Posloupnosti

Posloupnosti

- Posloupnost reálných čísel je libovolné zobrazení $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Posloupnosti

- Posloupnost reálných čísel je libovolné zobrazení $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.

  Značíme ji $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nebo (a_n), kde $a_n := a(n)$.

Posloupnosti

- Posloupnost reálných čísel je libovolné zobrazení $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.
  Značíme ji $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nebo (a_n), kde $a_n := a(n)$.
- Říkáme, že posloupnost (a_n) je konvergentní, jestliže existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ a $a \in \mathbb{R}$.

Posloupnosti

- Posloupnost reálných čísel je libovolné zobrazení $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
  Značíme ji $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nebo (a_n), kde $a_n := a(n)$.
- Říkáme, že posloupnost (a_n) je konvergentní, jestliže existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ a $a \in \mathbb{R}$.

  Jestliže je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ rovna ∞ nebo $-\infty$, je posloupnost (a_n) divergentní.

Posloupnosti

- Posloupnost reálných čísel je libovolné zobrazení $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
  Značíme ji $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nebo (a_n), kde $a_n := a(n)$.
- Říkáme, že posloupnost (a_n) je konvergentní, jestliže existuje $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ a $a \in \mathbb{R}$.

  Jestliže je $\lim_{n\to\infty} a_n$ rovna ∞ nebo $-\infty$, je posloupnost (a_n) divergentní.

  Posloupnost, která není ani konvergentní, ani divergentní, se nazývá oscilující.

Posloupnosti

- Posloupnost reálných čísel je libovolné zobrazení $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.

  Značíme ji $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nebo (a_n), kde $a_n := a(n)$.

- Říkáme, že posloupnost (a_n) je konvergentní, jestliže existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ a $a \in \mathbb{R}$.

  Jestliže je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ rovna ∞ nebo $-\infty$, je posloupnost (a_n) divergentní.

  Posloupnost, která není ani konvergentní, ani divergentní, se nazývá oscilující.

V této části se budeme dále věnovat i posloupnostem funkcí reálné proměnné, kterou budeme označovat (f_n).

Monotónnost posloupnosti

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost

$$\left(\frac{n^2}{n^2+n}\right)_{n=1}^{\infty}$$

rostoucí, klesající, nerostoucí, neklesající, ryze monotónní, monotónní.

Monotónnost posloupnosti

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost

$$\left(\frac{n^2}{n^2+n}\right)_{n=1}^{\infty}$$

rostoucí, klesající, nerostoucí, neklesající, ryze monotónní, monotónní.

Řešení

Monotónnost posloupnosti

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost

$$\left(\frac{n^2}{n^2+n}\right)_{n=1}^{\infty}$$

rostoucí, klesající, nerostoucí, neklesající, ryze monotónní, monotónní.

Řešení

Označme $a_n = \dfrac{n^2}{n^2+n}$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Monotónnost posloupnosti

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost

$$\left(\frac{n^2}{n^2+n}\right)_{n=1}^{\infty}$$

rostoucí, klesající, nerostoucí, neklesající, ryze monotónní, monotónní.

Řešení

Označme $a_n = \dfrac{n^2}{n^2+n}$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Potom $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2}{(n+1)^2+(n+1)}$.

Monotónnost posloupnosti

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost

$$\left(\frac{n^2}{n^2+n}\right)_{n=1}^{\infty}$$

rostoucí, klesající, nerostoucí, neklesající, ryze monotónní, monotónní.

Řešení

Označme $a_n = \dfrac{n^2}{n^2+n}$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Potom $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2}{(n+1)^2+(n+1)}$.

Budeme zkoumat, v jakém vztahu je a_n a a_{n+1} pro libovolné $n \in \mathbb{N}$.

Monotónnost posloupnosti

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost

$$\left(\frac{n^2}{n^2+n}\right)_{n=1}^{\infty}$$

rostoucí, klesající, nerostoucí, neklesající, ryze monotónní, monotónní.

Řešení

Označme $a_n = \dfrac{n^2}{n^2+n}$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Potom $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2}{(n+1)^2+(n+1)}$.

Budeme zkoumat, v jakém vztahu je a_n a a_{n+1} pro libovolné $n \in \mathbb{N}$.

$a_n - a_{n+1} =$

Monotónnost posloupnosti

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost

$$\left(\frac{n^2}{n^2+n}\right)_{n=1}^{\infty}$$

rostoucí, klesající, nerostoucí, neklesající, ryze monotónní, monotónní.

Řešení

Označme $a_n = \dfrac{n^2}{n^2+n}$ pro $n = 1, 2, 3, \dots$.

Potom $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2}{(n+1)^2+(n+1)}$.

Budeme zkoumat, v jakém vztahu je a_n a a_{n+1} pro libovolné $n \in \mathbb{N}$.

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n^2}{n^2+n} - \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+(n+1)} =$$

Monotónnost posloupnosti

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost

$$\left(\frac{n^2}{n^2+n}\right)_{n=1}^{\infty}$$

rostoucí, klesající, nerostoucí, neklesající, ryze monotónní, monotónní.

Řešení

Označme $a_n = \dfrac{n^2}{n^2+n}$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Potom $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2}{(n+1)^2+(n+1)}$.

Budeme zkoumat, v jakém vztahu je a_n a a_{n+1} pro libovolné $n \in \mathbb{N}$.

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n^2}{n^2+n} - \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+(n+1)} = \frac{n^2}{n^2+n} - \frac{n^2+2n+1}{n^2+3n+2} =$$

Monotónnost posloupnosti

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost

$$\left(\frac{n^2}{n^2+n}\right)_{n=1}^{\infty}$$

rostoucí, klesající, nerostoucí, neklesající, ryze monotónní, monotónní.

Řešení

Označme $a_n = \dfrac{n^2}{n^2+n}$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Potom $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2}{(n+1)^2+(n+1)}$.

Budeme zkoumat, v jakém vztahu je a_n a a_{n+1} pro libovolné $n \in \mathbb{N}$.

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n^2}{n^2+n} - \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+(n+1)} = \frac{n^2}{n^2+n} - \frac{n^2+2n+1}{n^2+3n+2} =$$

$$= \frac{n^2(n^2+3n+2) - (n^2+2n+1)(n^2+n)}{(n^2+n)(n^2+3n+2)} =$$

Monotónnost posloupnosti

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost

$$\left(\frac{n^2}{n^2+n}\right)_{n=1}^{\infty}$$

rostoucí, klesající, nerostoucí, neklesající, ryze monotónní, monotónní.

Řešení

Označme $a_n = \dfrac{n^2}{n^2+n}$ pro $n = 1, 2, 3, \dots$.

Potom $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2}{(n+1)^2+(n+1)}$.

Budeme zkoumat, v jakém vztahu je a_n a a_{n+1} pro libovolné $n \in \mathbb{N}$.

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n^2}{n^2+n} - \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+(n+1)} = \frac{n^2}{n^2+n} - \frac{n^2+2n+1}{n^2+3n+2} =$$

$$= \frac{n^2(n^2+3n+2)-(n^2+2n+1)(n^2+n)}{(n^2+n)(n^2+3n+2)} = \frac{n^4+3n^3+2n^2-n^4-3n^3-3n^2-n}{(n^2+n)(n^2+3n+2)} =$$

Monotónnost posloupnosti

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost

$$\left(\frac{n^2}{n^2+n}\right)_{n=1}^{\infty}$$

rostoucí, klesající, nerostoucí, neklesající, ryze monotónní, monotónní.

Řešení

Označme $a_n = \dfrac{n^2}{n^2+n}$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Potom $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2}{(n+1)^2+(n+1)}$.

Budeme zkoumat, v jakém vztahu je a_n a a_{n+1} pro libovolné $n \in \mathbb{N}$.

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n^2}{n^2+n} - \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+(n+1)} = \frac{n^2}{n^2+n} - \frac{n^2+2n+1}{n^2+3n+2} =$$

$$= \frac{n^2(n^2+3n+2)-(n^2+2n+1)(n^2+n)}{(n^2+n)(n^2+3n+2)} = \frac{n^4+3n^3+2n^2-n^4-3n^3-3n^2-n}{(n^2+n)(n^2+3n+2)} =$$

$$= \frac{-n^2-n}{(n^2+n)(n^2+3n+2)}$$

Monotónnost posloupnosti

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost

$$\left(\frac{n^2}{n^2+n}\right)_{n=1}^{\infty}$$

rostoucí, klesající, nerostoucí, neklesající, ryze monotónní, monotónní.

Řešení

Označme $a_n = \dfrac{n^2}{n^2+n}$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Potom $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2}{(n+1)^2+(n+1)}$.

Budeme zkoumat, v jakém vztahu je a_n a a_{n+1} pro libovolné $n \in \mathbb{N}$.

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n^2}{n^2+n} - \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+(n+1)} = \frac{n^2}{n^2+n} - \frac{n^2+2n+1}{n^2+3n+2} =$$

$$= \frac{n^2(n^2+3n+2) - (n^2+2n+1)(n^2+n)}{(n^2+n)(n^2+3n+2)} = \frac{n^4+3n^3+2n^2-n^4-3n^3-3n^2-n}{(n^2+n)(n^2+3n+2)} =$$

$$= \frac{-n^2-n}{(n^2+n)(n^2+3n+2)} < 0.$$

Monotónnost posloupnosti

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost

$$\left(\frac{n^2}{n^2+n}\right)_{n=1}^{\infty}$$

rostoucí, klesající, nerostoucí, neklesající, ryze monotónní, monotónní.

Řešení

Označme $a_n = \dfrac{n^2}{n^2+n}$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Potom $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2}{(n+1)^2+(n+1)}$.

Budeme zkoumat, v jakém vztahu je a_n a a_{n+1} pro libovolné $n \in \mathbb{N}$.

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n^2}{n^2+n} - \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+(n+1)} = \frac{n^2}{n^2+n} - \frac{n^2+2n+1}{n^2+3n+2} =$$

$$= \frac{n^2(n^2+3n+2)-(n^2+2n+1)(n^2+n)}{(n^2+n)(n^2+3n+2)} = \frac{n^4+3n^3+2n^2-n^4-3n^3-3n^2-n}{(n^2+n)(n^2+3n+2)} =$$

$$= \frac{-n^2-n}{(n^2+n)(n^2+3n+2)} < 0.$$

Tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n < a_{n+1}$

Monotónnost posloupnosti

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost

$$\left(\frac{n^2}{n^2+n}\right)_{n=1}^{\infty}$$

rostoucí, klesající, nerostoucí, neklesající, ryze monotónní, monotónní.

Řešení

Označme $a_n = \dfrac{n^2}{n^2+n}$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Potom $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2}{(n+1)^2+(n+1)}$.

Budeme zkoumat, v jakém vztahu je a_n a a_{n+1} pro libovolné $n \in \mathbb{N}$.

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n^2}{n^2+n} - \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+(n+1)} = \frac{n^2}{n^2+n} - \frac{n^2+2n+1}{n^2+3n+2} =$$

$$= \frac{n^2(n^2+3n+2)-(n^2+2n+1)(n^2+n)}{(n^2+n)(n^2+3n+2)} = \frac{n^4+3n^3+2n^2-n^4-3n^3-3n^2-n}{(n^2+n)(n^2+3n+2)} =$$

$$= \frac{-n^2-n}{(n^2+n)(n^2+3n+2)} < 0.$$

Tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n < a_{n+1}$

$\Longrightarrow$ posloupnost je tedy **rostoucí** a tudíž **ryze monotónní**.

Ohraničenost posloupnosti

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost

$$\left((-1)^{n-1}\left(3-\frac{2}{n+1}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$$

ohraničená.

Ohraničenost posloupnosti

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost

$$\left((-1)^{n-1}\left(3-\frac{2}{n+1}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$$

ohraničená.

Řešení

Ohraničenost posloupnosti

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost

$$\left((-1)^{n-1}\left(3-\frac{2}{n+1}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$$

ohraničená.

Řešení

Označme $a_n = (-1)^{n-1}\left(3-\frac{2}{n+1}\right)$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Ohraničenost posloupnosti

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost

$$\left((-1)^{n-1}\left(3-\frac{2}{n+1}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$$

ohraničená.

Řešení

Označme $a_n=(-1)^{n-1}\left(3-\dfrac{2}{n+1}\right)$ pro $n=1,2,3,\ldots$.

Existuje-li takové

- $m\in\mathbb{R}$, že $a_n>m$ pro každé $n\in\mathbb{N}$, je daná posloupnost ohraničená zdola.

Ohraničenost posloupnosti

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost

$$\left((-1)^{n-1}\left(3-\frac{2}{n+1}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$$

ohraničená.

Řešení

Označme $a_n=(-1)^{n-1}\left(3-\dfrac{2}{n+1}\right)$ pro $n=1,2,3,\ldots$.

Existuje-li takové

- $m\in\mathbb{R}$, že $a_n>m$ pro každé $n\in\mathbb{N}$, je daná posloupnost ohraničená zdola.
- $M\in\mathbb{R}$, že $a_n<M$ pro každé $n\in\mathbb{N}$, je daná posloupnost ohraničená shora.

Ohraničenost posloupnosti

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost

$$\left((-1)^{n-1}\left(3-\frac{2}{n+1}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$$

ohraničená.

Řešení

Označme $a_n = (-1)^{n-1}\left(3-\frac{2}{n+1}\right)$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Existuje-li takové

- $m \in \mathbb{R}$, že $a_n > m$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, je daná posloupnost ohraničená zdola.
- $M \in \mathbb{R}$, že $a_n < M$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, je daná posloupnost ohraničená shora.

Je-li posloupnost shora i zdola ohraničená, nazýváme ji ohraničenou posloupností.

