Matematická analýza III
cvičení Z. Kočana
Zimní semestr 1999/2000

4. Extrémy funkcí více proměnných - příklady a cvičení

Příklady

1. *Najděte všechny body, ve kterých funkce*

$$f\left(x^1, x^2\right) = 3x^1 + 12x^2 - \left(x^1\right)^3 - \left(x^2\right)^3$$

nabývá lokální extrém.

Řešení. Nejdříve najdeme $f'\left(x^1, x^2\right)$. Platí

$$f'\left(x^1, x^2\right) = \left(3 - 3\left(x^1\right)^2, 12 - 3\left(x^2\right)^2\right).$$

Podezřelé body získáme tak, že $f'\left(x^1, x^2\right)$ položíme rovnu $(0,0)$. Řešením získaných rovnic dostaneme

$$3 - 3\left(x^1\right)^2 = 0, \text{ tedy } \left(x^1\right)^2 = 1 \text{ a } \left|x^1\right| = 1,$$

$$12 - 3\left(x^2\right)^2 = 0, \text{ tedy } \left(x^2\right)^2 = 4 \text{ a } \left|x^2\right| = 2.$$

Dostáváme tak body $(1,-2)$, $(1,2)$, $(-1,2)$, $(-1,-2)$. Abychom je mohli klasifikovat, potřebujeme druhé parciální derivace:

$$D_{11}f\left(x^1, x^2\right) = -6x^1,\ D_{12}f\left(x^1, x^2\right) = 0,\ D_{22}f\left(x^1, x^2\right) = -6x^2.$$

Potom

$$\det f''\left(x^1, x^2\right) = \det\begin{pmatrix} -6x^1 & 0 \\ 0 & -6x^2 \end{pmatrix} = 36x^1x^2.$$

V bodě $(1,2)$ máme $D_{11}f(1,2) < 0$ a $\det f''(1,2) = 72 > 0$. To znamená, že v bodě $(1,2)$ nabývá funkce f lokálního maximuma a $f(1,2) = 18$. Dále dostáváme $\det f''(1,-2) = \det f''(-1,2) = -72 < 0$ a body $(1,-2)$ a $(-1,2)$ jsou tedy inflexní. V bodě $(-1,-2)$ máme $D_{11}f(1,2) > 0$ a $\det f''(1,2) = 72 > 0$. To znamená, že v bodě $(-1,-2)$ nabývá funkce f lokálního minima a $f(-1,-2) = -18$.

2. *Najděte všechny body, ve kterých funkce*

$$a)\ f\left(x^1, x^2\right) = \left(x^1\right)^2 - 2x^1x^2 + \left(x^2\right)^2,$$

$$b)\ f\left(x^1, x^2\right) = \left(x^1\right)^3 - 3x^1\left(x^2\right)^2 + \left(x^2\right)^2,$$

nabývá lokální extrém.

Řešení. a) Zde platí

$$f'\left(x^1, x^2\right) = \left(2x^1 - 2x^2, -2x^1 + 2x^2\right) = (0,0),$$

jestliže $x^1 = x^2$. Máme tedy spoustu bodů podezřelých z extrému. Dále platí

$$D_{11}f\left(x^1, x^2\right) = 2,\ D_{12}f\left(x^1, x^2\right) = -2,\ D_{22}f\left(x^1, x^2\right) = 2.$$

Tedy

$$\det f''\left(x^1, x^2\right) = \det\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 0.$$

To znamená, že toto kritérium nám nedává žádnou odpověď. Pokud si ale uvědomíme, že

$$f\left(x^1, x^2\right) = \left(x^1 - x^2\right)^2,$$

zjistíme, že v každém podezřelém bodě nabývá funkce f absolutního minima.
b) Zde platí

$$f'\left(x^1,x^2\right)=\left(3\left(x^1\right)^2-3\left(x^2\right)^2,-6x^1x^2+2x^2\right)=(0,0)\,,$$

jestliže

$$\left(x^1\right)^2-\left(x^2\right)^2=\left(x^1-x^2\right)\left(x^1+x^2\right)=0\,,$$
$$-6x^1x^2+2x^2=2x^2\left(-3x^1+1\right)=0\,.$$

Z první rovnice tedy $x^2=\pm x^1$ a z druhé $x^2=0$ nebo $x^1=\frac{1}{3}$. Podezřelými body tedy jsou $(0,0)$, $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ a $\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$. Dále platí

$$D_{11}f\left(x^1,x^2\right)=6x^1\,,\ D_{12}f\left(x^1,x^2\right)=-6x^2\,,\ D_{22}f\left(x^1,x^2\right)=-6x^1+2\,.$$

