{x^2}}{n(n^2+1)}$ a $Y = [-a, a]$.

K ověření, zda řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ na Y stejnoměrně konverguje, použijeme Weierstrassovo kritérium.

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x \in Y = [-a, a]$ platí $\frac{e^{x^2}}{n(n^2+1)} \leq \frac{e^{a^2}}{n(n^2+1)} = \frac{e^{a^2}}{n^3+n} < \frac{e^{a^2}}{n^3}$.

Pomocí integrálního kritéria lze ukázat, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{a^2}}{n^3}$ konverguje.

Spojitost

Příklad

Dokažte, že součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{x^2}}{n(n^2+1)}$ *je na* $\mathbb{R}$ *spojitá funkce.*

Řešení

Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ na množině Y stejnoměrně konverguje k funkci f a funkce f_n jsou na Y spojité, potom je na Y spojitá i funkce f.

Označíme $f_n(x) = \frac{e^{x^2}}{n(n^2+1)}$ a $Y = [-a, a]$.

K ověření, zda řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ na Y stejnoměrně konverguje, použijeme Weierstrassovo kritérium.

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x \in Y = [-a, a]$ platí $\frac{e^{x^2}}{n(n^2+1)} \leq \frac{e^{a^2}}{n(n^2+1)} = \frac{e^{a^2}}{n^3+n} < \frac{e^{a^2}}{n^3}$.

Pomocí integrálního kritéria lze ukázat, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{a^2}}{n^3}$ konverguje.

Integrální kritérium:
Nechť $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ je spojitá nezáporná nerostoucí funkce a nechť $x_n = f(n)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Potom platí:

$$\text{řada } \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ konverguje} \iff \text{ existuje vlastní integrál } \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

Spojitost

Příklad

Dokažte, že součet řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{x^2}}{n(n^2+1)}$ *je na* $\mathbb{R}$ *spojitá funkce.*

Řešení

Jestliže řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ na množině Y stejnoměrně konverguje k funkci f a funkce f_n jsou na Y spojité, potom je na Y spojitá i funkce f.

Označíme $f_n(x) = \frac{e^{x^2}}{n(n^2+1)}$ a $Y = [-a, a]$.

K ověření, zda řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ na Y stejnoměrně konverguje, použijeme Weierstrassovo kritérium.

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x \in Y = [-a, a]$ platí $\displaystyle\frac{e^{x^2}}{n(n^2+1)} \leq \frac{e^{a^2}}{n(n^2+1)} = \frac{e^{a^2}}{n^3+n} < \frac{e^{a^2}}{n^3}$.

Pomocí integrálního kritéria lze ukázat, že řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{a^2}}{n^3}$ konverguje.

Integrální kritérium:
Nechť $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ je spojitá nezáporná nerostoucí funkce a nechť $x_n = f(n)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Potom platí:

$$\text{řada } \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ konverguje} \iff \text{ existuje vlastní integrál } \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

Jestliže $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^{a^2}}{x^3}$, je funkce f klesající, spojitá a platí:

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{a^2}}{x^3}\,\mathrm{d}\,x = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{e^{a^2}}{x^3}\,\mathrm{d}\,x = \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{e^{a^2}}{2x^2}\right]_1^t = \lim_{t\to\infty} \left(-\frac{e^{a^2}}{2t^2} + \frac{e^{a^2}}{2}\right) = \frac{e^{a^2}}{2}.$$

Spojitost

Příklad

Dokažte, že součet řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{n(n^2+1)}$ *je na* $\mathbb{R}$ *spojitá funkce.*

Řešení

Jestliže řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ na množině Y stejnoměrně konverguje k funkci f a funkce f_n jsou na Y spojité, potom je na Y spojitá i funkce f.

Označíme $f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{n(n^2+1)}$ a $Y = [-a, a]$.

Spojitost

Příklad

Dokažte, že součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{n(n^2+1)}$ *je na* $\mathbb{R}$ *spojitá funkce.*

Řešení

Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ na množině Y stejnoměrně konverguje k funkci f a funkce f_n jsou na Y spojité, potom je na Y spojitá i funkce f.

Označíme $f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{n(n^2+1)}$ a $Y = [-a, a]$.

- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na intervalu Y.

Spojitost

Příklad

Dokažte, že součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{x^2}}{n(n^2+1)}$ *je na* $\mathbb{R}$ *spojitá funkce.*

Řešení

Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ na množině Y stejnoměrně konverguje k funkci f a funkce f_n jsou na Y spojité, potom je na Y spojitá i funkce f.

Označíme $f_n(x) = \frac{e^{x^2}}{n(n^2+1)}$ a $Y = [-a, a]$.

- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na intervalu Y.
- Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je funkce f_n spojitá na Y.

Spojitost

Příklad

Dokažte, že součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{x^2}}{n(n^2+1)}$ *je na* $\mathbb{R}$ *spojitá funkce.*

Řešení

Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ na množině Y stejnoměrně konverguje k funkci f a funkce f_n jsou na Y spojité, potom je na Y spojitá i funkce f.

Označíme $f_n(x) = \frac{e^{x^2}}{n(n^2+1)}$ a $Y = [-a, a]$.

- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na intervalu Y.
- Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je funkce f_n spojitá na Y.

$$\Longrightarrow \text{Součet řady } \sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ je spojitá funkce na } Y = [-a, a], \text{ kde } a > 0 \text{ je libovolné,}$$

Spojitost

Příklad

Dokažte, že součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{x^2}}{n(n^2+1)}$ *je na* $\mathbb{R}$ *spojitá funkce.*

Řešení

Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ na množině Y stejnoměrně konverguje k funkci f a funkce f_n jsou na Y spojité, potom je na Y spojitá i funkce f.

Označíme $f_n(x) = \frac{e^{x^2}}{n(n^2+1)}$ a $Y = [-a, a]$.

- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na intervalu Y.
- Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je funkce f_n spojitá na Y.

$\Longrightarrow$ Součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je spojitá funkce na $Y = [-a, a]$, kde $a > 0$ je libovolné,

$\Longrightarrow$ součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{x^2}}{n(n^2+1)}$ **je spojitá** funkce na $\mathbb{R}$.

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n} =$$

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n} =$$

Pro $n = 1$:

$$\frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n} =$$

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n} =$$

Pro $n = 1$:

$$\frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n} = \frac{(-1)^{1-1}}{2^1 \cdot 1}(x+3)^{2\cdot 1} =$$

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n} = \frac{1}{2}(x+3)^2$$

Pro $n = 1$:

$$\frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n} = \frac{(-1)^{1-1}}{2^1 \cdot 1}(x+3)^{2\cdot 1} = \frac{1}{2}(x+3)^2$$

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n} = \frac{1}{2}(x+3)^2$$

Pro $n = 2$:

$$\frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n} =$$

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n} = \frac{1}{2}(x+3)^2$$

Pro $n = 2$:

$$\frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n} = \frac{(-1)^{2-1}}{2^2 \cdot 2}(x+3)^{2\cdot 2} =$$

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n} = \frac{1}{2}(x+3)^2 - \frac{1}{8}(x+3)^4$$

Pro $n = 2$:

$$\frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n} = \frac{(-1)^{2-1}}{2^2 \cdot 2}(x+3)^{2\cdot 2} = -\frac{1}{8}(x+3)^4$$

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n} = \frac{1}{2}(x+3)^2 - \frac{1}{8}(x+3)^4$$

Pro $n = 3$:

$$\frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n} =$$

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n} = \frac{1}{2}(x+3)^2 - \frac{1}{8}(x+3)^4$$

Pro $n = 3$:

$$\frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n} = \frac{(-1)^{3-1}}{2^3 \cdot 3}(x+3)^{2\cdot 3} =$$

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n} = \frac{1}{2}(x+3)^2 - \frac{1}{8}(x+3)^4 + \frac{1}{24}(x+3)^6$$

Pro $n = 3$:

$$\frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n} = \frac{(-1)^{3-1}}{2^3 \cdot 3}(x+3)^{2\cdot 3} = \frac{1}{24}(x+3)^6$$

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n} = \frac{1}{2}(x+3)^2 - \frac{1}{8}(x+3)^4 + \frac{1}{24}(x+3)^6$$

Pro $n = 4$:

$$\frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n} =$$

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n} = \frac{1}{2}(x+3)^2 - \frac{1}{8}(x+3)^4 + \frac{1}{24}(x+3)^6$$

Pro $n = 4$:

$$\frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n} = \frac{(-1)^{4-1}}{2^4 \cdot 4}(x+3)^{2\cdot 4} =$$

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n} = \frac{1}{2}(x+3)^2 - \frac{1}{8}(x+3)^4 + \frac{1}{24}(x+3)^6 - \frac{1}{64}(x+3)^8$$

Pro $n = 4$:

$$\frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n} = \frac{(-1)^{4-1}}{2^4 \cdot 4}(x+3)^{2\cdot 4} = -\frac{1}{64}(x+3)^8$$

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n} = \frac{1}{2}(x+3)^2 - \frac{1}{8}(x+3)^4 + \frac{1}{24}(x+3)^6 - \frac{1}{64}(x+3)^8 + \cdots$$

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n} = \frac{1}{2}(x+3)^2 - \frac{1}{8}(x+3)^4 + \frac{1}{24}(x+3)^6 - \frac{1}{64}(x+3)^8 + \cdots$$

Jde o mocninnou řadu, tzn. je ve tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + a_4(x-x_0)^4 + \cdots ,$$

se středem v bodě $x_0 = -3$,

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n} = \frac{1}{2}(x+3)^2 - \frac{1}{8}(x+3)^4 + \frac{1}{24}(x+3)^6 - \frac{1}{64}(x+3)^8 + \cdots$$

Jde o mocninnou řadu, tzn. je ve tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + a_4(x-x_0)^4 + \cdots,$$

se středem v bodě $x_0 = -3$, přičemž $a_0 = 0$ a

$$a_k = ?$$

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n} = \frac{1}{2}(x+3)^2 - \frac{1}{8}(x+3)^4 + \frac{1}{24}(x+3)^6 - \frac{1}{64}(x+3)^8 + \cdots$$

Jde o mocninnou řadu, tzn. je ve tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + a_4(x-x_0)^4 + \cdots,$$

se středem v bodě $x_0 = -3$, přičemž $a_0 = 0$ a

$$a_k = ?$$

Je snadno vidět, že $a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = a_{2m-1} = \cdots = 0$,

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n} = \frac{1}{2}(x+3)^2 - \frac{1}{8}(x+3)^4 + \frac{1}{24}(x+3)^6 - \frac{1}{64}(x+3)^8 + \cdots$$

Jde o mocninnou řadu, tzn. je ve tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + a_4(x-x_0)^4 + \cdots ,$$

se středem v bodě $x_0 = -3$, přičemž $a_0 = 0$ a

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{pro } k = 2m-1 \quad (k \text{ je liché}), \\ & \end{cases}$$

Je snadno vidět, že $a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = a_{2m-1} = \cdots = 0$,

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n} = \frac{1}{2}(x+3)^2 - \frac{1}{8}(x+3)^4 + \frac{1}{24}(x+3)^6 - \frac{1}{64}(x+3)^8 + \cdots$$

Jde o mocninnou řadu, tzn. je ve tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + a_4(x-x_0)^4 + \cdots,$$

se středem v bodě $x_0 = -3$, přičemž $a_0 = 0$ a

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{pro } k = 2m-1 \quad (k \text{ je liché}), \\ & \end{cases}$$

Je snadno vidět, že $a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = a_{2m-1} = \cdots = 0$,

zatímco $a_2 = \dfrac{1}{2}$,

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n} (x+3)^{2n}$.