Ohraničenost posloupnosti

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost

$$\left((-1)^{n-1}\left(3-\frac{2}{n+1}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$$

ohraničená.

Řešení

Označme $a_n = (-1)^{n-1}\left(3-\dfrac{2}{n+1}\right)$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Existuje-li takové

- $m \in \mathbb{R}$, že $a_n > m$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, je daná posloupnost ohraničená zdola.
- $M \in \mathbb{R}$, že $a_n < M$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, je daná posloupnost ohraničená shora.

Je-li posloupnost shora i zdola ohraničená, nazýváme ji ohraničenou posloupností.

Pokusíme se najít taková čísla m a M.

Ohraničenost posloupnosti

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost

$$\left((-1)^{n-1}\left(3-\frac{2}{n+1}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$$

ohraničená.

Řešení

Označme $a_n = (-1)^{n-1}\left(3-\dfrac{2}{n+1}\right)$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Existuje-li takové

- $m \in \mathbb{R}$, že $a_n > m$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, je daná posloupnost ohraničená zdola.
- $M \in \mathbb{R}$, že $a_n < M$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, je daná posloupnost ohraničená shora.

Je-li posloupnost shora i zdola ohraničená, nazýváme ji ohraničenou posloupností.

V našem případě máme:

$$a_n = \begin{cases} -3 + \frac{2}{n+1} & \text{pro } n \text{ sudé}, \\ 3 - \frac{2}{n+1} & \text{pro } n \text{ liché}. \end{cases}$$

Ohraničenost posloupnosti

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost

$$\left((-1)^{n-1}\left(3-\frac{2}{n+1}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$$

ohraničená.

Řešení

Označme $a_n = (-1)^{n-1}\left(3-\dfrac{2}{n+1}\right)$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Existuje-li takové

- $m \in \mathbb{R}$, že $a_n > m$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, je daná posloupnost ohraničená zdola.
- $M \in \mathbb{R}$, že $a_n < M$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, je daná posloupnost ohraničená shora.

Je-li posloupnost shora i zdola ohraničená, nazýváme ji ohraničenou posloupností.

V našem případě máme:

$$a_n = \begin{cases} -3+\frac{2}{n+1} & \text{pro } n \text{ sudé,} \\ 3-\frac{2}{n+1} & \text{pro } n \text{ liché.} \end{cases}$$

Protože pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $0 < \dfrac{2}{n+1} < 2$,

Ohraničenost posloupnosti

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost

$$\left((-1)^{n-1}\left(3-\frac{2}{n+1}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$$

ohraničená.

Řešení

Označme $a_n = (-1)^{n-1}\left(3-\dfrac{2}{n+1}\right)$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Existuje-li takové

- $m \in \mathbb{R}$, že $a_n > m$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, je daná posloupnost ohraničená zdola.
- $M \in \mathbb{R}$, že $a_n < M$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, je daná posloupnost ohraničená shora.

Je-li posloupnost shora i zdola ohraničená, nazýváme ji ohraničenou posloupností.

V našem případě máme:

$$a_n = \begin{cases} -3+\frac{2}{n+1} & \text{pro } n \text{ sudé,} \\ 3-\frac{2}{n+1} & \text{pro } n \text{ liché.} \end{cases}$$

Protože pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $0 < \dfrac{2}{n+1} < 2$, dostáváme

- $-3 < -3 + \dfrac{2}{n+1} < -1$,

Ohraničenost posloupnosti

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost

$$\left((-1)^{n-1}\left(3-\frac{2}{n+1}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$$

ohraničená.

Řešení

Označme $a_n = (-1)^{n-1}\left(3-\dfrac{2}{n+1}\right)$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Existuje-li takové

- $m \in \mathbb{R}$, že $a_n > m$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, je daná posloupnost ohraničená zdola.
- $M \in \mathbb{R}$, že $a_n < M$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, je daná posloupnost ohraničená shora.

Je-li posloupnost shora i zdola ohraničená, nazýváme ji ohraničenou posloupností.

V našem případě máme:

$$a_n = \begin{cases} -3+\frac{2}{n+1} & \text{pro } n \text{ sudé}, \\ 3-\frac{2}{n+1} & \text{pro } n \text{ liché}. \end{cases}$$

Protože pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $0 < \dfrac{2}{n+1} < 2$, dostáváme

- $-3 < -3+\dfrac{2}{n+1} < -1$, tj. pro sudá n je $-3 < a_n < -1$,

Ohraničenost posloupnosti

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost

$$\left((-1)^{n-1}\left(3-\frac{2}{n+1}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$$

ohraničená.

Řešení

Označme $a_n = (-1)^{n-1}\left(3-\frac{2}{n+1}\right)$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Existuje-li takové

- $m \in \mathbb{R}$, že $a_n > m$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, je daná posloupnost ohraničená zdola.
- $M \in \mathbb{R}$, že $a_n < M$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, je daná posloupnost ohraničená shora.

Je-li posloupnost shora i zdola ohraničená, nazýváme ji ohraničenou posloupností.

V našem případě máme:

$$a_n = \begin{cases} -3+\frac{2}{n+1} & \text{pro } n \text{ sudé},\\ 3-\frac{2}{n+1} & \text{pro } n \text{ liché}. \end{cases}$$

Protože pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $0 < \dfrac{2}{n+1} < 2$, dostáváme

- $-3 < -3 + \dfrac{2}{n+1} < -1$, tj. pro sudá n je $-3 < a_n < -1$,
- $-2 < -\dfrac{2}{n+1} < 0$,

Ohraničenost posloupnosti

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost

$$\left((-1)^{n-1}\left(3-\frac{2}{n+1}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$$

ohraničená.

Řešení

Označme $a_n = (-1)^{n-1}\left(3-\frac{2}{n+1}\right)$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Existuje-li takové

- $m \in \mathbb{R}$, že $a_n > m$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, je daná posloupnost ohraničená zdola.
- $M \in \mathbb{R}$, že $a_n < M$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, je daná posloupnost ohraničená shora.

Je-li posloupnost shora i zdola ohraničená, nazýváme ji ohraničenou posloupností.

V našem případě máme:

$$a_n = \begin{cases} -3+\frac{2}{n+1} & \text{pro } n \text{ sudé,} \\ 3-\frac{2}{n+1} & \text{pro } n \text{ liché.} \end{cases}$$

Protože pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $0 < \dfrac{2}{n+1} < 2$, dostáváme

- $-3 < -3 + \dfrac{2}{n+1} < -1$, tj. pro sudá n je $-3 < a_n < -1$,
- $-2 < -\dfrac{2}{n+1} < 0$, a tedy $1 < 3 - \dfrac{2}{n+1} < 3$,

Ohraničenost posloupnosti

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost

$$\left((-1)^{n-1}\left(3-\frac{2}{n+1}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$$

ohraničená.

Řešení

Označme $a_n = (-1)^{n-1}\left(3-\dfrac{2}{n+1}\right)$ pro $n = 1, 2, 3, \dots$.

Existuje-li takové

- $m \in \mathbb{R}$, že $a_n > m$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, je daná posloupnost ohraničená zdola.
- $M \in \mathbb{R}$, že $a_n < M$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, je daná posloupnost ohraničená shora.

Je-li posloupnost shora i zdola ohraničená, nazýváme ji ohraničenou posloupností.

V našem případě máme:

$$a_n = \begin{cases} -3+\frac{2}{n+1} & \text{pro } n \text{ sudé,} \\ 3-\frac{2}{n+1} & \text{pro } n \text{ liché.} \end{cases}$$

Protože pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $0 < \dfrac{2}{n+1} < 2$, dostáváme

- $-3 < -3 + \dfrac{2}{n+1} < -1$, tj. pro sudá n je $-3 < a_n < -1$,
- $-2 < -\dfrac{2}{n+1} < 0$, a tedy $1 < 3 - \dfrac{2}{n+1} < 3$, tj. pro lichá n je $1 < a_n < 3$,

Ohraničenost posloupnosti

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost

$$\left((-1)^{n-1}\left(3-\frac{2}{n+1}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$$

ohraničená.

Řešení

Označme $a_n = (-1)^{n-1}\left(3-\dfrac{2}{n+1}\right)$ pro $n = 1, 2, 3, \dots$.

Existuje-li takové

- $m \in \mathbb{R}$, že $a_n > m$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, je daná posloupnost ohraničená zdola.
- $M \in \mathbb{R}$, že $a_n < M$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, je daná posloupnost ohraničená shora.

Je-li posloupnost shora i zdola ohraničená, nazýváme ji ohraničenou posloupností.

V našem případě máme:

$$a_n = \begin{cases} -3+\frac{2}{n+1} & \text{pro } n \text{ sudé,} \\ 3-\frac{2}{n+1} & \text{pro } n \text{ liché.} \end{cases}$$

Protože pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $0 < \dfrac{2}{n+1} < 2$, dostáváme

- $-3 < -3+\dfrac{2}{n+1} < -1$, tj. pro sudá n je $-3 < a_n < -1$,
- $-2 < -\dfrac{2}{n+1} < 0$, a tedy $1 < 3-\dfrac{2}{n+1} < 3$, tj. pro lichá n je $1 < a_n < 3$,

$$\Longrightarrow \text{pro každé } n \in \mathbb{N} \text{ je } -3 < a_n < 3.$$

Ohraničenost posloupnosti

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost

$$\left((-1)^{n-1}\left(3-\frac{2}{n+1}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$$

ohraničená.

Řešení

Označme $a_n = (-1)^{n-1}\left(3-\dfrac{2}{n+1}\right)$ pro $n = 1, 2, 3, \dots$.

Existuje-li takové

- $m \in \mathbb{R}$, že $a_n > m$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, je daná posloupnost ohraničená zdola.
- $M \in \mathbb{R}$, že $a_n < M$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, je daná posloupnost ohraničená shora.

Je-li posloupnost shora i zdola ohraničená, nazýváme ji ohraničenou posloupností.

V našem případě máme:

$$a_n = \begin{cases} -3+\frac{2}{n+1} & \text{pro } n \text{ sudé},\\ 3-\frac{2}{n+1} & \text{pro } n \text{ liché}. \end{cases}$$

Protože pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $0 < \dfrac{2}{n+1} < 2$, dostáváme

- $-3 < -3+\dfrac{2}{n+1} < -1$, tj. pro sudá n je $-3 < a_n < -1$,
- $-2 < -\dfrac{2}{n+1} < 0$, a tedy $1 < 3-\dfrac{2}{n+1} < 3$, tj. pro lichá n je $1 < a_n < 3$,

$\Longrightarrow$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $-3 < a_n < 3$. Položme $m = -3$ a $M = 3$.

Ohraničenost posloupnosti

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost

$$\left((-1)^{n-1}\left(3-\frac{2}{n+1}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$$

ohraničená.

Řešení

Označme $a_n = (-1)^{n-1}\left(3-\frac{2}{n+1}\right)$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Existuje-li takové

- $m \in \mathbb{R}$, že $a_n > m$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, je daná posloupnost ohraničená zdola.
- $M \in \mathbb{R}$, že $a_n < M$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, je daná posloupnost ohraničená shora.

Je-li posloupnost shora i zdola ohraničená, nazýváme ji ohraničenou posloupností.

V našem případě máme:

$$a_n = \begin{cases} -3+\frac{2}{n+1} & \text{pro } n \text{ sudé,} \\ 3-\frac{2}{n+1} & \text{pro } n \text{ liché.} \end{cases}$$

Protože pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $0 < \dfrac{2}{n+1} < 2$, dostáváme

- $-3 < -3 + \dfrac{2}{n+1} < -1$, tj. pro sudá n je $-3 < a_n < -1$,
- $-2 < -\dfrac{2}{n+1} < 0$, a tedy $1 < 3 - \dfrac{2}{n+1} < 3$, tj. pro lichá n je $1 < a_n < 3$,

$\Longrightarrow$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $-3 < a_n < 3$. Položme $m = -3$ a $M = 3$.

$\Longrightarrow$ (a_n) je ohraničená zdola i shora

Ohraničenost posloupnosti

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost

$$\left((-1)^{n-1}\left(3-\frac{2}{n+1}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$$

ohraničená.

Řešení

Označme $a_n = (-1)^{n-1}\left(3-\dfrac{2}{n+1}\right)$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Existuje-li takové

- $m \in \mathbb{R}$, že $a_n > m$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, je daná posloupnost ohraničená zdola.
- $M \in \mathbb{R}$, že $a_n < M$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, je daná posloupnost ohraničená shora.

Je-li posloupnost shora i zdola ohraničená, nazýváme ji ohraničenou posloupností.

V našem případě máme:

$$a_n = \begin{cases} -3+\frac{2}{n+1} & \text{pro } n \text{ sudé,} \\ 3-\frac{2}{n+1} & \text{pro } n \text{ liché.} \end{cases}$$

Protože pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $0 < \dfrac{2}{n+1} < 2$, dostáváme

- $-3 < -3+\dfrac{2}{n+1} < -1$, tj. pro sudá n je $-3 < a_n < -1$,
- $-2 < -\dfrac{2}{n+1} < 0$, a tedy $1 < 3-\dfrac{2}{n+1} < 3$, tj. pro lichá n je $1 < a_n < 3$,

$\Longrightarrow$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $-3 < a_n < 3$. Položme $m = -3$ a $M = 3$.

$\Longrightarrow$ (a_n) je ohraničená zdola i shora $\Longrightarrow$ (a_n) **je ohraničená**.

Limita posloupnosti

Příklad

Z definice limity dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2+1} = 0.$

Limita posloupnosti

Příklad

Z definice limity dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2+1} = 0.$

Řešení

Limita posloupnosti

Příklad

Z definice limity dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2+1} = 0.$

Řešení

Označme $a_n = \dfrac{1}{n^2+1}$.