Tedy

$$D_{11}f\left(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}\right)=D_{11}f\left(\tfrac{1}{3},-\tfrac{1}{3}\right)=2\,,\ D_{11}f(0,0)=0\,,$$
$$D_{12}f\left(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}\right)=-2\,,\ D_{12}f\left(\tfrac{1}{3},-\tfrac{1}{3}\right)=2\,,\ D_{12}f(0,0)=0\,,$$
$$D_{22}f\left(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}\right)=D_{22}f\left(\tfrac{1}{3},-\tfrac{1}{3}\right)=0\,,\ D_{22}f(0,0)=2$$

a

$$\det f''\left(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}\right)=\det f''\left(\tfrac{1}{3},-\tfrac{1}{3}\right)=-4<0\,,$$
$$\det f''(0,0)=0\,.$$

To znamená, že body $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ a $\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$ jsou inflexní a v případě bodu $(0,0)$ nám toto kritérium nedává žádnou odpověď. Ovšem, v případě, že $x^2=0$, funkce

$$f\left(x^1,x^2\right)=\left(x^1\right)^3$$

nemá v bodě $x^1=0$ žádný lokální extrém a bod $(0,0)$ je tedy také inflexní.

3. *Najděte lokální extrémy funkce*

$$f\left(x^1,x^2\right)=27\left(x^1\right)^2x^2+14\left(x^2\right)^3-69x^2-54x^1\,.$$

Řešení. Platí

$$D_1f\left(x^1,x^2\right)=54x^1x^2-54\,,$$
$$D_2f\left(x^1,x^2\right)=27\left(x^1\right)^2+42\left(x^2\right)^2-69\,.$$

Řešením soustavy rovnic

$$D_1f\left(x^1,x^2\right)=0$$
$$D_2f\left(x^1,x^2\right)=0$$

jsou body

$$\left(x_1^1,x_1^2\right)=(1,1),\ \left(x_2^1,x_2^2\right)=(-1,-1)\,,\ \left(x_3^1,x_3^2\right)=\left(\tfrac{\sqrt{14}}{3},\tfrac{3}{\sqrt{14}}\right),\ \left(x_4^1,x_4^2\right)=\left(-\tfrac{\sqrt{14}}{3},-\tfrac{3}{\sqrt{14}}\right).$$

Dále

$$D_{11}f\left(x^1,x^2\right)=54x^2\,,$$
$$D_{12}f\left(x^1,x^2\right)=D_{21}f\left(x^1,x^2\right)=54x^1\,,$$
$$D_{22}f\left(x^1,x^2\right)=84x^2\,.$$

Přímým výpočtem nebo pomocí Sylvestrova kritéria lze zjistit, že matice

$$\begin{pmatrix}54x^2 & 54x^1\\ 54x^1 & 84x^2\end{pmatrix}$$

je v bodě $\left(x_1^1,x_1^2\right)$ pozitivně definitní, v bodě $\left(x_2^1,x_2^2\right)$ negativně definitní a v bodech $\left(x_3^1,x_3^2\right)$ a $\left(x_4^1,x_4^2\right)$ indefinitní. Funkce f má tedy v bodě $\left(x_1^1,x_1^2\right)$ lokální minimum, v bodě $\left(x_2^1,x_2^2\right)$ lokální maximum a platí $f\left(x_1^1,x_1^2\right)=-82$ a $f\left(x_2^1,x_2^2\right)=82$.

4. *Najděte lokální extrémy funkce*

$$f\left(x^1,x^2\right)=x^1+x^2$$

na množině M *dané rovností*

$$\frac{1}{\left(x^1\right)^2}+\frac{1}{\left(x^2\right)^2}=1.$$

Řešení. Jelikož pro každý bod $\left(x^1,x^2\right)\in M$ a funkci

$$g\left(x^1,x^2\right)=\frac{1}{\left(x^1\right)^2}+\frac{1}{\left(x^2\right)^2}-1$$

platí $dg\left(x^1,x^2\right)\neq 0$, lze na řešení úlohy použít metodu Lagrangeových multiplikátorů. Hledáme tedy body $\left(x^1,x^2\right)\in M$ a číslo λ takové, že pro Lagrangeovu funkci

$$L\left(x^1,x^2,\lambda\right)=x^1+x^2-\lambda\left(\frac{1}{\left(x^1\right)^2}+\frac{1}{\left(x^2\right)^2}-1\right)$$

platí

$$D_1L\left(x^1,x^2,\lambda\right)=1+2\lambda\frac{1}{\left(x^1\right)^3}=0,$$
$$D_2L\left(x^1,x^2,\lambda\right)=1+2\lambda\frac{1}{\left(x^2\right)^3}=0.$$