Řešení

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n} (x+3)^{2n} = \frac{1}{2}(x+3)^2 - \frac{1}{8}(x+3)^4 + \frac{1}{24}(x+3)^6 - \frac{1}{64}(x+3)^8 + \cdots$$

Jde o mocninnou řadu, tzn. je ve tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + a_4(x-x_0)^4 + \cdots ,$$

se středem v bodě $x_0 = -3$, přičemž $a_0 = 0$ a

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{pro } k = 2m-1 \quad (k \text{ je liché}), \\ & \end{cases}$$

Je snadno vidět, že $a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = a_{2m-1} = \cdots = 0$,

zatímco $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_4 = -\frac{1}{8}$,

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n} = \frac{1}{2}(x+3)^2 - \frac{1}{8}(x+3)^4 + \frac{1}{24}(x+3)^6 - \frac{1}{64}(x+3)^8 + \cdots$$

Jde o mocninnou řadu, tzn. je ve tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + a_4(x-x_0)^4 + \cdots,$$

se středem v bodě $x_0 = -3$, přičemž $a_0 = 0$ a

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{pro } k = 2m-1 \quad (k \text{ je liché}), \\ & \end{cases}$$

Je snadno vidět, že $a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = a_{2m-1} = \cdots = 0$,

zatímco $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_4 = -\frac{1}{8}$, $a_6 = \frac{1}{24}$,

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n} = \frac{1}{2}(x+3)^2 - \frac{1}{8}(x+3)^4 + \frac{1}{24}(x+3)^6 - \frac{1}{64}(x+3)^8 + \cdots$$

Jde o mocninnou řadu, tzn. je ve tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + a_4(x-x_0)^4 + \cdots,$$

se středem v bodě $x_0 = -3$, přičemž $a_0 = 0$ a

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{pro } k = 2m-1 \quad (k \text{ je liché}), \\ & \end{cases}$$

Je snadno vidět, že $a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = a_{2m-1} = \cdots = 0$,

zatímco $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_4 = -\frac{1}{8}$, $a_6 = \frac{1}{24}$, $a_8 = -\frac{1}{4 \cdot 2^4}$,

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n} = \frac{1}{2}(x+3)^2 - \frac{1}{8}(x+3)^4 + \frac{1}{24}(x+3)^6 - \frac{1}{64}(x+3)^8 + \cdots$$

Jde o mocninnou řadu, tzn. je ve tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + a_4(x-x_0)^4 + \cdots,$$

se středem v bodě $x_0 = -3$, přičemž $a_0 = 0$ a

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{pro } k = 2m-1 \quad (k \text{ je liché}), \\ & \end{cases}$$

Je snadno vidět, že $a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = a_{2m-1} = \cdots = 0$,

zatímco $a_2 = \dfrac{1}{2}$, $a_4 = -\dfrac{1}{8}$, $a_6 = \dfrac{1}{24}$, $a_8 = -\dfrac{1}{4 \cdot 2^4}, \ldots,$ $a_{2m} = \dfrac{(-1)^{m-1}}{2^m m}$.

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n} = \frac{1}{2}(x+3)^2 - \frac{1}{8}(x+3)^4 + \frac{1}{24}(x+3)^6 - \frac{1}{64}(x+3)^8 + \cdots$$

Jde o mocninnou řadu, tzn. je ve tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + a_4(x-x_0)^4 + \cdots,$$

se středem v bodě $x_0 = -3$, přičemž $a_0 = 0$ a

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{pro } k = 2m-1 \quad (k \text{ je liché}), \\ \dfrac{(-1)^{m-1}}{2^m m} & \text{pro } k = 2m \quad (k \text{ je sudé}). \end{cases}$$

Je snadno vidět, že $a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = a_{2m-1} = \cdots = 0$,

zatímco $a_2 = \dfrac{1}{2}$, $a_4 = -\dfrac{1}{8}$, $a_6 = \dfrac{1}{24}$, $a_8 = -\dfrac{1}{4 \cdot 2^4}, \ldots,$ $a_{2m} = \dfrac{(-1)^{m-1}}{2^m m}$.

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

Pro každou mocninnou řadu se středem v x_0, nechť $p = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$.

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

Pro každou mocninnou řadu se středem v x_0, nechť $p = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$.

- Je-li $p = 0$, řada konverguje absolutně pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

Pro každou mocninnou řadu se středem v x_0, nechť $p = \limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$.

- Je-li $p = 0$, řada konverguje absolutně pro všechna $x \in \mathbb{R}$.
- Je-li $p = \infty$, řada diverguje pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$.

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

Pro každou mocninnou řadu se středem v x_0, nechť $p = \limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$.

- Je-li $p = 0$, řada konverguje absolutně pro všechna $x \in \mathbb{R}$.
- Je-li $p = \infty$, řada diverguje pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$.
- Je-li $0 < p < \infty$, řada absolutně konverguje pro $x \in \left(x_0 - \frac{1}{p}, x_0 + \frac{1}{p}\right)$ a diverguje pro $x \in \left(-\infty, x_0 - \frac{1}{p}\right) \cup \left(x_0 + \frac{1}{p}, \infty\right)$.

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

Pro každou mocninnou řadu se středem v x_0, nechť $p = \limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$.

- Je-li $p = 0$, řada konverguje absolutně pro všechna $x \in \mathbb{R}$.
- Je-li $p = \infty$, řada diverguje pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$.
- Je-li $0 < p < \infty$, řada absolutně konverguje pro $x \in \left(x_0 - \frac{1}{p}, x_0 + \frac{1}{p}\right)$ a diverguje pro $x \in \left(-\infty, x_0 - \frac{1}{p}\right) \cup \left(x_0 + \frac{1}{p}, \infty\right)$.

Poloměr konvergence je

- roven číslu $\rho = \infty$, jestliže $p = 0$,

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

Pro každou mocninnou řadu se středem v x_0, nechť $p = \limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$.

- Je-li $p = 0$, řada konverguje absolutně pro všechna $x \in \mathbb{R}$.
- Je-li $p = \infty$, řada diverguje pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$.
- Je-li $0 < p < \infty$, řada absolutně konverguje pro $x \in \left(x_0 - \frac{1}{p}, x_0 + \frac{1}{p}\right)$ a diverguje pro $x \in \left(-\infty, x_0 - \frac{1}{p}\right) \cup \left(x_0 + \frac{1}{p}, \infty\right)$.

Poloměr konvergence je

- roven číslu $\rho = \infty$, jestliže $p = 0$,
- roven číslu $\rho = 0$, jestliže $p = \infty$,

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

Pro každou mocninnou řadu se středem v x_0, nechť $p = \limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$.

- Je-li $p = 0$, řada konverguje absolutně pro všechna $x \in \mathbb{R}$.
- Je-li $p = \infty$, řada diverguje pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$.
- Je-li $0 < p < \infty$, řada absolutně konverguje pro $x \in \left(x_0 - \frac{1}{p}, x_0 + \frac{1}{p}\right)$ a diverguje pro $x \in \left(-\infty, x_0 - \frac{1}{p}\right) \cup \left(x_0 + \frac{1}{p}, \infty\right)$.

Poloměr konvergence je

- roven číslu $\rho = \infty$, jestliže $p = 0$,
- roven číslu $\rho = 0$, jestliže $p = \infty$,
- roven číslu $\rho = \frac{1}{p}$, jestliže $0 < p < \infty$.

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

Pro každou mocninnou řadu se středem v x_0, nechť $p = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$.

- Je-li $p = 0$, řada konverguje absolutně pro všechna $x \in \mathbb{R}$.
- Je-li $p = \infty$, řada diverguje pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$.
- Je-li $0 < p < \infty$, řada absolutně konverguje pro $x \in \left(x_0 - \frac{1}{p}, x_0 + \frac{1}{p}\right)$ a diverguje pro $x \in \left(-\infty, x_0 - \frac{1}{p}\right) \cup \left(x_0 + \frac{1}{p}, \infty\right)$.

Poloměr konvergence je

- roven číslu $\rho = \infty$, jestliže $p = 0$,
- roven číslu $\rho = 0$, jestliže $p = \infty$,
- roven číslu $\rho = \frac{1}{p}$, jestliže $0 < p < \infty$.

Abychom určili interval a poloměr konvergence, musíme vypočítat p.

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

Nejdřive vypočítáme $\sqrt[k]{|a_k|}$. Budeme předpokládat, že $k \geq 1$, protože limes superior posloupnosti je největší hromadná hodnota této posloupnosti, a tedy bude nabývat stejné hodnoty i v případě, že vynecháme konečný počet členů.

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

Nejdříve vypočítáme $\sqrt[k]{|a_k|}$. Budeme předpokládat, že $k \geq 1$, protože limes superior posloupnosti je největší hromadná hodnota této posloupnosti, a tedy bude nabývat stejné hodnoty i v případě, že vynecháme konečný počet členů.

$$\sqrt[k]{|a_k|} = ?$$

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

Nejdřive vypočítáme $\sqrt[k]{|a_k|}$. Budeme předpokládat, že $k \geq 1$, protože limes superior posloupnosti je největší hromadná hodnota této posloupnosti, a tedy bude nabývat stejné hodnoty i v případě, že vynecháme konečný počet členů.

$$\sqrt[k]{|a_k|} = ?$$

Jestliže $k = 2m - 1$, $a_k = 0$

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

Nejdřive vypočítáme $\sqrt[k]{|a_k|}$. Budeme předpokládat, že $k \geq 1$, protože limes superior posloupnosti je největší hromadná hodnota této posloupnosti, a tedy bude nabývat stejné hodnoty i v případě, že vynecháme konečný počet členů.

$$\sqrt[k]{|a_k|} = ?$$

Jestliže $k = 2m - 1$, $a_k = 0$, a tedy

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[2m-1]{0}$$

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

Nejdříve vypočítáme $\sqrt[k]{|a_k|}$. Budeme předpokládat, že $k \geq 1$, protože limes superior posloupnosti je největší hromadná hodnota této posloupnosti, a tedy bude nabývat stejné hodnoty i v případě, že vynecháme konečný počet členů.

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \begin{cases} 0 & \text{pro } k = 2m-1 \\ & \end{cases}$$

Jestliže $k = 2m-1$, $a_k = 0$, a tedy

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[2m-1]{0} = 0.$$

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

Nejdřive vypočítáme $\sqrt[k]{|a_k|}$. Budeme předpokládat, že $k \geq 1$, protože limes superior posloupnosti je největší hromadná hodnota této posloupnosti, a tedy bude nabývat stejné hodnoty i v případě, že vynecháme konečný počet členů.

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \begin{cases} 0 & \text{pro } k = 2m - 1 \\ & \end{cases}$$

Jestliže $k = 2m$, $a_k = \frac{(-1)^{m-1}}{2^m m}$

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

Nejdříve vypočítáme $\sqrt[k]{|a_k|}$. Budeme předpokládat, že $k \geq 1$, protože limes superior posloupnosti je největší hromadná hodnota této posloupnosti, a tedy bude nabývat stejné hodnoty i v případě, že vynecháme konečný počet členů.