Limita posloupnosti

Příklad

Z definice limity dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2+1} = 0.$

Řešení

Označme $a_n = \dfrac{1}{n^2+1}$.

Posloupnost (a_n) má limitu $a \in \mathbb{R}$, jestliže ke každému reálnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $|a_n - a| < \varepsilon$.

Limita posloupnosti

Příklad

Z definice limity dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2+1} = 0.$

Řešení

Označme $a_n = \dfrac{1}{n^2+1}$.

Musíme dokázat, že ke každému reálnému $\varepsilon > 0$ je možné najít $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ platí $|a_n - 0| < \varepsilon$.

Posloupnost (a_n) má limitu $a \in \mathbb{R}$, jestliže ke každému reálnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $|a_n - a| < \varepsilon$.

Limita posloupnosti

Příklad

Z definice limity dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2+1} = 0$.

Řešení

Označme $a_n = \dfrac{1}{n^2+1}$.

Musíme dokázat, že ke každému reálnému $\varepsilon > 0$ je možné najít $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ platí $|a_n - 0| < \varepsilon$.

Limita posloupnosti

Příklad

Z definice limity dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2+1} = 0$.

Řešení

Označme $a_n = \dfrac{1}{n^2+1}$.

Musíme dokázat, že ke každému reálnému $\varepsilon > 0$ je možné najít $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ platí $|a_n - 0| < \varepsilon$.

Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné dané.

Limita posloupnosti

Příklad

Z definice limity dokažte, že $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$.

Řešení

Označme $a_n = \dfrac{1}{n^2+1}$.

Musíme dokázat, že ke každému reálnému $\varepsilon > 0$ je možné najít $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ platí $|a_n - 0| < \varepsilon$.

Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné dané.

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\varepsilon < 1$.

Limita posloupnosti

Příklad

Z definice limity dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2+1} = 0$.

Řešení

Označme $a_n = \dfrac{1}{n^2+1}$.

Musíme dokázat, že ke každému reálnému $\varepsilon > 0$ je možné najít $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ platí $|a_n - 0| < \varepsilon$.

Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné dané.

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\varepsilon < 1$.

Kdyby ne, zvolíme jiné ε_1, $0 < \varepsilon_1 < 1$, a jestliže najdeme vhodné n_0 pro ε_1, bude požadovaná nerovnost platit i pro ε.

Limita posloupnosti

Příklad

Z definice limity dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2+1} = 0.$

Řešení

Označme $a_n = \dfrac{1}{n^2+1}$.

Musíme dokázat, že ke každému reálnému $\varepsilon > 0$ je možné najít $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ platí $|a_n - 0| < \varepsilon$.

Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné dané.

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\varepsilon < 1$.

Limita posloupnosti

Příklad

Z definice limity dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2+1} = 0$.

Řešení

Označme $a_n = \dfrac{1}{n^2+1}$.

Musíme dokázat, že ke každému reálnému $\varepsilon > 0$ je možné najít $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ platí $|a_n - 0| < \varepsilon$.

Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné dané.

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\varepsilon < 1$.

Potom

$$\left| \frac{1}{n^2+1} - 0 \right| < \varepsilon \iff$$

Limita posloupnosti

Příklad

Z definice limity dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2+1} = 0$.

Řešení

Označme $a_n = \dfrac{1}{n^2+1}$.

Musíme dokázat, že ke každému reálnému $\varepsilon > 0$ je možné najít $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ platí $|a_n - 0| < \varepsilon$.

Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné dané.

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\varepsilon < 1$.

Potom

$$\left| \frac{1}{n^2+1} - 0 \right| < \varepsilon \iff \left| \frac{1}{n^2+1} \right| < \varepsilon \iff$$

Limita posloupnosti

Příklad

Z definice limity dokažte, že $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2+1} = 0.$

Řešení

Označme $a_n = \dfrac{1}{n^2+1}$.

Musíme dokázat, že ke každému reálnému $\varepsilon > 0$ je možné najít $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ platí $|a_n - 0| < \varepsilon$.

Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné dané.

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\varepsilon < 1$.

Potom

$$\left|\frac{1}{n^2+1} - 0\right| < \varepsilon \iff \left|\frac{1}{n^2+1}\right| < \varepsilon \iff \frac{1}{n^2+1} < \varepsilon \iff$$

Limita posloupnosti

Příklad

Z definice limity dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2+1} = 0$.

Řešení

Označme $a_n = \dfrac{1}{n^2+1}$.

Musíme dokázat, že ke každému reálnému $\varepsilon > 0$ je možné najít $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ platí $|a_n - 0| < \varepsilon$.

Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné dané.

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\varepsilon < 1$.

Potom

$$\left|\frac{1}{n^2+1} - 0\right| < \varepsilon \iff \left|\frac{1}{n^2+1}\right| < \varepsilon \iff \frac{1}{n^2+1} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < n^2 + 1 \iff$$

Limita posloupnosti

Příklad

Z definice limity dokažte, že $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$.

Řešení

Označme $a_n = \frac{1}{n^2+1}$.

Musíme dokázat, že ke každému reálnému $\varepsilon > 0$ je možné najít $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ platí $|a_n - 0| < \varepsilon$.

Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné dané.

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\varepsilon < 1$.

Potom

$$\left|\frac{1}{n^2+1} - 0\right| < \varepsilon \iff \left|\frac{1}{n^2+1}\right| < \varepsilon \iff \frac{1}{n^2+1} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < n^2 + 1 \iff \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1} < n.$$

Limita posloupnosti

Příklad

Z definice limity dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2+1} = 0.$

Řešení

Označme $a_n = \dfrac{1}{n^2+1}.$

Musíme dokázat, že ke každému reálnému $\varepsilon > 0$ je možné najít $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ platí $|a_n - 0| < \varepsilon$.

Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné dané.

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\varepsilon < 1$.

Potom

$$\left|\frac{1}{n^2+1} - 0\right| < \varepsilon \iff \left|\frac{1}{n^2+1}\right| < \varepsilon \iff \frac{1}{n^2+1} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < n^2 + 1 \iff \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1} < n.$$

Zvolíme-li za n_0 libovolné přirozené číslo větší než $\sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}$, pro každé $n \geq n_0$ bude $|a_n - 0| < \varepsilon$.

Limita posloupnosti

Příklad

Z definice limity dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2+1} = 0.$

Řešení

Označme $a_n = \dfrac{1}{n^2+1}$.

Musíme dokázat, že ke každému reálnému $\varepsilon > 0$ je možné najít $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ platí $|a_n - 0| < \varepsilon$.

Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné dané.

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\varepsilon < 1$.

Potom

$$\left|\frac{1}{n^2+1} - 0\right| < \varepsilon \iff \left|\frac{1}{n^2+1}\right| < \varepsilon \iff \frac{1}{n^2+1} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < n^2 + 1 \iff \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1} < n.$$

Zvolíme-li za n_0 libovolné přirozené číslo větší než $\sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}$, pro každé $n \geq n_0$ bude $|a_n - 0| < \varepsilon$.

$$\Longrightarrow \underline{\underline{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0.}}$$

Limita posloupnosti

Příklad

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-5}{n^2-3n+1}$.

Limita posloupnosti

Příklad

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-5}{n^2-3n+1}$.

Řešení

Limita posloupnosti

Příklad

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-5}{n^2-3n+1}$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-5}{n^2-3n+1} =$$

Limita posloupnosti

Příklad

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-5}{n^2-3n+1}$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-5}{n^2-3n+1} = \frac{3\cdot\infty-5}{\infty^2-3\cdot\infty+1} =$$

Dosadíme-li do výrazu za n hodnotu ∞,

Limita posloupnosti

Příklad

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-5}{n^2-3n+1}$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-5}{n^2-3n+1} = \frac{3\cdot\infty-5}{\infty^2-3\cdot\infty+1} = \frac{\infty}{\infty-\infty}$$

Dosadíme-li do výrazu za n hodnotu ∞, dostaneme neurčitý výraz typu $\dfrac{\infty}{\infty-\infty}$.

Limita posloupnosti

Příklad

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-5}{n^2-3n+1}$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-5}{n^2-3n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{}{n^2\left(1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}$$

Proto nejdříve vytkneme nejvyšší mocninu n ve jmenovateli

Limita posloupnosti

Příklad

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-5}{n^2-3n+1}$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-5}{n^2-3n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(3-\frac{5}{n}\right)}{n^2\left(1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}$$

Proto nejdříve vytkneme nejvyšší mocninu n ve jmenovateli a nejvyšší mocninu n v čitateli.

Limita posloupnosti

Příklad

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-5}{n^2-3n+1}$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-5}{n^2-3n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(3-\frac{5}{n}\right)}{n^2\left(1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3-\frac{5}{n}}{n\left(1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}$$

Limita posloupnosti

Příklad

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-5}{n^2-3n+1}$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-5}{n^2-3n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(3-\frac{5}{n}\right)}{n^2\left(1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3-\frac{5}{n}}{n\left(1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}$$

Nyní můžeme do výrazu dosadit za n hodnotu ∞.

Limita posloupnosti

Příklad

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-5}{n^2-3n+1}$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-5}{n^2-3n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(3-\frac{5}{n}\right)}{n^2\left(1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3-\frac{5}{n}}{n\left(1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{3-\frac{5}{\infty}}{\infty\cdot\left(1-\frac{3}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}\right)}$$

Nyní můžeme do výrazu dosadit za n hodnotu ∞.

Limita posloupnosti

Příklad

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-5}{n^2-3n+1}$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-5}{n^2-3n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(3-\frac{5}{n}\right)}{n^2\left(1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3-\frac{5}{n}}{n\left(1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{3-\frac{5}{\infty}}{\infty\cdot\left(1-\frac{3}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}\right)}$$

Použijeme vztahy:

- $\dfrac{a}{\infty} = 0$ pro libovolné $a \in \mathbb{R}$,
- $\infty \cdot \infty = \infty$.

Limita posloupnosti

Příklad

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-5}{n^2-3n+1}$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-5}{n^2-3n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(3-\frac{5}{n}\right)}{n^2\left(1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3-\frac{5}{n}}{n\left(1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{3-\frac{5}{\infty}}{\infty\cdot\left(1-\frac{3}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}\right)} = 0$$

Použijeme vztahy:

- $\dfrac{a}{\infty} = 0$ pro libovolné $a \in \mathbb{R}$,
- $\infty \cdot \infty = \infty$.

Limita posloupnosti

Příklad

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-5}{n^2-3n+1}$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-5}{n^2-3n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(3-\frac{5}{n}\right)}{n^2\left(1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3-\frac{5}{n}}{n\left(1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{3-\frac{5}{\infty}}{\infty\cdot\left(1-\frac{3}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}\right)} = \underline{\underline{0}}$$

Limita posloupnosti

Příklad

Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \cdot [1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + n\cdot (n+1)] \, .$$

Limita posloupnosti

Příklad

Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \cdot [1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n+1)] \, .$$

Řešení

Limita posloupnosti

Příklad

Vypočtěte

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^3} \cdot [1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n+1)] .$$

Řešení

Matematickou indukcí lze snadno ověřit, že

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n+1) = \frac{1}{3} n \cdot (n+1) \cdot (n+2).$$

Limita posloupnosti

Příklad

Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \cdot [1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n+1)] \, .$$

Řešení

Matematickou indukcí lze snadno ověřit, že

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n+1) = \frac{1}{3} n \cdot (n+1) \cdot (n+2).$$

Dosadíme-li za $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n+1)$ tento výraz, dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \cdot [1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n+1)] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{3} n \cdot (n+1) \cdot (n+2) =$$

Limita posloupnosti

Příklad

Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \cdot [1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + n\cdot(n+1)]\,.$$

Řešení

Matematickou indukcí lze snadno ověřit, že

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + n\cdot(n+1) = \frac{1}{3} n\cdot(n+1)\cdot(n+2).$$

Dosadíme-li za $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + n\cdot(n+1)$ tento výraz, dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \cdot [1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + n\cdot(n+1)] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{3} n\cdot(n+1)\cdot(n+2) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{3n^2}$$

Limita posloupnosti

Příklad

Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \cdot [1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + n\cdot(n+1)]\,.$$

Řešení

Matematickou indukcí lze snadno ověřit, že

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + n\cdot(n+1) = \frac{1}{3} n\cdot(n+1)\cdot(n+2).$$

Dosadíme-li za $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + n\cdot(n+1)$ tento výraz, dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \cdot [1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + n\cdot(n+1)] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{3} n\cdot(n+1)\cdot(n+2) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{3n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n+2}{3n^2}$$

Limita posloupnosti

Příklad

Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \cdot [1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n+1)] \, .$$

Řešení

Matematickou indukcí lze snadno ověřit, že

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n+1) = \frac{1}{3} n \cdot (n+1) \cdot (n+2).$$

Dosadíme-li za $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n+1)$ tento výraz, dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \cdot [1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n+1)] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{3} n \cdot (n+1) \cdot (n+2) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{3n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 3n + 2}{3n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{n} + \frac{2}{3n^2} \right)$$

Limita posloupnosti

Příklad

Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \cdot [1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + n\cdot(n+1)] \, .$$

Řešení

Matematickou indukcí lze snadno ověřit, že

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + n\cdot(n+1) = \frac{1}{3} n\cdot(n+1)\cdot(n+2).$$

Dosadíme-li za $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + n\cdot(n+1)$ tento výraz, dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \cdot [1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + n\cdot(n+1)] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{3} n\cdot(n+1)\cdot(n+2) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{3n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n+2}{3n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{n} + \frac{2}{3n^2}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}.$$

Limita posloupnosti

Příklad

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2n-1}-\sqrt{3n}}$.