Tato soustava má následující dvě řešení:

$$\left(x_1^1,x_1^2,\lambda_1\right)=\left(\sqrt{2},\sqrt{2},-\sqrt{2}\right),\qquad \left(x_2^1,x_2^2,\lambda_2\right)=\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2},\sqrt{2}\right).$$

Dále

$$\begin{pmatrix} D_{11}L\left(x^1,x^2,\lambda\right) & D_{12}L\left(x^1,x^2,\lambda\right)\\ D_{21}L\left(x^1,x^2,\lambda\right) & D_{22}L\left(x^1,x^2,\lambda\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6\frac{\lambda}{\left(x^1\right)^4} & 0\\ 0 & -6\frac{\lambda}{\left(x^2\right)^4}\end{pmatrix}.$$

Tato matice je v bodě $\left(x_1^1,x_1^2,\lambda_1\right)$ pozitivně definitní a v bodě $\left(x_2^1,x_2^2,\lambda_2\right)$ negativně definitní. Funkce f má tedy na množině M v bodě $\left(x_1^1,x_1^2\right)$ lokální minimum a v bodě $\left(x_2^1,x_2^2\right)$ lokální maximum. Platí $f\left(x_1^1,x_1^2\right)=2\sqrt{2}$ a $f\left(x_2^1,x_2^2\right)=-2\sqrt{2}$.

5. *Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce*

$$f\left(x^1,x^2\right)=\left(x^1\right)^2+\left(x^2\right)^2-2x^1+4x^2$$

na množině M *dané rovností* $\left(x^1\right)^2+\left(x^2\right)^2=25$.

Řešení. Jelikož množina M je kompaktní a funkce f spojitá, existuje maximum a minimum funkce f na množině M. Jelikož pro každý bod $\left(x^1,x^2\right)\in M$ a funkci

$$g\left(x^1,x^2\right)=\left(x^1\right)^2+\left(x^2\right)^2-25$$

platí $dg\left(x^1,x^2\right)\neq 0$, lze na řešení úlohy použít metodu Lagrangeových multiplikátorů. Jestliže $\left(x_0^1,x_0^2\right)$ je bod extrému funkce f na množině M, existuje číslo $\lambda\in\boldsymbol{R}$ takové, že pro Lagrangeovu funkci

$$L\left(x^1,x^2,\lambda\right)=f\left(x^1,x^2\right)-\lambda\left(\left(x^1\right)^2+\left(x^2\right)^2-25\right)$$

platí

$$D_1L\left(x_0^1,x_0^2,\lambda\right)=0,$$
$$D_2L\left(x_0^1,x_0^2,\lambda\right)=0,$$

tedy

$$(1-\lambda)x_0^1=1$$
$$(1-\lambda)x_0^2=-2$$
$$\left(x_0^1\right)^2+\left(x_0^2\right)^2=25.$$

Vyřešením této soustavy dostaneme $\left(x_0^1,x_0^2\right)\in\left\{\left(\sqrt{5},-2\sqrt{5}\right),\left(-\sqrt{5},2\sqrt{5}\right)\right\}$. Jelikož $f\left(\sqrt{5},-2\sqrt{5}\right)=25+6\sqrt{5}$

a $f\left(-\sqrt{5},2\sqrt{5}\right)=25+10\sqrt{5}$, je nejmenší hodnota funkce f na množině M rovna $25+6\sqrt{5}$ a největší $25+10\sqrt{5}$.

6. *Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce*

$$f\left(x^1,x^2\right)=\left(x^1\right)^2+\left(x^2\right)^2-2x^1+4x^2$$

na množině M *dané nerovností* $\left(x^1\right)^2+\left(x^2\right)^2\le 25$.