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \begin{cases} 0 & \text{pro } k = 2m-1 \\ & \end{cases}$$

Jestliže $k = 2m$, $a_k = \frac{(-1)^{m-1}}{2^m m}$, a tedy

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[2m]{\left|\frac{(-1)^{m-1}}{2^m m}\right|}$$

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

Nejdříve vypočítáme $\sqrt[k]{|a_k|}$. Budeme předpokládat, že $k \geq 1$, protože limes superior posloupnosti je největší hromadná hodnota této posloupnosti, a tedy bude nabývat stejné hodnoty i v případě, že vynecháme konečný počet členů.

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \begin{cases} 0 & \text{pro } k = 2m - 1 \\ & \end{cases}$$

Jestliže $k = 2m$, $a_k = \dfrac{(-1)^{m-1}}{2^m m}$, a tedy

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[2m]{\left|\frac{(-1)^{m-1}}{2^m m}\right|} = \sqrt[2m]{\frac{1}{2^m m}}$$

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

Nejdříve vypočítáme $\sqrt[k]{|a_k|}$. Budeme předpokládat, že $k \geq 1$, protože limes superior posloupnosti je největší hromadná hodnota této posloupnosti, a tedy bude nabývat stejné hodnoty i v případě, že vynecháme konečný počet členů.

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \begin{cases} 0 & \text{pro } k = 2m-1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt[2m]{m}} & \text{pro } k = 2m \end{cases}$$

Jestliže $k = 2m$, $a_k = \dfrac{(-1)^{m-1}}{2^m m}$, a tedy

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[2m]{\left|\frac{(-1)^{m-1}}{2^m m}\right|} = \sqrt[2m]{\frac{1}{2^m m}} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt[2m]{m}}.$$

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

Nejdřive vypočítáme $\sqrt[k]{|a_k|}$. Budeme předpokládat, že $k \geq 1$, protože limes superior posloupnosti je největší hromadná hodnota této posloupnosti, a tedy bude nabývat stejné hodnoty i v případě, že vynecháme konečný počet členů.

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \begin{cases} 0 & \text{pro } k = 2m-1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt[2m]{m}} & \text{pro } k = 2m \end{cases}$$

Limita posloupnosti $\sqrt[k]{|a_k|}$ neexistuje,

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

Nejdřive vypočítáme $\sqrt[k]{|a_k|}$. Budeme předpokládat, že $k \geq 1$, protože limes superior posloupnosti je největší hromadná hodnota této posloupnosti, a tedy bude nabývat stejné hodnoty i v případě, že vynecháme konečný počet členů.

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \begin{cases} 0 & \text{pro } k = 2m-1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt[2m]{m}} & \text{pro } k = 2m \end{cases}$$

Limita posloupnosti $\sqrt[k]{|a_k|}$ neexistuje, ale

$$\lim_{m\to\infty} \sqrt[2m-1]{|a_{2m-1}|} = 0,$$

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

Nejdříve vypočítáme $\sqrt[k]{|a_k|}$. Budeme předpokládat, že $k \geq 1$, protože limes superior posloupnosti je největší hromadná hodnota této posloupnosti, a tedy bude nabývat stejné hodnoty i v případě, že vynecháme konečný počet členů.

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \begin{cases} 0 & \text{pro } k = 2m-1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt[2m]{m}} & \text{pro } k = 2m \end{cases}$$

Limita posloupnosti $\sqrt[k]{|a_k|}$ neexistuje, ale

$$\lim_{m\to\infty} \sqrt[2m-1]{|a_{2m-1}|} = 0,$$
$$\lim_{m\to\infty} \sqrt[2m]{|a_{2m}|} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt[2m]{m}} =$$

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n} (x+3)^{2n}$.

Řešení

Nejdříve vypočítáme $\sqrt[k]{|a_k|}$. Budeme předpokládat, že $k \geq 1$, protože limes superior posloupnosti je největší hromadná hodnota této posloupnosti, a tedy bude nabývat stejné hodnoty i v případě, že vynecháme konečný počet členů.

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \begin{cases} 0 & \text{pro } k = 2m-1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt[2m]{m}} & \text{pro } k = 2m \end{cases}$$

Limita posloupnosti $\sqrt[k]{|a_k|}$ neexistuje, ale

$$\lim_{m\to\infty} \sqrt[2m-1]{|a_{2m-1}|} = 0,$$
$$\lim_{m\to\infty} \sqrt[2m]{|a_{2m}|} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt[2m]{m}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

Nejdřive vypočítáme $\sqrt[k]{|a_k|}$. Budeme předpokládat, že $k \geq 1$, protože limes superior posloupnosti je největší hromadná hodnota této posloupnosti, a tedy bude nabývat stejné hodnoty i v případě, že vynecháme konečný počet členů.

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \begin{cases} 0 & \text{pro } k = 2m-1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt[2m]{m}} & \text{pro } k = 2m \end{cases}$$

Limita posloupnosti $\sqrt[k]{|a_k|}$ neexistuje, ale

$$\lim_{m\to\infty} \sqrt[2m-1]{|a_{2m-1}|} = 0,$$
$$\lim_{m\to\infty} \sqrt[2m]{|a_{2m}|} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt[2m]{m}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

a proto

$$p = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

Protože $0 < p = \frac{1}{\sqrt{2}} < \infty$

$$p = \limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

Protože $0 < p = \frac{1}{\sqrt{2}} < \infty$, řada

- konverguje pro každé $x \in \left(-3-\sqrt{2}, -3+\sqrt{2}\right)$,

Michaela Čiklová, Veronika Kurková

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

Protože $0 < p = \frac{1}{\sqrt{2}} < \infty$, řada

- konverguje pro každé $x \in \left(-3-\sqrt{2}, -3+\sqrt{2}\right)$,
- diverguje pro každé $x \in \left(-\infty, -3-\sqrt{2}\right) \cup \left(-3+\sqrt{2}, \infty\right)$.

Michaela Čiklová, Veronika Kurková

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

Protože $0 < p = \frac{1}{\sqrt{2}} < \infty$, řada

- konvergује pro každé $x \in \left(-3-\sqrt{2}, -3+\sqrt{2}\right)$,
- diverguje pro každé $x \in \left(-\infty, -3-\sqrt{2}\right) \cup \left(-3+\sqrt{2}, \infty\right)$.

Stačí už jen vyšetřit konvergenci v koncových bodech intervalu konvergence

$$J = \left(-3-\sqrt{2},\ -3+\sqrt{2}\right).$$

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

Protože $0 < p = \frac{1}{\sqrt{2}} < \infty$, řada

- konverguje pro každé $x \in \left(-3-\sqrt{2}, -3+\sqrt{2}\right)$,
- diverguje pro každé $x \in \left(-\infty, -3-\sqrt{2}\right) \cup \left(-3+\sqrt{2}, \infty\right)$.

Stačí už jen vyšetřit konvergenci v koncových bodech intervalu konvergence

$$J = \left(-3-\sqrt{2},\ -3+\sqrt{2}\right) .$$

Jestliže $x = -3+\sqrt{2}$, dostaneme řadu ve tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n} \left(\sqrt{2}\right)^{2n}$$

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

Protože $0 < p = \frac{1}{\sqrt{2}} < \infty$, řada

- konverguje pro každé $x \in \left(-3-\sqrt{2}, -3+\sqrt{2}\right)$,
- diverguje pro každé $x \in \left(-\infty, -3-\sqrt{2}\right) \cup \left(-3+\sqrt{2}, \infty\right)$.

Stačí už jen vyšetřit konvergenci v koncových bodech intervalu konvergence

$$J = \left(-3-\sqrt{2},\ -3+\sqrt{2}\right).$$

Jestliže $x = -3+\sqrt{2}$, dostaneme řadu ve tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n} \left(\sqrt{2}\right)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n} \cdot 2^n =$$

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

Protože $0 < p = \frac{1}{\sqrt{2}} < \infty$, řada

- konverguje pro každé $x \in \left(-3-\sqrt{2}, -3+\sqrt{2}\right)$,
- diverguje pro každé $x \in \left(-\infty, -3-\sqrt{2}\right) \cup \left(-3+\sqrt{2}, \infty\right)$.

Stačí už jen vyšetřit konvergenci v koncových bodech intervalu konvergence

$$J = \left(-3-\sqrt{2}, \ -3+\sqrt{2}\right).$$

Jestliže $x = -3+\sqrt{2}$, dostaneme řadu ve tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n} \left(\sqrt{2}\right)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n} \cdot 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

Protože $0 < p = \frac{1}{\sqrt{2}} < \infty$, řada

- konverguje pro každé $x \in \left(-3-\sqrt{2}, -3+\sqrt{2}\right)$,
- diverguje pro každé $x \in \left(-\infty, -3-\sqrt{2}\right) \cup \left(-3+\sqrt{2}, \infty\right)$.

Stačí už jen vyšetřit konvergenci v koncových bodech intervalu konvergence

$$J = \left(-3-\sqrt{2},\ -3+\sqrt{2}\right) .$$

Jestliže $x = -3+\sqrt{2}$, dostaneme řadu ve tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n} \left(\sqrt{2}\right)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n} \cdot 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} .$$

Tato řada splňuje podmínky Leibnizova kritéria pro alternující řady,

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

Protože $0 < p = \frac{1}{\sqrt{2}} < \infty$, řada

- konverguje pro každé $x \in \left(-3-\sqrt{2}, -3+\sqrt{2}\right)$,
- diverguje pro každé $x \in \left(-\infty, -3-\sqrt{2}\right) \cup \left(-3+\sqrt{2}, \infty\right)$.

Stačí už jen vyšetřit konvergenci v koncových bodech intervalu konvergence

$$J = \left(-3-\sqrt{2},\ -3+\sqrt{2}\right).$$

Jestliže $x = -3+\sqrt{2}$, dostaneme řadu ve tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n} \left(\sqrt{2}\right)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n} \cdot 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Tato řada splňuje podmínky Leibnizova kritéria pro alternující řady, tedy konverguje

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

Protože $0 < p = \frac{1}{\sqrt{2}} < \infty$, řada

- konverguje pro každé $x \in \left(-3-\sqrt{2}, -3+\sqrt{2}\right)$,
- diverguje pro každé $x \in \left(-\infty, -3-\sqrt{2}\right) \cup \left(-3+\sqrt{2}, \infty\right)$.

Stačí už jen vyšetřit konvergenci v koncových bodech intervalu konvergence

$$J = \left(-3-\sqrt{2},\ -3+\sqrt{2}\right) .$$

Jestliže $x = -3+\sqrt{2}$, dostaneme řadu ve tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n} \left(\sqrt{2}\right)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n} \cdot 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} .$$

Tato řada splňuje podmínky Leibnizova kritéria pro alternující řady, tedy konverguje

$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n} (x+3)^{2n}$ relativně konverguje v $x = -3+\sqrt{2}$.

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

Protože $0 < p = \frac{1}{\sqrt{2}} < \infty$, řada

- konverguje pro každé $x \in \left(-3-\sqrt{2}, -3+\sqrt{2}\right]$,
- diverguje pro každé $x \in \left(-\infty, -3-\sqrt{2}\right) \cup \left(-3+\sqrt{2}, \infty\right)$.

Stačí už jen vyšetřit konvergenci v koncových bodech intervalu konvergence

$$J = \left(-3-\sqrt{2},\ -3+\sqrt{2}\right).$$

Jestliže $x = -3+\sqrt{2}$, dostaneme řadu ve tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}\left(\sqrt{2}\right)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n} \cdot 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Tato řada splňuje podmínky Leibnizova kritéria pro alternující řady, tedy konverguje

$\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$ relativně konverguje v $x = -3+\sqrt{2}$.