Limita posloupnosti

Příklad

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2n-1}-\sqrt{3n}}$.

Řešení

Limita posloupnosti

Příklad

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2n-1}-\sqrt{3n}}$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n-1}-\sqrt{3n}} =$$

Dosadíme-li za n do výrazu ∞, dostáváme $\dfrac{1}{\infty-\infty}$.

Limita posloupnosti

Příklad

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2n-1}-\sqrt{3n}}$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n-1}-\sqrt{3n}} =$$

Dosadíme-li za n do výrazu ∞, dostáváme $\dfrac{1}{\infty-\infty}$. Daný zlomek tedy rozšíříme výrazek $\sqrt{2n-1}+\sqrt{3n}$.

Limita posloupnosti

Příklad

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2n-1}-\sqrt{3n}}$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n-1}-\sqrt{3n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}-\sqrt{3n}} \cdot \frac{\sqrt{2n-1}+\sqrt{3n}}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{3n}} \right) =$$

Dosadíme-li za n do výrazu ∞, dostáváme $\dfrac{1}{\infty-\infty}$. Daný zlomek tedy rozšíříme výrazek $\sqrt{2n-1}+\sqrt{3n}$.

Limita posloupnosti

Příklad

Vypočtěte $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2n-1}-\sqrt{3n}}$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n-1}-\sqrt{3n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}-\sqrt{3n}} \cdot \frac{\sqrt{2n-1}+\sqrt{3n}}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{3n}} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n-1}+\sqrt{3n}}{(2n-1)-3n} =$$

Ve jmenovateli jsme použili vzorec

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2.$$

Limita posloupnosti

Příklad

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2n-1}-\sqrt{3n}}$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n-1}-\sqrt{3n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}-\sqrt{3n}} \cdot \frac{\sqrt{2n-1}+\sqrt{3n}}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{3n}} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n-1}+\sqrt{3n}}{(2n-1)-3n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n-1}+\sqrt{3n}}{-n-1} =$$

Limita posloupnosti

Příklad

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2n-1}-\sqrt{3n}}$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n-1}-\sqrt{3n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}-\sqrt{3n}} \cdot \frac{\sqrt{2n-1}+\sqrt{3n}}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{3n}} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n-1}+\sqrt{3n}}{(2n-1)-3n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n-1}+\sqrt{3n}}{-n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}+\sqrt{n^2\cdot\frac{3}{n}}}{n\left(-1-\frac{1}{n}\right)} =$$

V čitateli i jmenovateli vytkneme nejvyšší mocninu n.

Limita posloupnosti

Příklad

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2n-1}-\sqrt{3n}}$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n-1}-\sqrt{3n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}-\sqrt{3n}} \cdot \frac{\sqrt{2n-1}+\sqrt{3n}}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{3n}} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n-1}+\sqrt{3n}}{(2n-1)-3n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n-1}+\sqrt{3n}}{-n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}+\sqrt{n^2\cdot\frac{3}{n}}}{n\left(-1-\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot\left(\sqrt{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{3}{n}}\right)}{n\left(-1-\frac{1}{n}\right)} =$$

Limita posloupnosti

Příklad

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2n-1}-\sqrt{3n}}$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n-1}-\sqrt{3n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}-\sqrt{3n}} \cdot \frac{\sqrt{2n-1}+\sqrt{3n}}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{3n}} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n-1}+\sqrt{3n}}{(2n-1)-3n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n-1}+\sqrt{3n}}{-n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}+\sqrt{n^2\cdot\frac{3}{n}}}{n\left(-1-\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot\left(\sqrt{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{3}{n}}\right)}{n\left(-1-\frac{1}{n}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{3}{n}}}{-1-\frac{1}{n}} =$$

Limita posloupnosti

Příklad

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2n-1}-\sqrt{3n}}$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n-1}-\sqrt{3n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}-\sqrt{3n}} \cdot \frac{\sqrt{2n-1}+\sqrt{3n}}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{3n}} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n-1}+\sqrt{3n}}{(2n-1)-3n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n-1}+\sqrt{3n}}{-n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}+\sqrt{n^2\cdot\frac{3}{n}}}{n\left(-1-\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot\left(\sqrt{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{3}{n}}\right)}{n\left(-1-\frac{1}{n}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{3}{n}}}{-1-\frac{1}{n}} = 0$$

Využili jsme vztah:

- $\dfrac{a}{\infty} = 0$ pro každé $a \in \mathbb{R}$.

Limita posloupnosti

Příklad

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2n-1}-\sqrt{3n}}$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n-1}-\sqrt{3n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}-\sqrt{3n}} \cdot \frac{\sqrt{2n-1}+\sqrt{3n}}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{3n}} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n-1}+\sqrt{3n}}{(2n-1)-3n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n-1}+\sqrt{3n}}{-n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}+\sqrt{n^2\cdot\frac{3}{n}}}{n\left(-1-\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot\left(\sqrt{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{3}{n}}\right)}{n\left(-1-\frac{1}{n}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{3}{n}}}{-1-\frac{1}{n}} = \underline{\underline{0}}$$

Limita posloupnosti

Příklad

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1} - 3^n}{2^n + 3^{n+1}}$.

Limita posloupnosti

Příklad

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1} - 3^n}{2^n + 3^{n+1}}$.

Řešení

Limita posloupnosti

Příklad

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}-3^n}{2^n+3^{n+1}}$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}-3^n}{2^n+3^{n+1}} =$$

Limita posloupnosti

Příklad

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}-3^n}{2^n+3^{n+1}}$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}-3^n}{2^n+3^{n+1}} =$$

Dosadíme-li za n hodnotu ∞, dostaneme neurčitý výraz $\dfrac{\infty-\infty}{\infty}$.

Limita posloupnosti

Příklad

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}-3^n}{2^n+3^{n+1}}$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}-3^n}{2^n+3^{n+1}} =$$

Dosadíme-li za n hodnotu ∞, dostaneme neurčitý výraz $\dfrac{\infty-\infty}{\infty}$.

V čitateli i jmenovateli vytkneme nejvyšší mocněnec s exponentem n. V našem případě 3^n.

Limita posloupnosti

Příklad

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}-3^n}{2^n+3^{n+1}}$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}-3^n}{2^n+3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n \cdot \left(\frac{2^{n+1}}{3^n}-1\right)}{3^n \cdot \left(\frac{2^n}{3^n}+3\right)} =$$

Dosadíme-li za n hodnotu ∞, dostaneme neurčitý výraz $\dfrac{\infty-\infty}{\infty}$.

V čitateli i jmenovateli vytkneme nejvyšší mocněnec s exponentem n. V našem případě 3^n.

Limita posloupnosti

Příklad

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}-3^n}{2^n+3^{n+1}}$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}-3^n}{2^n+3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n \cdot \left(\frac{2^{n+1}}{3^n}-1\right)}{3^n \cdot \left(\frac{2^n}{3^n}+3\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n-1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+3} =$$

Limita posloupnosti

Příklad

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}-3^n}{2^n+3^{n+1}}$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}-3^n}{2^n+3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n\cdot\left(\frac{2^{n+1}}{3^n}-1\right)}{3^n\cdot\left(\frac{2^n}{3^n}+3\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n-1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+3} =$$

Protože $\dfrac{2}{3} < 1$, platí $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$.

Limita posloupnosti

Příklad

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}-3^n}{2^n+3^{n+1}}$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}-3^n}{2^n+3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n\cdot\left(\frac{2^{n+1}}{3^n}-1\right)}{3^n\cdot\left(\frac{2^n}{3^n}+3\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n-1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+3} = -\frac{1}{3}$$

Protože $\dfrac{2}{3}<1$, platí $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n=0$.

Limita posloupnosti

Příklad

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}-3^n}{2^n+3^{n+1}}$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}-3^n}{2^n+3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n\cdot\left(\frac{2^{n+1}}{3^n}-1\right)}{3^n\cdot\left(\frac{2^n}{3^n}+3\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n-1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+3} = \underline{\underline{-\frac{1}{3}}}$$

Hromadné hodnoty posloupnosti

Příklad

Najděte hromadné hodnoty posloupnosti

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \frac{2^n-1}{2^n}, \dots .$$

Hromadné hodnoty posloupnosti

Příklad

Najděte hromadné hodnoty posloupnosti

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \frac{2^n-1}{2^n}, \dots .$$

Řešení

Hromadné hodnoty posloupnosti

Příklad

Najděte hromadné hodnoty posloupnosti

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \frac{2^n-1}{2^n}, \dots .$$

Řešení

Prvek a_0 se nazývá hromadná hodnota posloupnosti (a_n), jestliže ke každému jeho okolí U existuje nekonečně mnoho přirozených čísel k takových, že $a_k \in U$.

Hromadné hodnoty posloupnosti

Příklad

Najděte hromadné hodnoty posloupnosti

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \frac{2^n - 1}{2^n}, \dots .$$

Řešení

Prvek a_0 se nazývá hromadná hodnota posloupnosti (a_n), jestliže ke každému jeho okolí U existuje nekonečně mnoho přirozených čísel k takových, že $a_k \in U$.
Jinými slovy, a_0 je hromadným bodem (a_n), jestliže existuje její podposloupnost

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots, a_{n_k}, \dots \quad (1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \dots)$$

taková, že platí $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a_0$.

Hromadné hodnoty posloupnosti

Příklad

Najděte hromadné hodnoty posloupnosti

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \frac{2^n - 1}{2^n}, \ldots .$$

Řešení

Prvek a_0 se nazývá hromadná hodnota posloupnosti (a_n), jestliže ke každému jeho okolí U existuje nekonečně mnoho přirozených čísel k takových, že $a_k \in U$.
Jinými slovy, a_0 je hromadným bodem (a_n), jestliže existuje její podposloupnost

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots, a_{n_k}, \ldots \quad (1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \ldots)$$

taková, že platí $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a_0$.

Označme každý n-tý prvek zadané posloupnosti jako a_n.

Hromadné hodnoty posloupnosti

Příklad

Najděte hromadné hodnoty posloupnosti

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \frac{2^n-1}{2^n}, \dots .$$

Řešení

Prvek a_0 se nazývá hromadná hodnota posloupnosti (a_n), jestliže ke každému jeho okolí U existuje nekonečně mnoho přirozených čísel k takových, že $a_k \in U$.
Jinými slovy, a_0 je hromadným bodem (a_n), jestliže existuje její podposloupnost

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots, a_{n_k}, \dots \quad (1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \dots)$$

taková, že platí $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a_0$.

Označme každý n-tý prvek zadané posloupnosti jako a_n. Potom

$$a_n = \left\{ \right.$$

Hromadné hodnoty posloupnosti

Příklad

Najděte hromadné hodnoty posloupnosti

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \frac{2^n-1}{2^n}, \dots .$$

Řešení

Prvek a_0 se nazývá hromadná hodnota posloupnosti (a_n), jestliže ke každému jeho okolí U existuje nekonečně mnoho přirozených čísel k takových, že $a_k \in U$.
Jinými slovy, a_0 je hromadným bodem (a_n), jestliže existuje její podposloupnost

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots, a_{n_k}, \dots \quad (1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \dots)$$

taková, že platí $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a_0$.

Označme každý n-tý prvek zadané posloupnosti jako a_n. Potom

$$a_n = \begin{cases} a_{2k-1} = \dfrac{1}{2^k} & \text{pro } n = 2k-1, \\ & \end{cases}$$

Hromadné hodnoty posloupnosti

Příklad

Najděte hromadné hodnoty posloupnosti

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \frac{2^n-1}{2^n}, \dots .$$

Řešení

Prvek a_0 se nazývá hromadná hodnota posloupnosti (a_n), jestliže ke každému jeho okolí U existuje nekonečně mnoho přirozených čísel k takových, že $a_k \in U$.
Jinými slovy, a_0 je hromadným bodem (a_n), jestliže existuje její podposloupnost

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots, a_{n_k}, \dots \quad (1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \dots)$$

taková, že platí $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a_0$.

Označme každý n-tý prvek zadané posloupnosti jako a_n. Potom

$$a_n = \begin{cases} a_{2k-1} = \dfrac{1}{2^k} & \text{pro } n = 2k-1, \\ a_{2k} = \dfrac{2^k-1}{2^k} & \text{pro } n = 2k. \end{cases}$$

Hromadné hodnoty posloupnosti

Příklad

Najděte hromadné hodnoty posloupnosti

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \frac{2^n-1}{2^n}, \dots .$$

Řešení

Prvek a_0 se nazývá hromadná hodnota posloupnosti (a_n), jestliže ke každému jeho okolí U existuje nekonečně mnoho přirozených čísel k takových, že $a_k \in U$.
Jinými slovy, a_0 je hromadným bodem (a_n), jestliže existuje její podposloupnost

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots, a_{n_k}, \dots \quad (1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \dots)$$

taková, že platí $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a_0$.

Označme každý n-tý prvek zadané posloupnosti jako a_n. Potom

$$a_n = \begin{cases} a_{2k-1} = \dfrac{1}{2^k} & \text{pro } n = 2k-1, \\ a_{2k} = \dfrac{2^k-1}{2^k} & \text{pro } n = 2k. \end{cases}$$

Posloupnosti (a_{2k-1}) a (a_{2k}) jsou podposloupnostmi posloupnosti (a_n).

Hromadné hodnoty posloupnosti

Příklad

Najděte hromadné hodnoty posloupnosti

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \frac{2^n-1}{2^n}, \dots .$$

Řešení

Prvek a_0 se nazývá hromadná hodnota posloupnosti (a_n), jestliže ke každému jeho okolí U existuje nekonečně mnoho přirozených čísel k takových, že $a_k \in U$.
Jinými slovy, a_0 je hromadným bodem (a_n), jestliže existuje její podposloupnost

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots, a_{n_k}, \dots \quad (1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \dots)$$

taková, že platí $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a_0$.