Řešení. Množina M je kompaktní a funkce f spojitá; maximum a minimum funkce f na množině M tedy existuje. Nechť $\left(x_0^1,x_0^2\right)\in M$ je bod, v němž funkce f nabývá na množině M maxima nebo minima. Je-li $\left(x_0^1,x_0^2\right)\in \operatorname{int} M$, platí

$$D_1 f\left(x_0^1,x_0^2\right)=0,$$
$$D_2 f\left(x_0^1,x_0^2\right)=0,$$

tedy

$$2x_0^1-2=0,$$
$$2x_0^2+4=0$$

a $\left(x_0^1,x_0^2\right)=(1,-2)$. Je-li $\left(x_0^1,x_0^2\right)\in \operatorname{fr} M$, je bodem extrému funkce f na množině $\operatorname{fr} M$. Podle předchozího příkladu tedy $\left(x_0^1,x_0^2\right)\in\left\{\left(\sqrt{5},-2\sqrt{5}\right),\left(-\sqrt{5},2\sqrt{5}\right)\right\}$.

Celkově, je-li bod $\left(x_0^1,x_0^2\right)$ bodem extrému funkce f na množině M, platí

$$\left(x_0^1,x_0^2\right)\in\left\{(1,-2),\left(\sqrt{5},-2\sqrt{5}\right),\left(-\sqrt{5},2\sqrt{5}\right)\right\}.$$

Jelikož $f(1,-2)=-5$, $f\left(\sqrt{5},-2\sqrt{5}\right)=25+6\sqrt{5}$ a $f\left(-\sqrt{5},2\sqrt{5}\right)=25+10\sqrt{5}$, je nejmenší hodnota funkce f na množině M rovna -5 a největší $25+10\sqrt{5}$.

7. *Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce*

$$f\left(x^1,x^2\right)=\left(x^1\right)^2+\left(x^2\right)^2-2x^1+4x^2$$

na množině M dané nerovnostmi $\left(x^1\right)^2+\left(x^2\right)^2\le 25$, $x^2\ge 0$.

Řešení. Existence maxima a minima opět plyne z kompaktnosti množiny M a spojitosti zobrazení f. Označme $\left(x_0^1,x_0^2\right)$ bod extrému funkce f na množině M. Nyní mohou nastat tři možnosti. Je-li $\left(x_0^1,x_0^2\right)\in \operatorname{int} M$, platí

$$D_1 f\left(x_0^1,x_0^2\right)=0,$$
$$D_2 f\left(x_0^1,x_0^2\right)=0.$$

Tyto podmínky ovšem žádný bod množiny M nesplňuje. Je-li $\left(x_0^1,x_0^2\right)\in \operatorname{fr} M$, $x_0^2>0$, je (podle řešení předchozího příkladu) $\left(x_0^1,x_0^2\right)=\left(-\sqrt{5},2\sqrt{5}\right)$. Je-li $x_0^1\in[-5,5]$, $x_0^2=0$, lze bod $\left(x_0^1,x_0^2\right)$ opět najít pomocí Lagrangeovy funkce, jednodušší ovšem je najít stacionární body funkce $g\left(x^1\right)=f\left(x^1,0\right)$ na intervalu $(-5,5)$: Platí $g'\left(x^1\right)=2x^1-2$, stacionární bod je $x^1=1$. Tedy $\left(x_0^1,x_0^2\right)\in\{(-5,0),(-1,0),(5,0)\}$. Celkově:

$$\left(x_0^1,x_0^2\right)\in\left\{\left(-\sqrt{5},2\sqrt{5}\right),(-5,0),(-1,0),(5,0)\right\}.$$

Jelikož $f\left(-\sqrt{5},2\sqrt{5}\right)=25+10\sqrt{5}$, $f(-5,0)=45$, $f(-1,0)=3$, $f(5,0)=15$, je nejmenší hodnota funkce f na množině M rovna 3 a největší $25+10\sqrt{5}$.

Cvičení

1. Najděte lokální extrémy funkce f, jestliže

a) $f(x^1,x^2) = 1 + 6x^2 - (x^2)^2 - x^1x^2 - (x^1)^2$;

b) $f(x^1,x^2) = (x^1)^2 - 2(x^2)^2 - 3x^1 + 5x^2 - 1$;

c) $f(x^1,x^2) = (x^2 - x^1 - 3)^2$;

d) $f(x^1,x^2) = (x^1)^2(x^2)^3(12 - x^1 - x^2)$;

e) $f(x^1,x^2) = x^1 + x^2 + 4\cos x^1 \cos x^2$;

f) $f(x^1,x^2,x^3) = \dfrac{x^1}{x^2+x^3} + \dfrac{x^2}{x^1+x^3} + \dfrac{x^3}{x^1+x^2}$;

g) $f(x^1,x^2) = 4(x^1)^2 - x^1x^2 + (x^2)^2$;

h) $f(x^1,x^2) = (x^1)^2 - x^1x^2 - (x^2)^2 + 5x^2 - 1$.