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

Protože $0 < p = \frac{1}{\sqrt{2}} < \infty$, řada

- konverguje pro každé $x \in \left(-3-\sqrt{2}, -3+\sqrt{2}\right]$,
- diverguje pro každé $x \in \left(-\infty, -3-\sqrt{2}\right) \cup \left(-3+\sqrt{2}, \infty\right)$.

Stačí už jen vyšetřit konvergenci v koncových bodech intervalu konvergence

$$J = \left(-3-\sqrt{2},\ -3+\sqrt{2}\right).$$

Jestliže $x = -3-\sqrt{2}$, dostaneme stejnou řadu jako v bodě $-3+\sqrt{2}$:

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n} (x+3)^{2n}$.

Řešení

Protože $0 < p = \frac{1}{\sqrt{2}} < \infty$, řada

- konvergujе pro každé $x \in \left(-3 - \sqrt{2}, -3 + \sqrt{2} \right]$,
- diverguje pro každé $x \in \left(-\infty, -3 - \sqrt{2} \right) \cup \left(-3 + \sqrt{2}, \infty \right)$.

Stačí už jen vyšetřit konvergenci v koncových bodech intervalu konvergence

$$J = \left(-3 - \sqrt{2}, \; -3 + \sqrt{2} \right) .$$

Jestliže $x = -3 - \sqrt{2}$, dostaneme stejnou řadu jako v bodě $-3 + \sqrt{2}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n} \left(-\sqrt{2} \right)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n} \cdot 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} .$$

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

Protože $0 < p = \frac{1}{\sqrt{2}} < \infty$, řada

- konverguje pro každé $x \in \left(-3-\sqrt{2}, -3+\sqrt{2}\right]$,
- diverguje pro každé $x \in \left(-\infty, -3-\sqrt{2}\right) \cup \left(-3+\sqrt{2}, \infty\right)$.

Stačí už jen vyšetřit konvergenci v koncových bodech intervalu konvergence

$$J = \left(-3-\sqrt{2},\ -3+\sqrt{2}\right).$$

Jestliže $x = -3-\sqrt{2}$, dostaneme stejnou řadu jako v bodě $-3+\sqrt{2}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n} \left(-\sqrt{2}\right)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n} \cdot 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Tedy řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$ konverguje i v bodě $x = -3-\sqrt{2}$.

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n} (x+3)^{2n}$.

Řešení

Protože $0 < p = \frac{1}{\sqrt{2}} < \infty$, řada

- konverguje pro každé $x \in \left[-3-\sqrt{2}, -3+\sqrt{2}\right]$,
- diverguje pro každé $x \in \left(-\infty, -3-\sqrt{2}\right) \cup \left(-3+\sqrt{2}, \infty\right)$.

Stačí už jen vyšetřit konvergenci v koncových bodech intervalu konvergence

$$J = \left(-3-\sqrt{2},\ -3+\sqrt{2}\right).$$

Jestliže $x = -3-\sqrt{2}$, dostaneme stejnou řadu jako v bodě $-3+\sqrt{2}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n} \left(-\sqrt{2}\right)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n} \cdot 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n} (x+3)^{2n}$ konverguje i v bodě $x = -3-\sqrt{2}$.

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

Protože $0 < p = \frac{1}{\sqrt{2}} < \infty$, řada

- konverguje pro každé $x \in \left[-3-\sqrt{2}, -3+\sqrt{2}\right]$,
- diverguje pro každé $x \in \left(-\infty, -3-\sqrt{2}\right) \cup \left(-3+\sqrt{2}, \infty\right)$.

Celkově dostáváme:

- **oborem konvergence** je interval $\left[-3-\sqrt{2}, -3+\sqrt{2}\right]$,

Mocninné řady

Příklad

Určete poloměr a obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n}(x+3)^{2n}$.

Řešení

Protože $0 < p = \frac{1}{\sqrt{2}} < \infty$, řada

- konverguje pro každé $x \in \left[-3-\sqrt{2}, -3+\sqrt{2}\right]$,
- diverguje pro každé $x \in \left(-\infty, -3-\sqrt{2}\right) \cup \left(-3+\sqrt{2}, \infty\right)$.

Celkově dostáváme:

- **oborem konvergence** je interval $\left[-3-\sqrt{2}, -3+\sqrt{2}\right]$,
- **poloměr konvergence** je $\rho = \frac{1}{p} = \sqrt{2}$.

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$.

Řešení

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$.

Řešení

Výraz $\sin x\cos x$ si vyjádříme jako Cauchyho součin řad

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Řešení

Výraz $\sin x \cos x$ si vyjádříme jako Cauchyho součin řad

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$$

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$.

Řešení

Výraz $\sin x \cos x$ si vyjádříme jako Cauchyho součin řad

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$$

Aplikujeme-li pro $x \in \mathbb{R}$ limitní podílové kritérium na řadu $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right|$, zjistíme, že tato řada konverguje, a tedy $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ konverguje absolutně na $\mathbb{R}$.

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Řešení

Výraz $\sin x \cos x$ si vyjádříme jako Cauchyho součin řad

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$$

Aplikujeme-li pro $x \in \mathbb{R}$ limitní podílové kritérium na řadu $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right|$, zjistíme, že tato řada konverguje, a tedy $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ konverguje absolutně na $\mathbb{R}$. Analogicky ukážeme, že i řada $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ konverguje absolutně na $\mathbb{R}$

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Řešení

Výraz $\sin x \cos x$ si vyjádříme jako Cauchyho součin řad

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$$

Aplikujeme-li pro $x \in \mathbb{R}$ limitní podílové kritérium na řadu $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right|$, zjistíme, že tato řada konverguje, a tedy $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ konverguje absolutně na $\mathbb{R}$. Analogicky ukážeme, že i řada $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ konverguje absolutně na $\mathbb{R}$, a tedy konverguje absolutně i Cauchyho součin těchto řad.

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Řešení

Výraz $\sin x \cos x$ si vyjádříme jako Cauchyho součin řad

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$$

Chceme-li tyto řady vynásobit, jako pomůcku můžeme použít "nekonečnou tabulku", která má v m-tém řádku a v n-tém sloupci součin n-tého členu první řady s m-tým členem druhé řady.

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Řešení

Výraz $\sin x \cos x$ si vyjádříme jako Cauchyho součin řad

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$$

Chceme-li tyto řady vynásobit, jako pomůcku můžeme použít "nekonečnou tabulku", která má v m-tém řádku a v n-tém sloupci součin n-tého členu první řady s m-tým členem druhé řady. Tedy:

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$.

Řešení

Výraz $\sin x \cos x$ si vyjádříme jako Cauchyho součin řad

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$$

Chceme-li tyto řady vynásobit, jako pomůcku můžeme použít "nekonečnou tabulku", která má v m-tém řádku a v n-tém sloupci součin n-tého členu první řady s m-tým členem druhé řady. Tedy:

x

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Řešení

Výraz $\sin x \cos x$ si vyjádříme jako Cauchyho součin řad

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$$

Chceme-li tyto řady vynásobit, jako pomůcku můžeme použít "nekonečnou tabulku", která má v m-tém řádku a v n-tém sloupci součin n-tého členu první řady s m-tým členem druhé řady. Tedy:

	x	$-\frac{x^3}{3!}$

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Řešení

Výraz $\sin x \cos x$ si vyjádříme jako Cauchyho součin řad

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$$

Chceme-li tyto řady vynásobit, jako pomůcku můžeme použít "nekonečnou tabulku", která má v m-tém řádku a v n-tém sloupci součin n-tého členu první řady s m-tým členem druhé řady. Tedy:

x	$-\frac{x^3}{3!}$	$\frac{x^5}{5!}$

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Řešení

Výraz $\sin x \cos x$ si vyjádříme jako Cauchyho součin řad

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$$

Chceme-li tyto řady vynásobit, jako pomůcku můžeme použít "nekonečnou tabulku", která má v m-tém řádku a v n-tém sloupci součin n-tého členu první řady s m-tým členem druhé řady. Tedy:

x	$-\frac{x^3}{3!}$	$\frac{x^5}{5!}$	$-\frac{x^7}{7!}$

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Řešení

Výraz $\sin x \cos x$ si vyjádříme jako Cauchyho součin řad

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$$

Chceme-li tyto řady vynásobit, jako pomůcku můžeme použít "nekonečnou tabulku", která má v m-tém řádku a v n-tém sloupci součin n-tého členu první řady s m-tým členem druhé řady. Tedy:

$$x \qquad -\frac{x^3}{3!} \qquad \frac{x^5}{5!} \qquad -\frac{x^7}{7!} \qquad \frac{x^9}{9!} \qquad \cdots$$

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Řešení

Výraz $\sin x \cos x$ si vyjádříme jako Cauchyho součin řad

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$$

Chceme-li tyto řady vynásobit, jako pomůcku můžeme použít "nekonečnou tabulku", která má v m-tém řádku a v n-tém sloupci součin n-tého členu první řady s m-tým členem druhé řady. Tedy:

	x	$-\frac{x^3}{3!}$	$\frac{x^5}{5!}$	$-\frac{x^7}{7!}$	$\frac{x^9}{9!}$	$\cdots$
$-\frac{x \cdot x^2}{2!}$						

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Řešení

Výraz $\sin x \cos x$ si vyjádříme jako Cauchyho součin řad

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$$

Chceme-li tyto řady vynásobit, jako pomůcku můžeme použít "nekonečnou tabulku", která má v m-tém řádku a v n-tém sloupci součin n-tého členu první řady s m-tým členem druhé řady. Tedy:

$$\begin{array}{cccccc}
 & x & -\frac{x^3}{3!} & \frac{x^5}{5!} & -\frac{x^7}{7!} & \frac{x^9}{9!} & \cdots \\
 & -\frac{x \cdot x^2}{2!} & \frac{x^3 \cdot x^2}{3!2!} & & & &
\end{array}$$

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$.