Označme každý n-tý prvek zadané posloupnosti jako a_n. Potom

$$a_n = \begin{cases} a_{2k-1} = \dfrac{1}{2^k} & \text{pro } n = 2k-1, \\ a_{2k} = \dfrac{2^k-1}{2^k} & \text{pro } n = 2k. \end{cases}$$

Posloupnosti (a_{2k-1}) a (a_{2k}) jsou podposloupnostmi posloupnosti (a_n).
Navíc

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^k} = 0$$

Hromadné hodnoty posloupnosti

Příklad

Najděte hromadné hodnoty posloupnosti

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \frac{2^n-1}{2^n}, \dots.$$

Řešení

Prvek a_0 se nazývá hromadná hodnota posloupnosti (a_n), jestliže ke každému jeho okolí U existuje nekonečně mnoho přirozených čísel k takových, že $a_k \in U$.
Jinými slovy, a_0 je hromadným bodem (a_n), jestliže existuje její podposloupnost

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots, a_{n_k}, \dots \quad (1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \dots)$$

taková, že platí $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a_0$.

Označme každý n-tý prvek zadané posloupnosti jako a_n. Potom

$$a_n = \begin{cases} a_{2k-1} = \dfrac{1}{2^k} & \text{pro } n = 2k-1, \\ a_{2k} = \dfrac{2^k-1}{2^k} & \text{pro } n = 2k. \end{cases}$$

Posloupnosti (a_{2k-1}) a (a_{2k}) jsou podposloupnostmi posloupnosti (a_n).
Navíc

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^k} = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2^k-1}{2^k} = 1.$$

Hromadné hodnoty posloupnosti

Příklad

Najděte hromadné hodnoty posloupnosti

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \frac{2^n - 1}{2^n}, \dots.$$

Řešení

Prvek a_0 se nazývá hromadná hodnota posloupnosti (a_n), jestliže ke každému jeho okolí U existuje nekonečně mnoho přirozených čísel k takových, že $a_k \in U$.
Jinými slovy, a_0 je hromadným bodem (a_n), jestliže existuje její podposloupnost

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots, a_{n_k}, \dots \quad (1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \dots)$$

taková, že platí $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a_0$.

Označme každý n-tý prvek zadané posloupnosti jako a_n. Potom

$$a_n = \begin{cases} a_{2k-1} = \dfrac{1}{2^k} & \text{pro } n = 2k-1, \\ a_{2k} = \dfrac{2^k - 1}{2^k} & \text{pro } n = 2k. \end{cases}$$

Posloupnosti (a_{2k-1}) a (a_{2k}) jsou podposloupnostmi posloupnosti (a_n).
Navíc

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^k} = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2^k - 1}{2^k} = 1.$$

Tedy 0 a 1 jsou hromadné hodnoty posloupnosti (a_n).

Hromadné hodnoty posloupnosti

Příklad

Najděte hromadné hodnoty posloupnosti

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \frac{2^n - 1}{2^n}, \dots .$$

Řešení

Prvek a_0 se nazývá hromadná hodnota posloupnosti (a_n), jestliže ke každému jeho okolí U existuje nekonečně mnoho přirozených čísel k takových, že $a_k \in U$.
Jinými slovy, a_0 je hromadným bodem (a_n), jestliže existuje její podposloupnost

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots, a_{n_k}, \dots \quad (1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \dots)$$

taková, že platí $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a_0$.

Označme každý n-tý prvek zadané posloupnosti jako a_n. Potom

$$a_n = \begin{cases} a_{2k-1} = \dfrac{1}{2^k} & \text{pro } n = 2k-1, \\ a_{2k} = \dfrac{2^k - 1}{2^k} & \text{pro } n = 2k. \end{cases}$$

Posloupnosti (a_{2k-1}) a (a_{2k}) jsou podposloupnostmi posloupnosti (a_n).
Navíc

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^k} = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2^k - 1}{2^k} = 1.$$

Tedy 0 a 1 jsou hromadné hodnoty posloupnosti (a_n). Žádné jiné hromadné hodnoty neexistují, protože každá jiná konvergentní podposloupnost, vypustíme-li konečně mnoho jejich prvních členů (konvergenci to neovlivní), je zároveň podposloupností buď (a_{2k-1}) nebo (a_{2k}).

Hromadné hodnoty posloupnosti

Příklad

Najděte hromadné hodnoty posloupnosti

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \frac{2^n-1}{2^n}, \dots .$$

Řešení

Prvek a_0 se nazývá hromadná hodnota posloupnosti (a_n), jestliže ke každému jeho okolí U existuje nekonečně mnoho přirozených čísel k takových, že $a_k \in U$.
Jinými slovy, a_0 je hromadným bodem (a_n), jestliže existuje její podposloupnost

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots, a_{n_k}, \dots \quad (1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \dots)$$

taková, že platí $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a_0$.

Označme každý n-tý prvek zadané posloupnosti jako a_n. Potom

$$a_n = \begin{cases} a_{2k-1} = \dfrac{1}{2^k} & \text{pro } n = 2k-1, \\ a_{2k} = \dfrac{2^k-1}{2^k} & \text{pro } n = 2k. \end{cases}$$

Posloupnosti (a_{2k-1}) a (a_{2k}) jsou podposloupnostmi posloupnosti (a_n).
Navíc

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^k} = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2^k-1}{2^k} = 1.$$

$\Longrightarrow$ hodnoty 0 **a** 1 **jsou jediné hromadné body** posloupnosti (a_n),

Hromadné hodnoty posloupnosti

Příklad

Najděte hodnoty $\inf$, $\sup$, $\min$, $\max$, $\liminf\limits_{n\to\infty}$ *a* $\limsup\limits_{n\to\infty}$ *posloupnosti* $a_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$.

Hromadné hodnoty posloupnosti

Příklad

Najděte hodnoty $\inf$, $\sup$, $\min$, $\max$, $\liminf\limits_{n\to\infty}$ *a* $\limsup\limits_{n\to\infty}$ *posloupnosti* $a_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$.

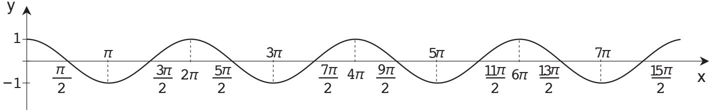
Řešení

Hromadné hodnoty posloupnosti

Příklad

Najděte hodnoty $\inf$, $\sup$, $\min$, $\max$, $\liminf\limits_{n\to\infty}$ *a* $\limsup\limits_{n\to\infty}$ *posloupnosti* $a_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$.

Řešení



Je zřejmé, že výraz

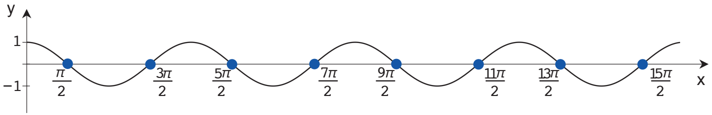
$$\cos\frac{n\pi}{2} = \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right.$$

Hromadné hodnoty posloupnosti

Příklad

Najděte hodnoty $\inf$, $\sup$, $\min$, $\max$, $\liminf\limits_{n\to\infty}$ *a* $\limsup\limits_{n\to\infty}$ *posloupnosti* $a_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$.

Řešení



Je zřejmé, že výraz

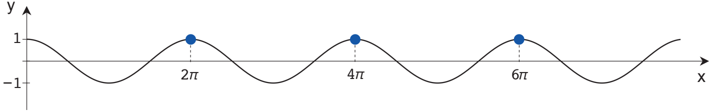
$$\cos\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{pro } n = 2k-1,\ k\in\mathbb{N}, \\ & \\ & \end{cases}$$

Hromadné hodnoty posloupnosti

Příklad

Najděte hodnoty inf, sup, min, max, $\liminf\limits_{n\to\infty}$ *a* $\limsup\limits_{n\to\infty}$ *posloupnosti* $a_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$.

Řešení



Je zřejmé, že výraz

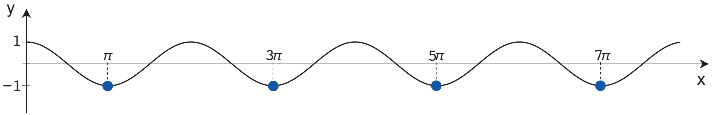
$$\cos\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{pro } n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}, \\ 1 & \text{pro } n = 4k,\ k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

Hromadné hodnoty posloupnosti

Příklad

Najděte hodnoty inf, sup, min, max, $\liminf\limits_{n\to\infty}$ *a* $\limsup\limits_{n\to\infty}$ *posloupnosti* $a_n = 1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2}$.

Řešení



Je zřejmé, že výraz

$$\cos\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{pro } n = 2k-1,\ k\in\mathbb{N}, \\ 1 & \text{pro } n = 4k,\ k\in\mathbb{N}, \\ -1 & \text{pro } n = 4k-2,\ k\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

Hromadné hodnoty posloupnosti

Příklad

Najděte hodnoty $\inf$, $\sup$, $\min$, $\max$, $\liminf\limits_{n\to\infty}$ *a* $\limsup\limits_{n\to\infty}$ *posloupnosti* $a_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$.

Řešení

Zadanou posloupnost můžeme psát v následujícím tvaru:

$$a_n = \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

Je zřejmé, že výraz

$$\cos\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{pro } n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}, \\ 1 & \text{pro } n = 4k,\ k \in \mathbb{N}, \\ -1 & \text{pro } n = 4k-2,\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Hromadné hodnoty posloupnosti

Příklad

Najděte hodnoty $\inf$, $\sup$, $\min$, $\max$, $\liminf\limits_{n\to\infty}$ *a* $\limsup\limits_{n\to\infty}$ *posloupnosti* $a_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$.

Řešení

Zadanou posloupnost můžeme psát v následujícím tvaru:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}, \\ & \\ & \end{cases}$$

Je zřejmé, že výraz

$$\cos\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{pro } n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}, \\ 1 & \text{pro } n = 4k,\ k \in \mathbb{N}, \\ -1 & \text{pro } n = 4k-2,\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Hromadné hodnoty posloupnosti

Příklad

Najděte hodnoty $\inf$, $\sup$, $\min$, $\max$, $\liminf\limits_{n\to\infty}$ *a* $\limsup\limits_{n\to\infty}$ *posloupnosti* $a_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$.

Řešení

Zadanou posloupnost můžeme psát v následujícím tvaru:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}, \\ 1 + \dfrac{n}{n+1} & \text{pro } n = 4k,\ k \in \mathbb{N}, \\ & \end{cases}$$

Je zřejmé, že výraz

$$\cos\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{pro } n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}, \\ 1 & \text{pro } n = 4k,\ k \in \mathbb{N}, \\ -1 & \text{pro } n = 4k-2,\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Hromadné hodnoty posloupnosti

Příklad

Najděte hodnoty $\inf$, $\sup$, $\min$, $\max$, $\liminf\limits_{n\to\infty}$ *a* $\limsup\limits_{n\to\infty}$ *posloupnosti* $a_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$.

Řešení

Zadanou posloupnost můžeme psát v následujícím tvaru:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}, \\ 1 + \dfrac{n}{n+1} & \text{pro } n = 4k,\ k \in \mathbb{N}, \\ 1 - \dfrac{n}{n+1} & \text{pro } n = 4k-2,\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Je zřejmé, že výraz

$$\cos\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{pro } n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}, \\ 1 & \text{pro } n = 4k,\ k \in \mathbb{N}, \\ -1 & \text{pro } n = 4k-2,\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Hromadné hodnoty posloupnosti

Příklad

Najděte hodnoty $\inf$, $\sup$, $\min$, $\max$, $\liminf\limits_{n\to\infty}$ *a* $\limsup\limits_{n\to\infty}$ *posloupnosti* $a_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$.

Řešení

Zadanou posloupnost můžeme psát v následujícím tvaru:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}, \\ 1 + \dfrac{n}{n+1} & \text{pro } n = 4k,\ k \in \mathbb{N}, \\ 1 - \dfrac{n}{n+1} & \text{pro } n = 4k-2,\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Hromadné hodnoty posloupnosti

Příklad

Najděte hodnoty $\inf$, $\sup$, $\min$, $\max$, $\liminf\limits_{n\to\infty}$ *a* $\limsup\limits_{n\to\infty}$ *posloupnosti* $a_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$.

Řešení

Zadanou posloupnost můžeme psát v následujícím tvaru:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}, \\ 1 + \dfrac{n}{n+1} & \text{pro } n = 4k,\ k \in \mathbb{N}, \\ 1 - \dfrac{n}{n+1} & \text{pro } n = 4k-2,\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Nechť M označuje množinu všech členů posloupnosti (a_n), tj. $M = \left\{ 1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$.

Hromadné hodnoty posloupnosti

Příklad

Najděte hodnoty inf, sup, min, max, $\liminf_{n\to\infty}$ *a* $\limsup_{n\to\infty}$ *posloupnosti* $a_n = 1 + \dfrac{n}{n+1} \cos \dfrac{n\pi}{2}$.

Řešení

Zadanou posloupnost můžeme psát v následujícím tvaru:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 2k-1,\, k \in \mathbb{N}, \\ 1 + \dfrac{n}{n+1} & \text{pro } n = 4k,\, k \in \mathbb{N}, \\ 1 - \dfrac{n}{n+1} & \text{pro } n = 4k-2,\, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Nechť M označuje množinu všech členů posloupnosti (a_n), tj. $M = \left\{ 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$. Potom

$$\inf a_n = \inf M,$$

Hromadné hodnoty posloupnosti

Příklad

Najděte hodnoty inf, sup, min, max, $\liminf\limits_{n\to\infty}$ *a* $\limsup\limits_{n\to\infty}$ *posloupnosti* $a_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$.