2. Najděte lokální extrémy funkce f na množině $g(x^1,x^2) = 0$ (resp. $g(x^1,x^2,x^3) = 0$), jestliže

a) $f(x^1,x^2) = x^1x^2 - x^1 + x^2 - 1$, $\quad g(x^1,x^2) = x^1 + x^2 - 1$;

b) $f(x^1,x^2,x^3) = x^1x^2x^3$, $\quad g(x^1,x^2,x^3) = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - 3$;

c) $f(x^1,x^2,x^3) = x^1x^2x^3$, $\quad g(x^1,x^2,x^3) = \begin{pmatrix} x^1 + x^2 + x^3 - 5 \\ x^1x^2 + x^2x^3 + x^1x^3 - 8 \end{pmatrix}$.

3. Najděte maximum a minimum (pokud existuje) funkce f na množině M, jestliže

a) $f(x^1,x^2) = \mathrm{e}^{-(x^1)^2-(x^2)^2}\left(3(x^1)^2 + 2(x^2)^2\right)$, $M = \left\{(x^1,x^2) \in \boldsymbol{R}^2 \mid (x^1)^2 + (x^2)^2 \le 4\right\}$;

b) $f(x^1,x^2,x^3) = (x^1)^2 - (x^2)^2 + (x^3)^3$, $M = \left\{(x^1,x^2,x^3) \in \boldsymbol{R}^3 \mid (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \le 1\right\}$;

c) $f(x^1,x^2) = (x^1)^2 - 2(x^2)^2 + 4x^1x^2 - 6x^1 - 1$, $M = \left\{(x^1,x^2) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^1 \ge 0, x^2 \ge 0, x^2 \le -x^1 + 3\right\}$;

d) $f(x^1,x^2) = x^2$, $M = \left\{(x^1,x^2) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2 \le 1, (x^2)^3 \ge (x^1)^2\right\}$.

4. Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x^1,x^2) = \cos x^1 \cos x^2 \cos(x^1 + x^2)$ na čtverci s vrcholy $(0,0)$, $(0,\pi)$, $(\pi,0)$, (π,π).

5. Nechť $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$,

$$f(x^1,x^2) = \mathrm{e}^{x^1x^2},$$

a $M = \left\{(x^1,x^2) \in \boldsymbol{R}^2 \mid \sqrt{|x^1|} + \sqrt{|x^2|} \le 1\right\}$. Vypočtěte $f(M)$.

6. Najděte supremum a infimum (pokud existuje) funkce $f(x^1,x^2,x^3) = x^1 + x^2$ na množině

$$M = \left\{(x^1,x^2,x^3) \in \boldsymbol{R}^3 \mid (x^1)^2 + (x^3)^2 \le 1, (x^2)^2 + (x^3)^2 \le 2\right\}.$$

7. Dokažte, že pro každé $x^1,x^2,x^3 \in \boldsymbol{R}$, $x^1,x^2,x^3 \ge 0$, platí

$$\sqrt[3]{x^1x^2x^3} \le \frac{x^1 + x^2 + x^3}{3}.$$

(Hledejte maximum funkce $f(x^1,x^2,x^3) = \sqrt[3]{x^1x^2x^3}$ na množině $\frac{1}{3}(x^1 + x^2 + x^3) = k$.)

8. Nalezněte vzdálenost elipsy $(x^1)^2 - 2x^1x^2 - 2x^1 + (x^2)^2 + 2x^2 + 4 = 0$ od bodu $(0,0)$.

9. Buď $M \subset \boldsymbol{R}^n$ kompaktní množina a $x_1 \in \boldsymbol{R}^n$ bod neležící v M. Dokažte, že existuje bod $x_2 \in M$, který má ze všech bodů množiny M od bodu x_1 nejkratší vzdálenost.

10. Buď $M \subset \boldsymbol{R}^n$ uzavřená množina a $x_1 \in \boldsymbol{R}^n$ bod neležící v M. Dokažte, že existuje bod $x_2 \in M$,

který má ze všech bodů množiny M od bodu x_1 nejkratší vzdálenost.

11. Nechť množina M z předchozího příkladu je dána rovnicí $f(x)=0$, kde $f:\boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ je spojitě diferencovatelná funkce splňující $Df(x)\neq 0$ pro každé $x \in M$. Dokažte, že přímka určená body x_1 a x_2 je v bodě x_2 na množinu M kolmá.