Řešení

Výraz $\sin x \cos x$ si vyjádříme jako Cauchyho součin řad

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$$

Chceme-li tyto řady vynásobit, jako pomůcku můžeme použít "nekonečnou tabulku", která má v m-tém řádku a v n-tém sloupci součin n-tého členu první řady s m-tým členem druhé řady. Tedy:

	x	$-\frac{x^3}{3!}$	$\frac{x^5}{5!}$	$-\frac{x^7}{7!}$	$\frac{x^9}{9!}$	$\cdots$
$-\frac{x \cdot x^2}{2!}$	$\frac{x^3 \cdot x^2}{3!2!}$	$-\frac{x^5 \cdot x^2}{5!2!}$			

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Řešení

Výraz $\sin x \cos x$ si vyjádříme jako Cauchyho součin řad

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$$

Chceme-li tyto řady vynásobit, jako pomůcku můžeme použít "nekonečnou tabulku", která má v m-tém řádku a v n-tém sloupci součin n-tého členu první řady s m-tým členem druhé řady. Tedy:

$$\begin{array}{cccccc} x & -\frac{x^3}{3!} & \frac{x^5}{5!} & -\frac{x^7}{7!} & \frac{x^9}{9!} & \cdots \\ -\frac{x \cdot x^2}{2!} & \frac{x^3 \cdot x^2}{3!2!} & -\frac{x^5 \cdot x^2}{5!2!} & \frac{x^7 \cdot x^2}{7!2!} & & \end{array}$$

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Řešení

Výraz $\sin x \cos x$ si vyjádříme jako Cauchyho součin řad

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$$

Chceme-li tyto řady vynásobit, jako pomůcku můžeme použít "nekonečnou tabulku", která má v m-tém řádku a v n-tém sloupci součin n-tého členu první řady s m-tým členem druhé řady. Tedy:

$$\begin{array}{cccccc} x & -\frac{x^3}{3!} & \frac{x^5}{5!} & -\frac{x^7}{7!} & \frac{x^9}{9!} & \cdots \\ -\frac{x \cdot x^2}{2!} & \frac{x^3 \cdot x^2}{3!2!} & -\frac{x^5 \cdot x^2}{5!2!} & \frac{x^7 \cdot x^2}{7!2!} & -\frac{x^9 \cdot x^2}{9!2!} & \cdots \end{array}$$

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Řešení

Výraz $\sin x \cos x$ si vyjádříme jako Cauchyho součin řad

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$$

Chceme-li tyto řady vynásobit, jako pomůcku můžeme použít "nekonečnou tabulku", která má v m-tém řádku a v n-tém sloupci součin n-tého členu první řady s m-tým členem druhé řady. Tedy:

$$\begin{array}{cccccc}
x & -\frac{x^3}{3!} & \frac{x^5}{5!} & -\frac{x^7}{7!} & \frac{x^9}{9!} & \cdots \\
-\frac{x\cdot x^2}{2!} & \frac{x^3\cdot x^2}{3!2!} & -\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!} & \frac{x^7\cdot x^2}{7!2!} & -\frac{x^9\cdot x^2}{9!2!} & \cdots \\
\frac{x\cdot x^4}{4!} & & & & &
\end{array}$$

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$.

Řešení

Výraz $\sin x \cos x$ si vyjádříme jako Cauchyho součin řad

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$$

Chceme-li tyto řady vynásobit, jako pomůcku můžeme použít "nekonečnou tabulku", která má v m-tém řádku a v n-tém sloupci součin n-tého členu první řady s m-tým členem druhé řady. Tedy:

$$\begin{array}{cccccc}
x & -\frac{x^3}{3!} & \frac{x^5}{5!} & -\frac{x^7}{7!} & \frac{x^9}{9!} & \cdots \\
-\frac{x\cdot x^2}{2!} & \frac{x^3\cdot x^2}{3!2!} & -\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!} & \frac{x^7\cdot x^2}{7!2!} & -\frac{x^9\cdot x^2}{9!2!} & \cdots \\
\frac{x\cdot x^4}{4!} & -\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!} & & & &
\end{array}$$

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Řešení

Výraz $\sin x \cos x$ si vyjádříme jako Cauchyho součin řad

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$$

Chceme-li tyto řady vynásobit, jako pomůcku můžeme použít "nekonečnou tabulku", která má v m-tém řádku a v n-tém sloupci součin n-tého členu první řady s m-tým členem druhé řady. Tedy:

$$\begin{array}{cccccc}
x & -\frac{x^3}{3!} & \frac{x^5}{5!} & -\frac{x^7}{7!} & \frac{x^9}{9!} & \cdots \\
-\frac{x \cdot x^2}{2!} & \frac{x^3 \cdot x^2}{3!2!} & -\frac{x^5 \cdot x^2}{5!2!} & \frac{x^7 \cdot x^2}{7!2!} & -\frac{x^9 \cdot x^2}{9!2!} & \cdots \\
\frac{x \cdot x^4}{4!} & -\frac{x^3 \cdot x^4}{3!4!} & \frac{x^5 \cdot x^4}{5!4!} & & &
\end{array}$$

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Řešení

Výraz $\sin x \cos x$ si vyjádříme jako Cauchyho součin řad

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$$

Chceme-li tyto řady vynásobit, jako pomůcku můžeme použít "nekonečnou tabulku", která má v m-tém řádku a v n-tém sloupci součin n-tého členu první řady s m-tým členem druhé řady. Tedy:

$$\begin{array}{cccccc}
x & -\frac{x^3}{3!} & \frac{x^5}{5!} & -\frac{x^7}{7!} & \frac{x^9}{9!} & \cdots \\
-\frac{x\cdot x^2}{2!} & \frac{x^3\cdot x^2}{3!2!} & -\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!} & \frac{x^7\cdot x^2}{7!2!} & -\frac{x^9\cdot x^2}{9!2!} & \cdots \\
\frac{x\cdot x^4}{4!} & -\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!} & \frac{x^5\cdot x^4}{5!4!} & -\frac{x^7\cdot x^4}{7!4!} & &
\end{array}$$

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Řešení

Výraz $\sin x \cos x$ si vyjádříme jako Cauchyho součin řad

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$$

Chceme-li tyto řady vynásobit, jako pomůcku můžeme použít "nekonečnou tabulku", která má v m-tém řádku a v n-tém sloupci součin n-tého členu první řady s m-tým členem druhé řady. Tedy:

$$\begin{array}{cccccc}
x & -\frac{x^3}{3!} & \frac{x^5}{5!} & -\frac{x^7}{7!} & \frac{x^9}{9!} & \cdots \\
-\frac{x \cdot x^2}{2!} & \frac{x^3 \cdot x^2}{3!2!} & -\frac{x^5 \cdot x^2}{5!2!} & \frac{x^7 \cdot x^2}{7!2!} & -\frac{x^9 \cdot x^2}{9!2!} & \cdots \\
\frac{x \cdot x^4}{4!} & -\frac{x^3 \cdot x^4}{3!4!} & \frac{x^5 \cdot x^4}{5!4!} & -\frac{x^7 \cdot x^4}{7!4!} & \frac{x^9 \cdot x^4}{9!4!} & \cdots
\end{array}$$

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Řešení

Výraz $\sin x \cos x$ si vyjádříme jako Cauchyho součin řad

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$$

Chceme-li tyto řady vynásobit, jako pomůcku můžeme použít "nekonečnou tabulku", která má v m-tém řádku a v n-tém sloupci součin n-tého členu první řady s m-tým členem druhé řady. Tedy:

$$\begin{array}{cccccc}
x & -\frac{x^3}{3!} & \frac{x^5}{5!} & -\frac{x^7}{7!} & \frac{x^9}{9!} & \cdots \\
-\frac{x \cdot x^2}{2!} & \frac{x^3 \cdot x^2}{3!2!} & -\frac{x^5 \cdot x^2}{5!2!} & \frac{x^7 \cdot x^2}{7!2!} & -\frac{x^9 \cdot x^2}{9!2!} & \cdots \\
\frac{x \cdot x^4}{4!} & -\frac{x^3 \cdot x^4}{3!4!} & \frac{x^5 \cdot x^4}{5!4!} & -\frac{x^7 \cdot x^4}{7!4!} & \frac{x^9 \cdot x^4}{9!4!} & \cdots \\
-\frac{x \cdot x^6}{6!} & & & & &
\end{array}$$

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Řešení

Výraz $\sin x \cos x$ si vyjádříme jako Cauchyho součin řad

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$$

Chceme-li tyto řady vynásobit, jako pomůcku můžeme použít "nekonečnou tabulku", která má v m-tém řádku a v n-tém sloupci součin n-tého členu první řady s m-tým členem druhé řady. Tedy:

$$\begin{array}{cccccc}
x & -\frac{x^3}{3!} & \frac{x^5}{5!} & -\frac{x^7}{7!} & \frac{x^9}{9!} & \cdots \\
-\frac{x \cdot x^2}{2!} & \frac{x^3 \cdot x^2}{3!2!} & -\frac{x^5 \cdot x^2}{5!2!} & \frac{x^7 \cdot x^2}{7!2!} & -\frac{x^9 \cdot x^2}{9!2!} & \cdots \\
\frac{x \cdot x^4}{4!} & -\frac{x^3 \cdot x^4}{3!4!} & \frac{x^5 \cdot x^4}{5!4!} & -\frac{x^7 \cdot x^4}{7!4!} & \frac{x^9 \cdot x^4}{9!4!} & \cdots \\
-\frac{x \cdot x^6}{6!} & \frac{x^3 \cdot x^6}{3!6!} & & & &
\end{array}$$

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Řešení

Výraz $\sin x \cos x$ si vyjádříme jako Cauchyho součin řad

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$$

Chceme-li tyto řady vynásobit, jako pomůcku můžeme použít "nekonečnou tabulku", která má v m-tém řádku a v n-tém sloupci součin n-tého členu první řady s m-tým členem druhé řady. Tedy:

$$\begin{array}{cccccc}
x & -\frac{x^3}{3!} & \frac{x^5}{5!} & -\frac{x^7}{7!} & \frac{x^9}{9!} & \cdots \\
-\frac{x \cdot x^2}{2!} & \frac{x^3 \cdot x^2}{3!2!} & -\frac{x^5 \cdot x^2}{5!2!} & \frac{x^7 \cdot x^2}{7!2!} & -\frac{x^9 \cdot x^2}{9!2!} & \cdots \\
\frac{x \cdot x^4}{4!} & -\frac{x^3 \cdot x^4}{3!4!} & \frac{x^5 \cdot x^4}{5!4!} & -\frac{x^7 \cdot x^4}{7!4!} & \frac{x^9 \cdot x^4}{9!4!} & \cdots \\
-\frac{x \cdot x^6}{6!} & \frac{x^3 \cdot x^6}{3!6!} & -\frac{x^5 \cdot x^6}{5!6!} & & &
\end{array}$$

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$.

Řešení

Výraz $\sin x \cos x$ si vyjádříme jako Cauchyho součin řad

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$$

Chceme-li tyto řady vynásobit, jako pomůcku můžeme použít "nekonečnou tabulku", která má v m-tém řádku a v n-tém sloupci součin n-tého členu první řady s m-tým členem druhé řady. Tedy:

$$\begin{array}{cccccc}
x & -\frac{x^3}{3!} & \frac{x^5}{5!} & -\frac{x^7}{7!} & \frac{x^9}{9!} & \cdots \\
-\frac{x\cdot x^2}{2!} & \frac{x^3\cdot x^2}{3!2!} & -\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!} & \frac{x^7\cdot x^2}{7!2!} & -\frac{x^9\cdot x^2}{9!2!} & \cdots \\
\frac{x\cdot x^4}{4!} & -\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!} & \frac{x^5\cdot x^4}{5!4!} & -\frac{x^7\cdot x^4}{7!4!} & \frac{x^9\cdot x^4}{9!4!} & \cdots \\
-\frac{x\cdot x^6}{6!} & \frac{x^3\cdot x^6}{3!6!} & -\frac{x^5\cdot x^6}{5!6!} & \frac{x^7\cdot x^6}{7!6!} & &
\end{array}$$

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Řešení

Výraz $\sin x \cos x$ si vyjádříme jako Cauchyho součin řad

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$$

Chceme-li tyto řady vynásobit, jako pomůcku můžeme použít "nekonečnou tabulku", která má v m-tém řádku a v n-tém sloupci součin n-tého členu první řady s m-tým členem druhé řady. Tedy:

$$\begin{array}{cccccc}
x & -\frac{x^3}{3!} & \frac{x^5}{5!} & -\frac{x^7}{7!} & \frac{x^9}{9!} & \cdots \\
-\frac{x \cdot x^2}{2!} & \frac{x^3 \cdot x^2}{3!2!} & -\frac{x^5 \cdot x^2}{5!2!} & \frac{x^7 \cdot x^2}{7!2!} & -\frac{x^9 \cdot x^2}{9!2!} & \cdots \\
\frac{x \cdot x^4}{4!} & -\frac{x^3 \cdot x^4}{3!4!} & \frac{x^5 \cdot x^4}{5!4!} & -\frac{x^7 \cdot x^4}{7!4!} & \frac{x^9 \cdot x^4}{9!4!} & \cdots \\
-\frac{x \cdot x^6}{6!} & \frac{x^3 \cdot x^6}{3!6!} & -\frac{x^5 \cdot x^6}{5!6!} & \frac{x^7 \cdot x^6}{7!6!} & -\frac{x^9 \cdot x^6}{9!6!} & \cdots \\
\vdots & & & & &
\end{array}$$