Řešení

Zadanou posloupnost můžeme psát v následujícím tvaru:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}, \\ 1 + \dfrac{n}{n+1} & \text{pro } n = 4k,\ k \in \mathbb{N}, \\ 1 - \dfrac{n}{n+1} & \text{pro } n = 4k-2,\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Nechť M označuje množinu všech členů posloupnosti (a_n), tj. $M = \left\{ 1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$. Potom

$$\inf a_n = \inf M, \quad \sup a_n = \sup M,$$

Hromadné hodnoty posloupnosti

Příklad

Najděte hodnoty inf, sup, min, max, $\liminf\limits_{n\to\infty}$ *a* $\limsup\limits_{n\to\infty}$ *posloupnosti* $a_n = 1 + \dfrac{n}{n+1} \cos \dfrac{n\pi}{2}$.

Řešení

Zadanou posloupnost můžeme psát v následujícím tvaru:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}, \\ 1 + \dfrac{n}{n+1} & \text{pro } n = 4k,\ k \in \mathbb{N}, \\ 1 - \dfrac{n}{n+1} & \text{pro } n = 4k-2,\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Nechť M označuje množinu všech členů posloupnosti (a_n), tj. $M = \left\{ 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$. Potom

$$\inf a_n = \inf M, \quad \sup a_n = \sup M, \quad \min a_n = \min M,$$

Hromadné hodnoty posloupnosti

Příklad

Najděte hodnoty inf, sup, min, max, $\liminf\limits_{n\to\infty}$ *a* $\limsup\limits_{n\to\infty}$ *posloupnosti* $a_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$.

Řešení

Zadanou posloupnost můžeme psát v následujícím tvaru:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}, \\ 1 + \dfrac{n}{n+1} & \text{pro } n = 4k,\ k \in \mathbb{N}, \\ 1 - \dfrac{n}{n+1} & \text{pro } n = 4k-2,\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Nechť M označuje množinu všech členů posloupnosti (a_n), tj. $M = \left\{ 1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$. Potom

$$\inf a_n = \inf M, \quad \sup a_n = \sup M, \quad \min a_n = \min M, \quad \max a_n = \max M.$$

Hromadné hodnoty posloupnosti

Příklad

Najděte hodnoty inf, sup, min, max, $\liminf\limits_{n\to\infty}$ *a* $\limsup\limits_{n\to\infty}$ *posloupnosti* $a_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$.

Řešení

Zadanou posloupnost můžeme psát v následujícím tvaru:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}, \\ 1 + \dfrac{n}{n+1} & \text{pro } n = 4k,\ k \in \mathbb{N}, \\ 1 - \dfrac{n}{n+1} & \text{pro } n = 4k-2,\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Nechť M označuje množinu všech členů posloupnosti (a_n), tj. $M = \left\{ 1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$. Potom

$$\inf a_n = \inf M, \quad \sup a_n = \sup M, \quad \min a_n = \min M, \quad \max a_n = \max M.$$

Protože $M = \{1\} \cup \cdots$

Hromadné hodnoty posloupnosti

Příklad

Najděte hodnoty inf, sup, min, max, $\liminf_{n\to\infty}$ *a* $\limsup_{n\to\infty}$ *posloupnosti* $a_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$.

Řešení

Zadanou posloupnost můžeme psát v následujícím tvaru:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}, \\ 1 + \dfrac{n}{n+1} & \text{pro } n = 4k,\ k \in \mathbb{N}, \\ 1 - \dfrac{n}{n+1} & \text{pro } n = 4k-2,\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Nechť M označuje množinu všech členů posloupnosti (a_n), tj. $M = \left\{1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$. Potom

$$\inf a_n = \inf M, \quad \sup a_n = \sup M, \quad \min a_n = \min M, \quad \max a_n = \max M.$$

Protože $M = \{1\} \cup \left\{1 + \dfrac{4k}{4k+1} \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\} \cup \cdots$

Hromadné hodnoty posloupnosti

Příklad

Najděte hodnoty inf, sup, min, max, $\liminf\limits_{n\to\infty}$ *a* $\limsup\limits_{n\to\infty}$ *posloupnosti* $a_n = 1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2}$.

Řešení

Zadanou posloupnost můžeme psát v následujícím tvaru:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}, \\ 1 + \dfrac{n}{n+1} & \text{pro } n = 4k,\ k \in \mathbb{N}, \\ 1 - \dfrac{n}{n+1} & \text{pro } n = 4k-2,\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Nechť M označuje množinu všech členů posloupnosti (a_n), tj. $M = \left\{1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$. Potom

$$\inf a_n = \inf M, \quad \sup a_n = \sup M, \quad \min a_n = \min M, \quad \max a_n = \max M.$$

Protože $M = \{1\} \cup \left\{1 + \dfrac{4k}{4k+1} \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{1 - \dfrac{4k-2}{4k-1} \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$,

Hromadné hodnoty posloupnosti

Příklad

Najděte hodnoty inf, sup, min, max, $\liminf_{n\to\infty}$ *a* $\limsup_{n\to\infty}$ *posloupnosti* $a_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$.

Řešení

Zadanou posloupnost můžeme psát v následujícím tvaru:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}, \\ 1 + \dfrac{n}{n+1} & \text{pro } n = 4k,\ k \in \mathbb{N}, \\ 1 - \dfrac{n}{n+1} & \text{pro } n = 4k-2,\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Nechť M označuje množinu všech členů posloupnosti (a_n), tj. $M = \left\{ 1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$. Potom

$$\inf a_n = \inf M, \quad \sup a_n = \sup M, \quad \min a_n = \min M, \quad \max a_n = \max M.$$

Protože $M = \{1\} \cup \left\{ 1 + \dfrac{4k}{4k+1} \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ 1 - \dfrac{4k-2}{4k-1} \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \right\}$,

$$\inf a_n = 0,$$

Hromadné hodnoty posloupnosti

Příklad

Najděte hodnoty inf, sup, min, max, $\liminf\limits_{n\to\infty}$ *a* $\limsup\limits_{n\to\infty}$ *posloupnosti* $a_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$.

Řešení

Zadanou posloupnost můžeme psát v následujícím tvaru:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}, \\ 1 + \dfrac{n}{n+1} & \text{pro } n = 4k,\ k \in \mathbb{N}, \\ 1 - \dfrac{n}{n+1} & \text{pro } n = 4k-2,\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Nechť M označuje množinu všech členů posloupnosti (a_n), tj. $M = \left\{ 1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$. Potom

$$\inf a_n = \inf M, \quad \sup a_n = \sup M, \quad \min a_n = \min M, \quad \max a_n = \max M.$$

Protože $M = \{1\} \cup \left\{ 1 + \dfrac{4k}{4k+1} \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ 1 - \dfrac{4k-2}{4k-1} \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \right\}$,

$$\inf a_n = 0, \quad \sup a_n = 2,$$

Hromadné hodnoty posloupnosti

Příklad

Najděte hodnoty inf, sup, min, max, $\liminf\limits_{n\to\infty}$ *a* $\limsup\limits_{n\to\infty}$ *posloupnosti* $a_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$.

Řešení

Zadanou posloupnost můžeme psát v následujícím tvaru:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}, \\ 1 + \dfrac{n}{n+1} & \text{pro } n = 4k,\ k \in \mathbb{N}, \\ 1 - \dfrac{n}{n+1} & \text{pro } n = 4k-2,\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Nechť M označuje množinu všech členů posloupnosti (a_n), tj. $M = \left\{ 1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$. Potom

$$\inf a_n = \inf M, \quad \sup a_n = \sup M, \quad \min a_n = \min M, \quad \max a_n = \max M.$$

Protože $M = \{1\} \cup \left\{ 1 + \dfrac{4k}{4k+1} \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ 1 - \dfrac{4k-2}{4k-1} \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \right\}$,

$$\inf a_n = 0, \quad \sup a_n = 2, \quad \max a_n \text{ a } \min a_n \text{ neexistuje.}$$

Hromadné hodnoty posloupnosti

Příklad

Najděte hodnoty inf, sup, min, max, $\liminf\limits_{n\to\infty}$ *a* $\limsup\limits_{n\to\infty}$ *posloupnosti* $a_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$.

Řešení

Zadanou posloupnost můžeme psát v následujícím tvaru:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}, \\ 1 + \dfrac{n}{n+1} & \text{pro } n = 4k,\ k \in \mathbb{N}, \\ 1 - \dfrac{n}{n+1} & \text{pro } n = 4k-2,\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Nechť M označuje množinu všech členů posloupnosti (a_n), tj. $M = \left\{1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$. Potom

$$\inf a_n = \inf M, \quad \sup a_n = \sup M, \quad \min a_n = \min M, \quad \max a_n = \max M.$$

Protože $M = \{1\} \cup \left\{1 + \dfrac{4k}{4k+1} \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{1 - \dfrac{4k-2}{4k-1} \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$,

$$\inf a_n = 0, \quad \sup a_n = 2, \quad \max a_n \text{ a } \min a_n \text{ neexistuje.}$$

Hromadné hodnoty posloupnosti (a_n) jsou body 0, 1 a 2.

Hromadné hodnoty posloupnosti

Příklad

Najděte hodnoty $\inf$, $\sup$, $\min$, $\max$, $\liminf\limits_{n\to\infty}$ *a* $\limsup\limits_{n\to\infty}$ *posloupnosti* $a_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$.

Řešení

Zadanou posloupnost můžeme psát v následujícím tvaru:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}, \\ 1 + \dfrac{n}{n+1} & \text{pro } n = 4k,\ k \in \mathbb{N}, \\ 1 - \dfrac{n}{n+1} & \text{pro } n = 4k-2,\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Nechť M označuje množinu všech členů posloupnosti (a_n), tj. $M = \left\{ 1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$. Potom

$$\inf a_n = \inf M, \quad \sup a_n = \sup M, \quad \min a_n = \min M, \quad \max a_n = \max M.$$

Protože $M = \{1\} \cup \left\{ 1 + \dfrac{4k}{4k+1} \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ 1 - \dfrac{4k-2}{4k-1} \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \right\}$,

$$\inf a_n = 0, \quad \sup a_n = 2, \quad \max a_n \text{ a } \min a_n \text{ neexistuje.}$$

Hromadné hodnoty posloupnosti (a_n) jsou body $0, 1$ a 2. Protože $\liminf_{n\to\infty} a_n$ je nejmenší hromadná hodnota posloupnosti (a_n) a $\limsup_{n\to\infty} a_n$ je největší hromadná hodnota dané posloupnosti,

Hromadné hodnoty posloupnosti

Příklad

Najděte hodnoty inf, sup, min, max, $\liminf\limits_{n\to\infty}$ *a* $\limsup\limits_{n\to\infty}$ *posloupnosti* $a_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$.

Řešení

Zadanou posloupnost můžeme psát v následujícím tvaru:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}, \\ 1 + \dfrac{n}{n+1} & \text{pro } n = 4k,\ k \in \mathbb{N}, \\ 1 - \dfrac{n}{n+1} & \text{pro } n = 4k-2,\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Nechť M označuje množinu všech členů posloupnosti (a_n), tj. $M = \left\{ 1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$. Potom

$$\inf a_n = \inf M, \quad \sup a_n = \sup M, \quad \min a_n = \min M, \quad \max a_n = \max M.$$

Protože $M = \{1\} \cup \left\{ 1 + \dfrac{4k}{4k+1} \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ 1 - \dfrac{4k-2}{4k-1} \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \right\}$,

$$\inf a_n = 0, \quad \sup a_n = 2, \quad \max a_n \text{ a } \min a_n \text{ neexistuje.}$$

Hromadné hodnoty posloupnosti (a_n) jsou body $0, 1$ a 2. Protože $\liminf_{n\to\infty} a_n$ je nejmenší hromadná hodnota posloupnosti (a_n) a $\limsup_{n\to\infty} a_n$ je největší hromadná hodnota dané posloupnosti,

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = 0$$

Hromadné hodnoty posloupnosti

Příklad

Najděte hodnoty inf, sup, min, max, $\liminf_{n\to\infty}$ *a* $\limsup_{n\to\infty}$ *posloupnosti* $a_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$.

Řešení

Zadanou posloupnost můžeme psát v následujícím tvaru:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}, \\ 1 + \dfrac{n}{n+1} & \text{pro } n = 4k,\ k \in \mathbb{N}, \\ 1 - \dfrac{n}{n+1} & \text{pro } n = 4k-2,\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Nechť M označuje množinu všech členů posloupnosti (a_n), tj. $M = \left\{ 1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$. Potom

$$\inf a_n = \inf M, \quad \sup a_n = \sup M, \quad \min a_n = \min M, \quad \max a_n = \max M.$$

Protože $M = \{1\} \cup \left\{ 1 + \dfrac{4k}{4k+1} \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ 1 - \dfrac{4k-2}{4k-1} \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \right\}$,

$$\inf a_n = 0, \quad \sup a_n = 2, \quad \max a_n \text{ a } \min a_n \text{ neexistuje.}$$

Hromadné hodnoty posloupnosti (a_n) jsou body $0, 1$ a 2. Protože $\liminf_{n\to\infty} a_n$ je nejmenší hromadná hodnota posloupnosti (a_n) a $\limsup_{n\to\infty} a_n$ je největší hromadná hodnota dané posloupnosti,

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \text{a} \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = 2.$$

Hromadné hodnoty posloupnosti

Příklad

Najděte hodnoty $\inf$, $\sup$, $\min$, $\max$, $\liminf\limits_{n\to\infty}$ *a* $\limsup\limits_{n\to\infty}$ *posloupnosti* $a_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$.

Řešení

Zadanou posloupnost můžeme psát v následujícím tvaru:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}, \\ 1 + \dfrac{n}{n+1} & \text{pro } n = 4k,\ k \in \mathbb{N}, \\ 1 - \dfrac{n}{n+1} & \text{pro } n = 4k-2,\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Nechť M označuje množinu všech členů posloupnosti (a_n), tj. $M = \left\{ 1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$. Potom

$$\inf a_n = \inf M, \quad \sup a_n = \sup M, \quad \min a_n = \min M, \quad \max a_n = \max M.$$

Protože $M = \{1\} \cup \left\{ 1 + \dfrac{4k}{4k+1} \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ 1 - \dfrac{4k-2}{4k-1} \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \right\}$,

$$\inf \mathbf{a_n} = \underline{\underline{\mathbf{0}}}, \quad \sup \mathbf{a_n} = \underline{\underline{\mathbf{2}}}, \quad \max \mathbf{a_n} \textbf{ a } \min \mathbf{a_n} \textbf{ neexistuje}.$$

Hromadné hodnoty posloupnosti (a_n) jsou body $0, 1$ a 2. Protože $\liminf_{n\to\infty} a_n$ je nejmenší hromadná hodnota posloupnosti (a_n) a $\limsup_{n\to\infty} a_n$ je největší hromadná hodnota dané posloupnosti,

$$\liminf_{\mathbf{n}\to\infty} \mathbf{a_n} = \underline{\underline{\mathbf{0}}} \quad \text{a} \quad \limsup_{\mathbf{n}\to\infty} \mathbf{a_n} = \underline{\underline{\mathbf{2}}}.$$

Stejnoměrná a bodová konvergence

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}$$

stejnoměrně konvergentní na intervalu $[0, 1]$.

Stejnoměrná a bodová konvergence

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}$$

stejnoměrně konvergentní na intervalu $[0, 1]$.

Řešení

Stejnoměrná a bodová konvergence

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$$

stejnoměrně konvergentní na intervalu $[0,1]$.

Řešení

Jestliže f_n stejnoměrně konverguje na $[0,1]$ k nějaké funkci f, musí konvergovat na stejném intervalu k této funkci i bodově.

Stejnoměrná a bodová konvergence

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$$

stejnoměrně konvergentní na intervalu $[0, 1]$.

Řešení

Jestliže f_n stejnoměrně konverguje na $[0, 1]$ k nějaké funkci f, musí konvergovat na stejném intervalu k této funkci i bodově.

$$f(x) = ?$$

Nejdříve najdeme funkci f takovou, že f_n k f konverguje bodově,

Stejnoměrná a bodová konvergence

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$$

stejnoměrně konvergentní na intervalu $[0,1]$.

Řešení

Jestliže f_n stejnoměrně konverguje na $[0,1]$ k nějaké funkci f, musí konvergovat na stejném intervalu k této funkci i bodově.

$$f(x) = ?$$

Nejdříve najdeme funkci f takovou, že f_n k f konverguje bodově, tzn. musíme určit

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{pro každé } x \in [0,1].$$

Stejnoměrná a bodová konvergence

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}$$

stejnoměrně konvergentní na intervalu $[0, 1]$.

Řešení

Jestliže f_n stejnoměrně konverguje na $[0, 1]$ k nějaké funkci f, musí konvergovat na stejném intervalu k této funkci i bodově.

$$f(x) = ?$$

Nejdříve najdeme funkci f takovou, že f_n k f konverguje bodově, tzn. musíme určit

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) \quad \text{pro každé } x \in [0, 1].$$

- $x \in [0, 1)$:

Stejnoměrná a bodová konvergence

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}$$

stejnoměrně konvergentní na intervalu $[0, 1]$.

Řešení

Jestliže f_n stejnoměrně konverguje na $[0, 1]$ k nějaké funkci f, musí konvergovat na stejném intervalu k této funkci i bodově.

$$f(x) = ?$$

Nejdříve najdeme funkci f takovou, že f_n k f konverguje bodově, tzn. musíme určit

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) \quad \text{pro každé } x \in [0, 1].$$

- $x \in [0, 1)$: $\quad \lim_{n \to \infty} f_n(x) =$

Stejnoměrná a bodová konvergence

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$$

stejnoměrně konvergentní na intervalu $[0,1]$.

Řešení

Jestliže f_n stejnoměrně konverguje na $[0,1]$ k nějaké funkci f, musí konvergovat na stejném intervalu k této funkci i bodově.

$$f(x) = ?$$

Nejdříve najdeme funkci f takovou, že f_n k f konverguje bodově, tzn. musíme určit

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{pro každé } x \in [0,1].$$

- $x \in [0,1)$: $\quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^n} =$

Stejnoměrná a bodová konvergence

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$$

stejnoměrně konvergentní na intervalu $[0,1]$.

Řešení

Jestliže f_n stejnoměrně konverguje na $[0,1]$ k nějaké funkci f, musí konvergovat na stejném intervalu k této funkci i bodově.

$$f(x) = ?$$

Nejdříve najdeme funkci f takovou, že f_n k f konverguje bodově, tzn. musíme určit

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{pro každé } x \in [0,1].$$

- $x \in [0,1)$: $\quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^n} = 0$

Stejnoměrná a bodová konvergence

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$$

stejnoměrně konvergentní na intervalu $[0,1]$.

Řešení

Jestliže f_n stejnoměrně konverguje na $[0,1]$ k nějaké funkci f, musí konvergovat na stejném intervalu k této funkci i bodově.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1), \\ & \end{cases}$$

Nejdříve najdeme funkci f takovou, že f_n k f konverguje bodově, tzn. musíme určit

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{pro každé } x \in [0,1].$$

- $x \in [0,1)$: $\displaystyle \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^n} = 0$

Stejnoměrná a bodová konvergence

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$$

stejnoměrně konvergentní na intervalu $[0,1]$.

Řešení

Jestliže f_n stejnoměrně konverguje na $[0,1]$ k nějaké funkci f, musí konvergovat na stejném intervalu k této funkci i bodově.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1), \\ & \end{cases}$$

Nejdříve najdeme funkci f takovou, že f_n k f konverguje bodově, tzn. musíme určit

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{pro každé } x \in [0,1].$$

- $x \in [0,1)$: $\quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^n} = 0$
- $x = 1$:

Stejnoměrná a bodová konvergence

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$$

stejnoměrně konvergentní na intervalu $[0,1]$.

Řešení

Jestliže f_n stejnoměrně konverguje na $[0,1]$ k nějaké funkci f, musí konvergovat na stejném intervalu k této funkci i bodově.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1), \\ & \end{cases}$$

Nejdříve najdeme funkci f takovou, že f_n k f konverguje bodově, tzn. musíme určit

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{pro každé } x \in [0,1].$$

- $x \in [0,1)$: $\quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^n} = 0$
- $x = 1$: $\quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) =$

Stejnoměrná a bodová konvergence

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$$

stejnoměrně konvergentní na intervalu $[0, 1]$.

Řešení

Jestliže f_n stejnoměrně konverguje na $[0, 1]$ k nějaké funkci f, musí konvergovat na stejném intervalu k této funkci i bodově.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1), \\ & \end{cases}$$

Nejdříve najdeme funkci f takovou, že f_n k f konverguje bodově, tzn. musíme určit

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{pro každé } x \in [0, 1].$$

- $x \in [0, 1)$: $\quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^n} = 0$
- $x = 1$: $\quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1^n}{1+1^n} =$

Stejnoměrná a bodová konvergence

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$$

stejnoměrně konvergentní na intervalu $[0,1]$.

Řešení

Jestliže f_n stejnoměrně konverguje na $[0,1]$ k nějaké funkci f, musí konvergovat na stejném intervalu k této funkci i bodově.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1), \\ & \end{cases}$$

Nejdříve najdeme funkci f takovou, že f_n k f konverguje bodově, tzn. musíme určit

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{pro každé } x \in [0,1].$$

- $x \in [0,1)$: $\quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^n} = 0$
- $x = 1$: $\quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1^n}{1+1^n} = \frac{1}{2}$

Stejnoměrná a bodová konvergence

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$$

stejnoměrně konvergentní na intervalu $[0,1]$.

Řešení

Jestliže f_n stejnoměrně konverguje na $[0,1]$ k nějaké funkci f, musí konvergovat na stejném intervalu k této funkci i bodově.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1), \\ \frac{1}{2} & x = 1. \end{cases}$$

Nejdříve najdeme funkci f takovou, že f_n k f konverguje bodově, tzn. musíme určit

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{pro každé } x \in [0,1].$$

- $x \in [0,1)$: $\quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^n} = 0$
- $x = 1$: $\quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1^n}{1+1^n} = \frac{1}{2}$

Stejnoměrná a bodová konvergence

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$$

stejnoměrně konvergentní na intervalu $[0, 1]$.

Řešení

Jestliže f_n stejnoměrně konverguje na $[0, 1]$ k nějaké funkci f, musí konvergovat na stejném intervalu k této funkci i bodově.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1), \\ \frac{1}{2} & x = 1. \end{cases}$$

Tedy posloupnost funkcí f_n konveguje k funkci f bodově.

Stejnoměrná a bodová konvergence

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}$$

stejnoměrně konvergentní na intervalu $[0, 1]$.

Řešení

Jestliže f_n stejnoměrně konverguje na $[0, 1]$ k nějaké funkci f, musí konvergovat na stejném intervalu k této funkci i bodově.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1), \\ \frac{1}{2} & x = 1. \end{cases}$$

Tedy posloupnost funkcí f_n konveguje k funkci f bodově. Nyní ověříme stejnoměrnou konvergenci na $[0, 1]$,

Stejnoměrná a bodová konvergence

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$$

stejnoměrně konvergentní na intervalu $[0, 1]$*.*

Řešení

Jestliže f_n stejnoměrně konverguje na $[0, 1]$ k nějaké funkci f, musí konvergovat na stejném intervalu k této funkci i bodově.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1), \\ \dfrac{1}{2} & x = 1. \end{cases}$$

Tedy posloupnost funkcí f_n konveguje k funkci f bodově. Nyní ověříme stejnoměrnou konvergenci na $[0, 1]$, tzn. zda pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ a $x \in [0, 1]$ platí

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Stejnoměrná a bodová konvergence

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$$

stejnoměrně konvergentní na intervalu $[0,1]$.

Řešení

Jestliže f_n stejnoměrně konverguje na $[0,1]$ k nějaké funkci f, musí konvergovat na stejném intervalu k této funkci i bodově.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1), \\ \frac{1}{2} & x = 1. \end{cases}$$

Nejdříve si načrtneme funkce f_n

Stejnoměrná a bodová konvergence

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$$

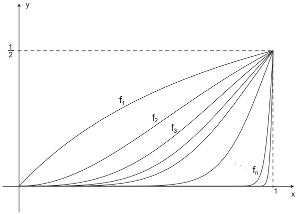
stejnoměrně konvergentní na intervalu $[0,1]$.

Řešení

Jestliže f_n stejnoměrně konverguje na $[0,1]$ k nějaké funkci f, musí konvergovat na stejném intervalu k této funkci i bodově.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1), \\ \frac{1}{2} & x = 1. \end{cases}$$

Nejdříve si načrtneme funkce f_n



Stejnoměrná a bodová konvergence

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}$$

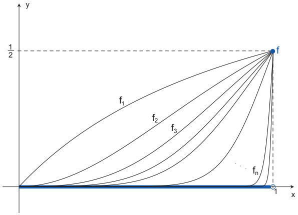
stejnoměrně konvergentní na intervalu $[0, 1]$.

Řešení

Jestliže f_n stejnoměrně konverguje na $[0, 1]$ k nějaké funkci f, musí konvergovat na stejném intervalu k této funkci i bodově.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1), \\ \frac{1}{2} & x = 1. \end{cases}$$

Nejdříve si načrtneme funkce f_n a f.



Stejnoměrná a bodová konvergence

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}$$

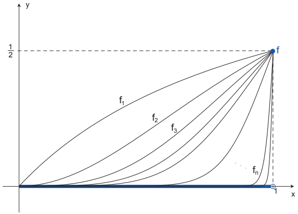
stejnoměrně konvergentní na intervalu $[0, 1]$.

Řešení

Jestliže f_n stejnoměrně konverguje na $[0, 1]$ k nějaké funkci f, musí konvergovat na stejném intervalu k této funkci i bodově.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1), \\ \frac{1}{2} & x = 1. \end{cases}$$

Nejdříve si načrtneme funkce f_n a f.



Z obrázku je patrné, že f_n k f stejnoměrně nekonverguje.

Stejnoměrná a bodová konvergence

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}$$

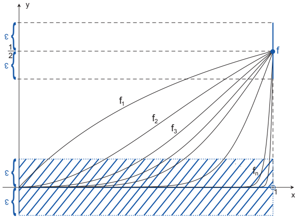
stejnoměrně konvergentní na intervalu $[0, 1]$*.*

Řešení

Jestliže f_n stejnoměrně konverguje na $[0, 1]$ k nějaké funkci f, musí konvergovat na stejném intervalu k této funkci i bodově.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1), \\ \frac{1}{2} & x = 1. \end{cases}$$

Nejdříve si načrtneme funkce f_n a f.



Z obrázku je patrné, že f_n k f stejnoměrně nekonverguje. Vezmeme-li si $\varepsilon < \frac{1}{2}$, musí existovat $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že grafy všech funkcí f_n, kde $n \geq n_0$, leží v "ε-pásu" kolem grafu funkce f.