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Řešení

Výraz $\sin x \cos x$ si vyjádříme jako Cauchyho součin řad

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$$

Chceme-li tyto řady vynásobit, jako pomůcku můžeme použít "nekonečnou tabulku", která má v m-tém řádku a v n-tém sloupci součin n-tého členu první řady s m-tým členem druhé řady. Tedy:

$$\begin{array}{cccccc}
x & -\frac{x^3}{3!} & \frac{x^5}{5!} & -\frac{x^7}{7!} & \frac{x^9}{9!} & \cdots \\
-\frac{x\cdot x^2}{2!} & \frac{x^3\cdot x^2}{3!2!} & -\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!} & \frac{x^7\cdot x^2}{7!2!} & -\frac{x^9\cdot x^2}{9!2!} & \cdots \\
\frac{x\cdot x^4}{4!} & -\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!} & \frac{x^5\cdot x^4}{5!4!} & -\frac{x^7\cdot x^4}{7!4!} & \frac{x^9\cdot x^4}{9!4!} & \cdots \\
-\frac{x\cdot x^6}{6!} & \frac{x^3\cdot x^6}{3!6!} & -\frac{x^5\cdot x^6}{5!6!} & \frac{x^7\cdot x^6}{7!6!} & -\frac{x^9\cdot x^6}{9!6!} & \cdots \\
\vdots & & & & &
\end{array}$$

Cauchyho součin daných řad je řada, jejichž členy jsou součty prvků na vedlejších diagonálách naší "tabulky".

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Řešení

$2\sin x \cos x =$

$$\begin{array}{cccccc}
x & -\frac{x^3}{3!} & \frac{x^5}{5!} & -\frac{x^7}{7!} & \frac{x^9}{9!} & \cdots \\
-\frac{x\cdot x^2}{2!} & \frac{x^3\cdot x^2}{3!2!} & -\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!} & \frac{x^7\cdot x^2}{7!2!} & -\frac{x^9\cdot x^2}{9!2!} & \cdots \\
\frac{x\cdot x^4}{4!} & -\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!} & \frac{x^5\cdot x^4}{5!4!} & -\frac{x^7\cdot x^4}{7!4!} & \frac{x^9\cdot x^4}{9!4!} & \cdots \\
-\frac{x\cdot x^6}{6!} & \frac{x^3\cdot x^6}{3!6!} & -\frac{x^5\cdot x^6}{5!6!} & \frac{x^7\cdot x^6}{7!6!} & -\frac{x^9\cdot x^6}{9!6!} & \cdots \\
\vdots & & & & &
\end{array}$$

Cauchyho součin daných řad je řada, jejichž členy jsou součty prvků na vedlejších diagonálách naší "tabulky".

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$.

Řešení

$$2\sin x\cos x = 2\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right] =$$

$$\begin{array}{cccccc}
x & -\frac{x^3}{3!} & \frac{x^5}{5!} & -\frac{x^7}{7!} & \frac{x^9}{9!} & \cdots \\
-\frac{x\cdot x^2}{2!} & \frac{x^3\cdot x^2}{3!2!} & -\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!} & \frac{x^7\cdot x^2}{7!2!} & -\frac{x^9\cdot x^2}{9!2!} & \cdots \\
\frac{x\cdot x^4}{4!} & -\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!} & \frac{x^5\cdot x^4}{5!4!} & -\frac{x^7\cdot x^4}{7!4!} & \frac{x^9\cdot x^4}{9!4!} & \cdots \\
-\frac{x\cdot x^6}{6!} & \frac{x^3\cdot x^6}{3!6!} & -\frac{x^5\cdot x^6}{5!6!} & \frac{x^7\cdot x^6}{7!6!} & -\frac{x^9\cdot x^6}{9!6!} & \cdots \\
\vdots & & & & &
\end{array}$$

Cauchyho součin daných řad je řada, jejichž členy jsou součty prvků na vedlejších diagonálách naší "tabulky".

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Řešení

$$2\sin x\cos x = 2\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right] = 2\left[x\right.$$

$$\begin{array}{cccccc}
x & -\frac{x^3}{3!} & \frac{x^5}{5!} & -\frac{x^7}{7!} & \frac{x^9}{9!} & \dots \\
-\frac{x\cdot x^2}{2!} & \frac{x^3\cdot x^2}{3!2!} & -\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!} & \frac{x^7\cdot x^2}{7!2!} & -\frac{x^9\cdot x^2}{9!2!} & \dots \\
\frac{x\cdot x^4}{4!} & -\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!} & \frac{x^5\cdot x^4}{5!4!} & -\frac{x^7\cdot x^4}{7!4!} & \frac{x^9\cdot x^4}{9!4!} & \dots \\
-\frac{x\cdot x^6}{6!} & \frac{x^3\cdot x^6}{3!6!} & -\frac{x^5\cdot x^6}{5!6!} & \frac{x^7\cdot x^6}{7!6!} & -\frac{x^9\cdot x^6}{9!6!} & \dots \\
\vdots & & & & &
\end{array}$$

Cauchyho součin daných řad je řada, jejichž členy jsou součty prvků na vedlejších diagonálách naší "tabulky".

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Řešení

$$2\sin x\cos x = 2\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right] = 2\left[x - \left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)\right.$$

$$\begin{array}{cccccc}
x & -\frac{x^3}{3!} & \frac{x^5}{5!} & -\frac{x^7}{7!} & \frac{x^9}{9!} & \cdots \\
-\frac{x\cdot x^2}{2!} & \frac{x^3\cdot x^2}{3!2!} & -\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!} & \frac{x^7\cdot x^2}{7!2!} & -\frac{x^9\cdot x^2}{9!2!} & \cdots \\
\frac{x\cdot x^4}{4!} & -\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!} & \frac{x^5\cdot x^4}{5!4!} & -\frac{x^7\cdot x^4}{7!4!} & \frac{x^9\cdot x^4}{9!4!} & \cdots \\
-\frac{x\cdot x^6}{6!} & \frac{x^3\cdot x^6}{3!6!} & -\frac{x^5\cdot x^6}{5!6!} & \frac{x^7\cdot x^6}{7!6!} & -\frac{x^9\cdot x^6}{9!6!} & \cdots \\
\vdots & & & & &
\end{array}$$

Cauchyho součin daných řad je řada, jejichž členy jsou součty prvků na vedlejších diagonálách naší "tabulky".

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Řešení

$$2\sin x\cos x = 2\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right] = 2\left[x - \left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+\right.$$
$$\left. + \left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)\right.$$

$$\begin{array}{cccccc}
x & -\frac{x^3}{3!} & \frac{x^5}{5!} & -\frac{x^7}{7!} & \frac{x^9}{9!} & \cdots \\
-\frac{x\cdot x^2}{2!} & \frac{x^3\cdot x^2}{3!2!} & -\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!} & \frac{x^7\cdot x^2}{7!2!} & -\frac{x^9\cdot x^2}{9!2!} & \cdots \\
\frac{x\cdot x^4}{4!} & -\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!} & \frac{x^5\cdot x^4}{5!4!} & -\frac{x^7\cdot x^4}{7!4!} & \frac{x^9\cdot x^4}{9!4!} & \cdots \\
-\frac{x\cdot x^6}{6!} & \frac{x^3\cdot x^6}{3!6!} & -\frac{x^5\cdot x^6}{5!6!} & \frac{x^7\cdot x^6}{7!6!} & -\frac{x^9\cdot x^6}{9!6!} & \cdots \\
\vdots & & & & &
\end{array}$$

Cauchyho součin daných řad je řada, jejichž členy jsou součty prvků na vedlejších diagonálách naší "tabulky".

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$.

Řešení

$$2\sin x\cos x = 2\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right] = 2\left[x - \left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots\right] =$$

$$\begin{array}{cccccc}
x & -\frac{x^3}{3!} & \frac{x^5}{5!} & -\frac{x^7}{7!} & \frac{x^9}{9!} & \cdots \\
-\frac{x\cdot x^2}{2!} & \frac{x^3\cdot x^2}{3!2!} & -\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!} & \frac{x^7\cdot x^2}{7!2!} & -\frac{x^9\cdot x^2}{9!2!} & \cdots \\
\frac{x\cdot x^4}{4!} & -\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!} & \frac{x^5\cdot x^4}{5!4!} & -\frac{x^7\cdot x^4}{7!4!} & \frac{x^9\cdot x^4}{9!4!} & \cdots \\
-\frac{x\cdot x^6}{6!} & \frac{x^3\cdot x^6}{3!6!} & -\frac{x^5\cdot x^6}{5!6!} & \frac{x^7\cdot x^6}{7!6!} & -\frac{x^9\cdot x^6}{9!6!} & \cdots \\
\vdots & & & & &
\end{array}$$

Cauchyho součin daných řad je řada, jejichž členy jsou součty prvků na vedlejších diagonálách naší "tabulky".

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$.

Řešení

$$2\sin x\cos x = 2\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right] = 2\left[x - \left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots\right] =$$

Roznásobíme závorku číslem dvě.

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$.

Řešení

$$2\sin x\cos x = 2\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right] = 2\left[x - \left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots\right] =$$

$$= 2x - 2\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+2\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-2\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\right.$$

$$\left.+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots =$$

Roznásobíme závorku číslem dvě.

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Řešení

$$2\sin x \cos x = 2\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right] = 2\left[x - \left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x \cdot x^2}{2!}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{x^5}{5!} + \frac{x^3 \cdot x^2}{3!2!} + \frac{x \cdot x^4}{4!}\right) - \left(\frac{x^7}{7!} + \frac{x^5 \cdot x^2}{5!2!} + \frac{x^3 \cdot x^4}{3!4!} + \frac{x \cdot x^6}{6!}\right) + \cdots \right] =$$

$$= 2x - 2\left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x \cdot x^2}{2!}\right) + 2\left(\frac{x^5}{5!} + \frac{x^3 \cdot x^2}{3!2!} + \frac{x \cdot x^4}{4!}\right) - 2\left(\frac{x^7}{7!} + \frac{x^5 \cdot x^2}{5!2!} + \right.$$

$$\left. + \frac{x^3 \cdot x^4}{3!4!} + \frac{x \cdot x^6}{6!}\right) + \cdots =$$

$$2x = x + x =$$

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$.