Stejnoměrná a bodová konvergence

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}$$

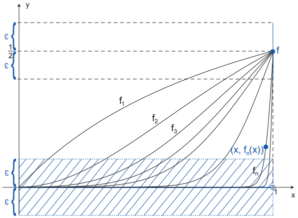
stejnoměrně konvergentní na intervalu $[0, 1]$.

Řešení

Jestliže f_n stejnoměrně konverguje na $[0, 1]$ k nějaké funkci f, musí konvergovat na stejném intervalu k této funkci i bodově.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1), \\ \frac{1}{2} & x = 1. \end{cases}$$

Nejdříve si načrtneme funkce f_n a f.



Z obrázku je patrné, že f_n k f stejnoměrně nekonverguje. Vezmeme-li si $\varepsilon < \frac{1}{2}$, musí existovat $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že grafy všech funkcí f_n, kde $n \geq n_0$, leží v "ε-pásu" kolem grafu funkce f. Z obrázku je vidět, že pro každé n najdeme x (hodně blízko 1) tak, že $(x, f_n(x))$ v tomto "ε-pásu" neleží.

Stejnoměrná a bodová konvergence

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}$$

stejnoměrně konvergentní na intervalu $[0, 1]$*.*

Řešení

Jestliže f_n stejnoměrně konverguje na $[0, 1]$ k nějaké funkci f, musí konvergovat na stejném intervalu k této funkci i bodově.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1), \\ \frac{1}{2} & x = 1. \end{cases}$$

Nyní naši hypotézu dokážeme.

Stejnoměrná a bodová konvergence

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$$

stejnoměrně konvergentní na intervalu $[0,1]$.

Řešení

Jestliže f_n stejnoměrně konverguje na $[0,1]$ k nějaké funkci f, musí konvergovat na stejném intervalu k této funkci i bodově.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1), \\ \frac{1}{2} & x = 1. \end{cases}$$

Nyní naši hypotézu dokážeme. Tedy ukážeme, že existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $n_0 \in \mathbb{N}$ najdeme $n \geq n_0$ a $x \in [0,1]$ splňující podmínku $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$.

Stejnoměrná a bodová konvergence

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}$$

stejnoměrně konvergentní na intervalu $[0, 1]$.

Řešení

Jestliže f_n stejnoměrně konverguje na $[0, 1]$ k nějaké funkci f, musí konvergovat na stejném intervalu k této funkci i bodově.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1), \\ \frac{1}{2} & x = 1. \end{cases}$$

Nyní naši hypotézu dokážeme. Tedy ukážeme, že existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $n_0 \in \mathbb{N}$ najdeme $n \geq n_0$ a $x \in [0, 1]$ splňující podmínku $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$.

Zvolme si $\varepsilon = \frac{1}{4}$.

Stejnoměrná a bodová konvergence

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$$

stejnoměrně konvergentní na intervalu $[0,1]$.

Řešení

Jestliže f_n stejnoměrně konverguje na $[0,1]$ k nějaké funkci f, musí konvergovat na stejném intervalu k této funkci i bodově.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1), \\ \dfrac{1}{2} & x = 1. \end{cases}$$

Nyní naši hypotézu dokážeme. Tedy ukážeme, že existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $n_0 \in \mathbb{N}$ najdeme $n \geq n_0$ a $x \in [0,1]$ splňující podmínku $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$.

Zvolme si $\varepsilon = \frac{1}{4}$.

Hodnotu ε můžeme navolit i jinak. Z předchozího obrázku lze vidět, že ε můžeme vzít libovolné menší než $\dfrac{1}{2}$.

Stejnoměrná a bodová konvergence

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$$

stejnoměrně konvergentní na intervalu $[0,1]$.

Řešení

Jestliže f_n stejnoměrně konverguje na $[0,1]$ k nějaké funkci f, musí konvergovat na stejném intervalu k této funkci i bodově.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1), \\ \dfrac{1}{2} & x = 1. \end{cases}$$

Nyní naši hypotézu dokážeme. Tedy ukážeme, že existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $n_0 \in \mathbb{N}$ najdeme $n \geq n_0$ a $x \in [0,1]$ splňující podmínku $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$.

Zvolme si $\varepsilon = \frac{1}{4}$.

Stejnoměrná a bodová konvergence

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$$

stejnoměrně konvergentní na intervalu $[0,1]$*.*

Řešení

Jestliže f_n stejnoměrně konverguje na $[0,1]$ k nějaké funkci f, musí konvergovat na stejném intervalu k této funkci i bodově.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1), \\ \dfrac{1}{2} & x = 1. \end{cases}$$

Nyní naši hypotézu dokážeme. Tedy ukážeme, že existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $n_0 \in \mathbb{N}$ najdeme $n \geq n_0$ a $x \in [0,1]$ splňující podmínku $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$.

Zvolme si $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ je libovolné a nechť $n \geq n_0$.

Stejnoměrná a bodová konvergence

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$$

stejnoměrně konvergentní na intervalu $[0,1]$.

Řešení

Jestliže f_n stejnoměrně konverguje na $[0,1]$ k nějaké funkci f, musí konvergovat na stejném intervalu k této funkci i bodově.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1), \\ \frac{1}{2} & x = 1. \end{cases}$$

Nyní naši hypotézu dokážeme. Tedy ukážeme, že existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $n_0 \in \mathbb{N}$ najdeme $n \geq n_0$ a $x \in [0,1]$ splňující podmínku $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$.

Zvolme si $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ je libovolné a nechť $n \geq n_0$. Najdeme $x \in [0,1]$ takové, že

$$|f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{4}.$$

Stejnoměrná a bodová konvergence

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$$

stejnoměrně konvergentní na intervalu $[0,1]$.

Řešení

Jestliže f_n stejnoměrně konverguje na $[0,1]$ k nějaké funkci f, musí konvergovat na stejném intervalu k této funkci i bodově.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1), \\ \dfrac{1}{2} & x = 1. \end{cases}$$

Nyní naši hypotézu dokážeme. Tedy ukážeme, že existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $n_0 \in \mathbb{N}$ najdeme $n \geq n_0$ a $x \in [0,1]$ splňující podmínku $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$.

Zvolme si $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ je libovolné a nechť $n \geq n_0$. Najdeme $x \in [0,1]$ takové, že

$$|f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{4}.$$

Je zřejmé, že hledané x bude z intervalu $[0,1)$, protože pro $x = 1$ máme

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{1^n}{1+1^n} - \frac{1}{2} \right| = 0.$$

Stejnoměrná a bodová konvergence

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$$

stejnoměrně konvergentní na intervalu $[0,1]$.

Řešení

Jestliže f_n stejnoměrně konverguje na $[0,1]$ k nějaké funkci f, musí konvergovat na stejném intervalu k této funkci i bodově.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1), \\ \frac{1}{2} & x = 1. \end{cases}$$

Nyní naši hypotézu dokážeme. Tedy ukážeme, že existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $n_0 \in \mathbb{N}$ najdeme $n \geq n_0$ a $x \in [0,1]$ splňující podmínku $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$.

Zvolme si $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ je libovolné a nechť $n \geq n_0$. Najdeme $x \in [0,1]$ takové, že

$$|f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{4}.$$

Je zřejmé, že hledané x bude z intervalu $[0,1)$,

Stejnoměrná a bodová konvergence

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$$

stejnoměrně konvergentní na intervalu $[0,1]$.

Řešení

Jestliže f_n stejnoměrně konverguje na $[0,1]$ k nějaké funkci f, musí konvergovat na stejném intervalu k této funkci i bodově.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1), \\ \frac{1}{2} & x = 1. \end{cases}$$

Nyní naši hypotézu dokážeme. Tedy ukážeme, že existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $n_0 \in \mathbb{N}$ najdeme $n \geq n_0$ a $x \in [0,1]$ splňující podmínku $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$.

Zvolme si $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ je libovolné a nechť $n \geq n_0$. Najdeme $x \in [0,1]$ takové, že

$$|f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{4}.$$

Stejnoměrná a bodová konvergence

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}$$

stejnoměrně konvergentní na intervalu $[0, 1]$.

Řešení

Jestliže f_n stejnoměrně konverguje na $[0, 1]$ k nějaké funkci f, musí konvergovat na stejném intervalu k této funkci i bodově.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1), \\ \frac{1}{2} & x = 1. \end{cases}$$

Nyní naši hypotézu dokážeme. Tedy ukážeme, že existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $n_0 \in \mathbb{N}$ najdeme $n \geq n_0$ a $x \in [0, 1]$ splňující podmínku $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$.

Zvolme si $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ je libovolné a nechť $n \geq n_0$. Najdeme $x \in [0, 1]$ takové, že

$$|f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{4}.$$

Pro $x \in [0, 1)$ platí:

Stejnoměrná a bodová konvergence

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$$

stejnoměrně konvergentní na intervalu $[0,1]$*.*

Řešení

Jestliže f_n stejnoměrně konverguje na $[0,1]$ k nějaké funkci f, musí konvergovat na stejném intervalu k této funkci i bodově.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1), \\ \frac{1}{2} & x = 1. \end{cases}$$

Nyní naši hypotézu dokážeme. Tedy ukážeme, že existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $n_0 \in \mathbb{N}$ najdeme $n \geq n_0$ a $x \in [0,1]$ splňující podmínku $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$.

Zvolme si $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ je libovolné a nechť $n \geq n_0$. Najdeme $x \in [0,1]$ takové, že

$$|f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{4}.$$

Pro $x \in [0,1)$ platí:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x^n}{1+x^n} \right| \geq \frac{1}{4} \iff$$

Stejnoměrná a bodová konvergence

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$$

stejnoměrně konvergentní na intervalu $[0,1]$*.*

Řešení

Jestliže f_n stejnoměrně konverguje na $[0,1]$ k nějaké funkci f, musí konvergovat na stejném intervalu k této funkci i bodově.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1), \\ \frac{1}{2} & x = 1. \end{cases}$$

Nyní naši hypotézu dokážeme. Tedy ukážeme, že existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $n_0 \in \mathbb{N}$ najdeme $n \geq n_0$ a $x \in [0,1]$ splňující podmínku $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$.

Zvolme si $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ je libovolné a nechť $n \geq n_0$. Najdeme $x \in [0,1]$ takové, že

$$|f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{4}.$$

Pro $x \in [0,1)$ platí:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x^n}{1+x^n}\right| \geq \frac{1}{4} \iff \frac{x^n}{1+x^n} \geq \frac{1}{4} \iff$$

Stejnoměrná a bodová konvergence

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$$

stejnoměrně konvergentní na intervalu $[0,1]$.

Řešení

Jestliže f_n stejnoměrně konverguje na $[0,1]$ k nějaké funkci f, musí konvergovat na stejném intervalu k této funkci i bodově.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1), \\ \frac{1}{2} & x = 1. \end{cases}$$

Nyní naši hypotézu dokážeme. Tedy ukážeme, že existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $n_0 \in \mathbb{N}$ najdeme $n \geq n_0$ a $x \in [0,1]$ splňující podmínku $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$.

Zvolme si $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ je libovolné a nechť $n \geq n_0$. Najdeme $x \in [0,1]$ takové, že

$$|f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{4}.$$

Pro $x \in [0,1)$ platí:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x^n}{1+x^n}\right| \geq \frac{1}{4} \iff \frac{x^n}{1+x^n} \geq \frac{1}{4} \iff x \geq \frac{\sqrt[n]{3}}{3}$$

Stejnoměrná a bodová konvergence

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$$

stejnoměrně konvergentní na intervalu $[0,1]$.

Řešení

Jestliže f_n stejnoměrně konverguje na $[0,1]$ k nějaké funkci f, musí konvergovat na stejném intervalu k této funkci i bodově.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1), \\ \frac{1}{2} & x = 1. \end{cases}$$

Nyní naši hypotézu dokážeme. Tedy ukážeme, že existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $n_0 \in \mathbb{N}$ najdeme $n \geq n_0$ a $x \in [0,1]$ splňující podmínku $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$.

Zvolme si $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ je libovolné a nechť $n \geq n_0$. Najdeme $x \in [0,1]$ takové, že

$$|f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{4}.$$

Pro $x \in [0,1)$ platí:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x^n}{1+x^n}\right| \geq \frac{1}{4} \iff \frac{x^n}{1+x^n} \geq \frac{1}{4} \iff x \geq \frac{\sqrt[n]{3}}{3}$$

Jestliže vezmeme $x \geq \frac{\sqrt[n]{3}}{3}$, bude $|f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{4}$.

Stejnoměrná a bodová konvergence

Příklad

Rozhodněte, zda je posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}$$

stejnoměrně konvergentní na intervalu $[0, 1]$.

Řešení

Jestliže f_n stejnoměrně konverguje na $[0, 1]$ k nějaké funkci f, musí konvergovat na stejném intervalu k této funkci i bodově.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1), \\ \frac{1}{2} & x = 1. \end{cases}$$

Nyní naši hypotézu dokážeme. Tedy ukážeme, že existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $n_0 \in \mathbb{N}$ najdeme $n \geq n_0$ a $x \in [0, 1]$ splňující podmínku $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$.

Zvolme si $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ je libovolné a nechť $n \geq n_0$. Najdeme $x \in [0, 1]$ takové, že

$$|f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{4}.$$

Pro $x \in [0, 1)$ platí:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x^n}{1 + x^n} \right| \geq \frac{1}{4} \iff \frac{x^n}{1 + x^n} \geq \frac{1}{4} \iff x \geq \frac{\sqrt[n]{3}}{3}$$

Jestliže vezmeme $x \geq \frac{\sqrt[n]{3}}{3}$, bude $|f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{4}$.

$\implies$ posloupnost f_n **nekonverguje stejnoměrně** na intervalu $[0, 1]$.