Řešení

$$2\sin x\cos x = 2\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right] = 2\left[x - \left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots\right]=$$

$$= 2x - 2\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+2\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-2\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\right.$$

$$\left.+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots=$$

$$2x = x + x = \frac{x^0\cdot x^1}{0!1!}+\frac{x^1\cdot x^0}{1!0!} = \sum_{k=0}^{1}\frac{x^k\cdot x^{1-k}}{k!(1-k)!}$$

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Řešení

$$2\sin x\cos x = 2\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right] = 2\left[x - \left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots\right]=$$

$$= 2x - 2\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+2\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-2\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\right.$$

$$\left.+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots = \sum_{k=0}^{1}\frac{x^k\cdot x^{1-k}}{k!(1-k)!}$$

$$2x = x + x = \frac{x^0\cdot x^1}{0!1!}+\frac{x^1\cdot x^0}{1!0!} = \sum_{k=0}^{1}\frac{x^k\cdot x^{1-k}}{k!(1-k)!}$$

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Řešení

$$2\sin x\cos x = 2\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right] = 2\left[x - \left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots\right]=$$
$$=2x-2\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+2\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-2\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\right.$$
$$\left.+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots = \sum_{k=0}^{1}\frac{x^k\cdot x^{1-k}}{k!(1-k)!}$$

$$2\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)=$$

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Řešení

$$2\sin x\cos x = 2\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right] = 2\left[x - \left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots\right] =$$
$$= 2x - 2\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+2\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-2\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\right.$$
$$\left.+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots = \sum_{k=0}^{1}\frac{x^k\cdot x^{1-k}}{k!(1-k)!}$$

$$2\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right) = \frac{x^0\cdot x^3}{0!3!}+\frac{x\cdot x^2}{1!2!}+\frac{x^2\cdot x}{2!1!}+\frac{x^3x^0}{3!0!} =$$

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Řešení

$$2\sin x\cos x = 2\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right] = 2\left[x - \left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots\right] =$$

$$= 2x - 2\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+2\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-2\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\right.$$

$$\left.+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots = \sum_{k=0}^{1}\frac{x^k\cdot x^{1-k}}{k!(1-k)!}$$

$$2\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right) = \frac{x^0\cdot x^3}{0!3!}+\frac{x\cdot x^2}{1!2!}+\frac{x^2\cdot x}{2!1!}+\frac{x^3x^0}{3!0!} = \sum_{k=0}^{3}\frac{x^k\cdot x^{3-k}}{k!(3-k)!}$$

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$.

Řešení

$$2\sin x\cos x = 2\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right] = 2\left[x - \left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots\right]=$$

$$=2x-2\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+2\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-2\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\right.$$

$$\left.+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots=\sum_{k=0}^{1}\frac{x^k\cdot x^{1-k}}{k!(1-k)!}-\sum_{k=0}^{3}\frac{x^k\cdot x^{3-k}}{k!(3-k)!}$$

$$2\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)=\frac{x^0\cdot x^3}{0!3!}+\frac{x\cdot x^2}{1!2!}+\frac{x^2\cdot x}{2!1!}+\frac{x^3x^0}{3!0!}=\sum_{k=0}^{3}\frac{x^k\cdot x^{3-k}}{k!(3-k)!}$$

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$.

Řešení

$$2\sin x\cos x = 2\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right] = 2\left[x - \left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots\right]=$$

$$=2x-2\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+2\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-2\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\right.$$

$$\left.+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots = \sum_{k=0}^{1}\frac{x^k\cdot x^{1-k}}{k!(1-k)!}-\sum_{k=0}^{3}\frac{x^k\cdot x^{3-k}}{k!(3-k)!}$$

$$2\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)=$$

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Řešení

$$2\sin x\cos x = 2\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right] = 2\left[x - \left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots\right]=$$

$$=2x-2\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+2\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-2\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\right.$$

$$\left.+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots = \sum_{k=0}^{1}\frac{x^k\cdot x^{1-k}}{k!(1-k)!}-\sum_{k=0}^{3}\frac{x^k\cdot x^{3-k}}{k!(3-k)!}$$

$$2\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)=\frac{x^0x^5}{0!5!}+\frac{x^1\cdot x^4}{1!4!}+\frac{x^2\cdot x^3}{2!3!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x^4\cdot x^1}{4!1!}+$$

$$+\frac{x^5x^0}{5!0!}=$$

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Řešení

$$2\sin x\cos x = 2\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right] = 2\left[x - \left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots\right]=$$
$$= 2x - 2\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+2\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-2\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\right.$$
$$\left.+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots = \sum_{k=0}^{1}\frac{x^k\cdot x^{1-k}}{k!(1-k)!}-\sum_{k=0}^{3}\frac{x^k\cdot x^{3-k}}{k!(3-k)!}$$

$$2\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)=\frac{x^0x^5}{0!5!}+\frac{x^1\cdot x^4}{1!4!}+\frac{x^2\cdot x^3}{2!3!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x^4\cdot x^1}{4!1!}+$$
$$+\frac{x^5x^0}{5!0!}=\sum_{k=0}^{5}\frac{x^k\cdot x^{5-k}}{k!(5-k)!}$$

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Řešení

$$2\sin x\cos x = 2\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right] = 2\left[x - \left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots\right]=$$

$$= 2x - 2\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+2\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-2\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\right.$$

$$\left.+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots = \sum_{k=0}^{1}\frac{x^k\cdot x^{1-k}}{k!(1-k)!}-\sum_{k=0}^{3}\frac{x^k\cdot x^{3-k}}{k!(3-k)!}+$$

$$+\sum_{k=0}^{5}\frac{x^k\cdot x^{5-k}}{k!(5-k)!}$$

$$2\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)=\frac{x^0x^5}{0!5!}+\frac{x^1\cdot x^4}{1!4!}+\frac{x^2\cdot x^3}{2!3!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x^4\cdot x^1}{4!1!}+$$

$$+\frac{x^5x^0}{5!0!}=\sum_{k=0}^{5}\frac{x^k\cdot x^{5-k}}{k!(5-k)!}$$

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Řešení

$$2\sin x\cos x = 2\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right] = 2\left[x - \left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots\right] =$$

$$= 2x - 2\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+2\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-2\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\right.$$

$$\left.+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots = \sum_{k=0}^{1}\frac{x^k\cdot x^{1-k}}{k!(1-k)!}-\sum_{k=0}^{3}\frac{x^k\cdot x^{3-k}}{k!(3-k)!}+$$

$$+\sum_{k=0}^{5}\frac{x^k\cdot x^{5-k}}{k!(5-k)!}$$

$$2\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right) =$$

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Řešení

$$2\sin x\cos x = 2\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right] = 2\left[x - \left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots\right]=$$

$$= 2x - 2\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+2\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-2\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\right.$$

$$\left.+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots = \sum_{k=0}^{1}\frac{x^k\cdot x^{1-k}}{k!(1-k)!}-\sum_{k=0}^{3}\frac{x^k\cdot x^{3-k}}{k!(3-k)!}+$$

$$+\sum_{k=0}^{5}\frac{x^k\cdot x^{5-k}}{k!(5-k)!}$$

$$2\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)=\frac{x^0\cdot x^7}{0!7!}+\frac{x^1\cdot x^6}{1!6!}+\frac{x^2\cdot x^5}{2!5!}+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+$$

$$+\frac{x^4\cdot x^3}{4!3!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\frac{x^6\cdot x^1}{6!1!}+\frac{x^7\cdot x^0}{7!0!}=$$

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Řešení

$$2\sin x\cos x = 2\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right] = 2\left[x - \left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots\right]=$$

$$= 2x - 2\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+2\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-2\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\right.$$

$$\left.+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots = \sum_{k=0}^{1}\frac{x^k\cdot x^{1-k}}{k!(1-k)!}-\sum_{k=0}^{3}\frac{x^k\cdot x^{3-k}}{k!(3-k)!}+$$

$$+\sum_{k=0}^{5}\frac{x^k\cdot x^{5-k}}{k!(5-k)!}$$

$$2\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)=\frac{x^0\cdot x^7}{0!7!}+\frac{x^1\cdot x^6}{1!6!}+\frac{x^2\cdot x^5}{2!5!}+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+$$

$$+\frac{x^4\cdot x^3}{4!3!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\frac{x^6\cdot x^1}{6!1!}+\frac{x^7\cdot x^0}{7!0!}=\sum_{k=0}^{7}\frac{x^k\cdot x^{7-k}}{k!(7-k)!}$$

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Řešení

$$2\sin x\cos x = 2\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right] = 2\left[x - \left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots\right]=$$

$$= 2x - 2\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+2\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-2\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\right.$$

$$\left.+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots = \sum_{k=0}^{1}\frac{x^k\cdot x^{1-k}}{k!(1-k)!}-\sum_{k=0}^{3}\frac{x^k\cdot x^{3-k}}{k!(3-k)!}+$$

$$+\sum_{k=0}^{5}\frac{x^k\cdot x^{5-k}}{k!(5-k)!}-\sum_{k=0}^{7}\frac{x^k\cdot x^{7-k}}{k!(7-k)!}$$

$$2\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)=\frac{x^0\cdot x^7}{0!7!}+\frac{x^1\cdot x^6}{1!6!}+\frac{x^2\cdot x^5}{2!5!}+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+$$

$$+\frac{x^4\cdot x^3}{4!3!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\frac{x^6\cdot x^1}{6!1!}+\frac{x^7\cdot x^0}{7!0!}=\sum_{k=0}^{7}\frac{x^k\cdot x^{7-k}}{k!(7-k)!}$$

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Řešení

$$2\sin x\cos x = 2\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right] = 2\left[x - \left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots\right]=$$

$$=2x-2\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+2\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-2\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\right.$$

$$\left.+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots = \sum_{k=0}^{1}\frac{x^k\cdot x^{1-k}}{k!(1-k)!}-\sum_{k=0}^{3}\frac{x^k\cdot x^{3-k}}{k!(3-k)!}+$$

$$+\sum_{k=0}^{5}\frac{x^k\cdot x^{5-k}}{k!(5-k)!}-\sum_{k=0}^{7}\frac{x^k\cdot x^{7-k}}{k!(7-k)!}+\cdots=$$

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Řešení

$$2\sin x\cos x = 2\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right] = 2\left[x-\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots\right]=$$
$$=2x-2\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+2\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-2\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\right.$$
$$\left.+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots = \sum_{k=0}^{1}\frac{x^k\cdot x^{1-k}}{k!(1-k)!}-\sum_{k=0}^{3}\frac{x^k\cdot x^{3-k}}{k!(3-k)!}+$$
$$+\sum_{k=0}^{5}\frac{x^k\cdot x^{5-k}}{k!(5-k)!}-\sum_{k=0}^{7}\frac{x^k\cdot x^{7-k}}{k!(7-k)!}+\cdots=$$

Protože máme nekonečný součet (sčítáme konečné řady), můžeme z něj též udělat nekonečnou řadu, jejíž členy budou konečné řady.

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$.

Řešení

$$2\sin x\cos x = 2\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right] = 2\left[x - \left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots\right]=$$
$$= 2x - 2\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+2\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-2\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\right.$$
$$\left.+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots = \sum_{k=0}^{1}\frac{x^k\cdot x^{1-k}}{k!(1-k)!}-\sum_{k=0}^{3}\frac{x^k\cdot x^{3-k}}{k!(3-k)!}+$$
$$+\sum_{k=0}^{5}\frac{x^k\cdot x^{5-k}}{k!(5-k)!}-\sum_{k=0}^{7}\frac{x^k\cdot x^{7-k}}{k!(7-k)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}$$

Protože máme nekonečný součet (sčítáme konečné řady), můžeme z něj též udělat nekonečnou řadu, jejíž členy budou konečné řady.

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Řešení

$$2\sin x\cos x = 2\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right] = 2\left[x - \left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+\right.$$

$$\left. + \left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right) - \left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots\right] =$$

$$= 2x - 2\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right) + 2\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right) - 2\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\right.$$

$$\left.+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots = +\sum_{k=0}^{1}\frac{x^k\cdot x^{1-k}}{k!(1-k)!} - \sum_{k=0}^{3}\frac{x^k\cdot x^{3-k}}{k!(3-k)!}+$$

$$+\sum_{k=0}^{5}\frac{x^k\cdot x^{5-k}}{k!(5-k)!} - \sum_{k=0}^{7}\frac{x^k\cdot x^{7-k}}{k!(7-k)!}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n \qquad\qquad\qquad\right)$$

Protože máme nekonečný součet (sčítáme konečné řady), můžeme z něj též udělat nekonečnou řadu, jejíž členy budou konečné řady.

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Řešení

$$2\sin x\cos x = 2\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right] = 2\left[x - \left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots\right]=$$

$$= 2x - 2\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+2\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-2\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\right.$$

$$\left.+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots = \sum_{k=0}^{1}\frac{x^k\cdot x^{1-k}}{k!(1-k)!}-\sum_{k=0}^{3}\frac{x^k\cdot x^{3-k}}{k!(3-k)!}+$$

$$+\sum_{k=0}^{5}\frac{x^k\cdot x^{5-k}}{k!(5-k)!}-\sum_{k=0}^{7}\frac{x^k\cdot x^{7-k}}{k!(7-k)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\sum_{k=0}\qquad\qquad\right)$$

Protože máme nekonečný součet (sčítáme konečné řady), můžeme z něj též udělat nekonečnou řadu, jejíž členy budou konečné řady.

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Řešení

$$2\sin x\cos x = 2\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right] = 2\left[x - \left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots\right]=$$

$$= 2x - 2\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+2\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-2\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\right.$$

$$\left.+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots = \sum_{k=0}^{1}\frac{x^k\cdot x^{1-k}}{k!(1-k)!}-\sum_{k=0}^{3}\frac{x^k\cdot x^{3-k}}{k!(3-k)!}+$$

$$+\sum_{k=0}^{5}\frac{x^k\cdot x^{5-k}}{k!(5-k)!}-\sum_{k=0}^{7}\frac{x^k\cdot x^{7-k}}{k!(7-k)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\sum_{k=0}^{2n+1}\qquad\right)$$

Protože máme nekonečný součet (sčítáme konečné řady), můžeme z něj též udělat nekonečnou řadu, jejíž členy budou konečné řady.

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Řešení

$$2\sin x\cos x = 2\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right] = 2\left[x - \left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots\right]=$$

$$= 2x - 2\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+2\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-2\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\right.$$

$$\left.+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots = \sum_{k=0}^{1}\frac{x^k\cdot x^{1-k}}{k!(1-k)!}-\sum_{k=0}^{3}\frac{x^k\cdot x^{3-k}}{k!(3-k)!}+$$

$$+\sum_{k=0}^{5}\frac{x^k\cdot x^{5-k}}{k!(5-k)!}-\sum_{k=0}^{7}\frac{x^k\cdot x^{7-k}}{k!(7-k)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{x^k}{k!}\right)=$$

Protože máme nekonečný součet (sčítáme konečné řady), můžeme z něj též udělat nekonečnou řadu, jejíž členy budou konečné řady.

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$.

Řešení

$$2\sin x\cos x = 2\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right] = 2\left[x - \left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots\right]=$$

$$=2x-2\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+2\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-2\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\right.$$

$$\left.+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots = \sum_{k=0}^{1}\frac{x^k\cdot x^{1-k}}{k!(1-k)!}-\sum_{k=0}^{3}\frac{x^k\cdot x^{3-k}}{k!(3-k)!}+$$

$$+\sum_{k=0}^{5}\frac{x^k\cdot x^{5-k}}{k!(5-k)!}-\sum_{k=0}^{7}\frac{x^k\cdot x^{7-k}}{k!(7-k)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{x^k\cdot x}{k!}\right)=$$

Protože máme nekonečný součet (sčítáme konečné řady), můžeme z něj též udělat nekonečnou řadu, jejíž členy budou konečné řady.

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Řešení

$$
\begin{aligned}
2\sin x\cos x &= 2\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right] = 2\left[x - \left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+\right.\\
&\left. + \left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right) - \left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots\right] =\\
&= 2x - 2\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+2\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-2\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\right.\\
&\left.+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots = \sum_{k=0}^{1}\frac{x^k\cdot x^{1-k}}{k!(1-k)!}-\sum_{k=0}^{3}\frac{x^k\cdot x^{3-k}}{k!(3-k)!}+\\
&+\sum_{k=0}^{5}\frac{x^k\cdot x^{5-k}}{k!(5-k)!}-\sum_{k=0}^{7}\frac{x^k\cdot x^{7-k}}{k!(7-k)!}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{x^k\cdot x^{2n+1}}{k!}\right) =
\end{aligned}
$$

Protože máme nekonečný součet (sčítáme konečné řady), můžeme z něj též udělat nekonečnou řadu, jejíž členy budou konečné řady.

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Řešení

$$2\sin x\cos x = 2\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right] = 2\left[x - \left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots\right]=$$
$$=2x-2\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+2\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-2\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\right.$$
$$\left.+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots = \sum_{k=0}^{1}\frac{x^k\cdot x^{1-k}}{k!(1-k)!}-\sum_{k=0}^{3}\frac{x^k\cdot x^{3-k}}{k!(3-k)!}+$$
$$+\sum_{k=0}^{5}\frac{x^k\cdot x^{5-k}}{k!(5-k)!}-\sum_{k=0}^{7}\frac{x^k\cdot x^{7-k}}{k!(7-k)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{x^k\cdot x^{2n+1-k}}{k!}\right)=$$

Protože máme nekonečný součet (sčítáme konečné řady), můžeme z něj též udělat nekonečnou řadu, jejíž členy budou konečné řady.

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Řešení

$$2\sin x\cos x = 2\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right] = 2\left[x - \left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots\right]=$$
$$=2x-2\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+2\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-2\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\right.$$
$$\left.+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots=\sum_{k=0}^{1}\frac{x^k\cdot x^{1-k}}{k!(1-k)!}-\sum_{k=0}^{3}\frac{x^k\cdot x^{3-k}}{k!(3-k)!}+$$
$$+\sum_{k=0}^{5}\frac{x^k\cdot x^{5-k}}{k!(5-k)!}-\sum_{k=0}^{7}\frac{x^k\cdot x^{7-k}}{k!(7-k)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{x^k\cdot x^{2n+1-k}}{k!(2n+1-k)!}\right)=$$

Protože máme nekonečný součet (sčítáme konečné řady), můžeme z něj též udělat nekonečnou řadu, jejíž členy budou konečné řady.

Cauchyho součin řad

Příklad
Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$.

Řešení

$$2\sin x\cos x = 2\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right] = 2\left[x - \left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots\right]=$$
$$=2x-2\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+2\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-2\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\right.$$
$$\left.+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots = \sum_{k=0}^{1}\frac{x^k\cdot x^{1-k}}{k!(1-k)!}-\sum_{k=0}^{3}\frac{x^k\cdot x^{3-k}}{k!(3-k)!}+$$
$$+\sum_{k=0}^{5}\frac{x^k\cdot x^{5-k}}{k!(5-k)!}-\sum_{k=0}^{7}\frac{x^k\cdot x^{7-k}}{k!(7-k)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{x^k\cdot x^{2n+1-k}}{k!(2n+1-k)!}\right)=$$

Protože $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, platí $\dfrac{1}{k!(2n+1-k)!} = \dfrac{1}{(2n+1)!}\cdot\binom{2n+1}{k}$.

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Řešení

$$2\sin x\cos x = 2\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right] = 2\left[x - \left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots\right]=$$

$$=2x-2\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+2\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-2\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\right.$$

$$\left.+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots = \sum_{k=0}^{1}\frac{x^k\cdot x^{1-k}}{k!(1-k)!}-\sum_{k=0}^{3}\frac{x^k\cdot x^{3-k}}{k!(3-k)!}+$$

$$+\sum_{k=0}^{5}\frac{x^k\cdot x^{5-k}}{k!(5-k)!}-\sum_{k=0}^{7}\frac{x^k\cdot x^{7-k}}{k!(7-k)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{x^k\cdot x^{2n+1-k}}{k!(2n+1-k)!}\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}x^k\cdot x^{2n+1-k}\right)=$$

Protože $\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, platí $\dfrac{1}{k!(2n+1-k)!}=\dfrac{1}{(2n+1)!}\cdot\binom{2n+1}{k}$.

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Řešení

$$2\sin x\cos x = 2\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right] = 2\left[x - \left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots\right]=$$

$$=2x-2\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+2\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-2\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\right.$$

$$\left.+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots = \sum_{k=0}^{1}\frac{x^k\cdot x^{1-k}}{k!(1-k)!}-\sum_{k=0}^{3}\frac{x^k\cdot x^{3-k}}{k!(3-k)!}+$$

$$+\sum_{k=0}^{5}\frac{x^k\cdot x^{5-k}}{k!(5-k)!}-\sum_{k=0}^{7}\frac{x^k\cdot x^{7-k}}{k!(7-k)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{x^k\cdot x^{2n+1-k}}{k!(2n+1-k)!}\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}x^k\cdot x^{2n+1-k}\right)=$$

Nyní použijeme binomickou větu, tedy vztah

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k\cdot b^{n-k}.$$

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Řešení

$$2\sin x\cos x = 2\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right] = 2\left[x - \left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+\right.$$

$$\left. + \left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots\right] =$$

$$= 2x - 2\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+2\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-2\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\right.$$

$$\left.+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots = \sum_{k=0}^{1}\frac{x^k\cdot x^{1-k}}{k!(1-k)!}-\sum_{k=0}^{3}\frac{x^k\cdot x^{3-k}}{k!(3-k)!}+$$

$$+\sum_{k=0}^{5}\frac{x^k\cdot x^{5-k}}{k!(5-k)!}-\sum_{k=0}^{7}\frac{x^k\cdot x^{7-k}}{k!(7-k)!}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{x^k\cdot x^{2n+1-k}}{k!(2n+1-k)!}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}x^k\cdot x^{2n+1-k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+x)^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

Nyní použijeme binomickou větu, tedy vztah

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k\cdot b^{n-k}.$$

Cauchyho součin řad

Příklad

Pomocí Cauchyho součinu řad ukažte, že platí rovnost $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Řešení

$$2\sin x\cos x = 2\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right] = 2\left[x - \left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots\right] =$$

$$= 2x - 2\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x\cdot x^2}{2!}\right)+2\left(\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3\cdot x^2}{3!2!}+\frac{x\cdot x^4}{4!}\right)-2\left(\frac{x^7}{7!}+\frac{x^5\cdot x^2}{5!2!}+\right.$$

$$\left.+\frac{x^3\cdot x^4}{3!4!}+\frac{x\cdot x^6}{6!}\right)+\cdots = \sum_{k=0}^{1}\frac{x^k\cdot x^{1-k}}{k!(1-k)!}-\sum_{k=0}^{3}\frac{x^k\cdot x^{3-k}}{k!(3-k)!}+$$

$$+\sum_{k=0}^{5}\frac{x^k\cdot x^{5-k}}{k!(5-k)!}-\sum_{k=0}^{7}\frac{x^k\cdot x^{7-k}}{k!(7-k)!}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{x^k\cdot x^{2n+1-k}}{k!(2n+1-k)!}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}x^k\cdot x^{2n+1-k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+x)^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

$$= \underline{\underline{\sin(2x)}}$$