Matematická analýza III
cvičení Z. Kočana
Zimní semestr 1999/2000

3. Inverzní a implicitní zobrazení - příklady a cvičení

Příklady

1. *Nechť*

$$f\left(x^1, x^2\right) = \begin{pmatrix} e^{x^1} \cos x^2 \\ e^{x^1} \sin x^2 \end{pmatrix}.$$

Dokažte, že každý bod $\left(x_0^1, x_0^2\right) \in \boldsymbol{R}^2$ *má okolí* V *takové, že pro každé* $\left(y^1, y^2\right) \in f(V)$ *má rovnice*

$$f\left(x^1, x^2\right) = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}$$

právě jedno řešení $\left(x^1, x^2\right) \in V$.

Řešení. Máme dokázat, že existuje okolí V bodu $\left(x_0^1, x_0^2\right)$, na němž je zobrazení f prosté. Toto zobrazení je spojitě diferencovatelné, stačí tedy podle věty o inverzním zobrazení ověřit, že $\det f'\left(x_0^1, x_0^2\right) \neq 0$. A ono

$$\det f'\left(x_0^1, x_0^2\right) = \det \begin{pmatrix} e^{x_0^1} \cos x_0^2 & -e^{x_0^1} \sin x_0^2 \\ e^{x_0^1} \sin x_0^2 & e^{x_0^1} \cos x_0^2 \end{pmatrix} = e^{2x_0^1} \neq 0.$$

2. *Uvažujme rovnici*

$$\left(x^1\right)^2 + 4\left(x^2\right)^2 - 3\left(x^3\right)^2 = 6$$

a bod $x_0 = (3, 0, 1)$.

a) Definuje implicitně tato rovnice proměnnou x^2 *jako funkci* x^1 *a* x^3 *na nějakém okolí bodu* $\left(x_0^1, x_0^3\right) = (3, 0)$*? Pokud ano, najděte její parciální derivace podle* x^1 *a* x^3.

b) Definuje implicitně tato rovnice proměnnou x^3 *jako funkci* x^1 *a* x^2 *na nějakém okolí bodu* $\left(x_0^1, x_0^2\right) = (3, 0)$*? Pokud ano, najděte její parciální derivace podle* x^1 *a* x^2.

Řešení. a) Jelikož $D_2 F(3, 0, 1) = 0$, věta o implicitní funkci nám neříká nic o tom, jestli je x^2 definováno jako funkce x^1 a x^3. Přesto můžeme usoudit, že tomu tak není. Všimněme si, že jinak by takové x^2 muselo splňovat

$$x^2\left(x^1, x^3\right) = \sqrt{6 + 3\left(x^3\right)^2 - \left(x^1\right)^2}.$$

V bodě $\left(x_0^1, x_0^3\right)$ platí $6 + 3\left(x_0^3\right)^2 = \left(x_0^1\right)^2$. Jestliže se x^1 malinko zvětší, výraz pod odmocninou bude záporný a daná rovnice tedy nemůže definovat x^2 na žádném okolí bodu $\left(x_0^1, x_0^3\right)$.

b) Jelikož $D_3 F(3, 0, 1) = -6 \neq 0$, můžeme aplikovat větu o implicitní funkci a zjistíme, že daná rovnice definuje $x^3 = f\left(x^1, x^2\right)$ jako funkci x^1 a x^2 a nějakém okolí U bodu $(3, 0)$. Navíc, na tomto okolí máme

$$D_1 f\left(x^1, x^2\right) = -\frac{D_1 F\left(x^1, x^2, x^3\right)}{D_3 F\left(x^1, x^2, x^3\right)} = -\frac{2x^1}{-6x^3} = \frac{x^1}{3x^3},$$

$$D_2 f\left(x^1, x^2\right) = -\frac{D_2 F\left(x^1, x^2, x^3\right)}{D_3 F\left(x^1, x^2, x^3\right)} = -\frac{8x^2}{-6x^3} = \frac{4x^1}{3x^3},$$

kde $F\left(x^1, x^2, x^3\right) = \left(x^1\right)^2 + 4\left(x^2\right)^2 - 3\left(x^3\right)^2 - 6$.

3. *Rozhodněte, zda pro* $F\left(x^1, x^2, x^3\right) = 2^{\frac{x^1}{x^3}} + 2^{\frac{x^2}{x^3}} - 8$ *na nějakém okolí bodu* $(2,2,1)$ *rovnice* $F\left(x^1, x^2, x^3\right) = 0$ *implicitně definuje nějakou funkci. Pokud ano, najděte její parciální derivace v bodě* $(2,2)$.

Řešení. Funkce F je na okolí bodu $(2,2,1)$ spojitě diferencovatelná, pro existenci implicitní funkce tedy stačí, aby $D_3 F(2,2,1) \neq 0$.

$$D_3 F\left(x^1, x^2, x^3\right) = -2^{\frac{x^1}{x^3}} \frac{x^1}{\left(x^3\right)^2} \ln 2 - 2^{\frac{x^2}{x^3}} \frac{x^2}{\left(x^3\right)^2} \ln 2,$$

tedy

$$D_3 F(2,2,1) = 16 \ln 2 \neq 0.$$

Označme implicitní funkci f. Platí $f(2,2) = 1$ a pro každé $\left(x^1, x^2\right)$ z nějakého okolí bodu $(2,2)$

$$2^{\frac{x^1}{f\left(x^1, x^2\right)}} + 2^{\frac{x^2}{f\left(x^1, x^2\right)}} = 8.$$

Z těchto vztahů již snadno parciální derivace zobrazení f v bodě $(2,2)$ vypočítáme.

4. *Nechť*

$$F\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right) = \left(\left(x^1\right)^2 x^2 + x^1\left(x^2\right)^2 + \left(x^3\right)^2 - \left(x^4\right)^2, e^{x^1 + x^2} - x^4\right).$$

Ukažte, že $F(0,0,1,1) = (0,0)$ *a že* $F\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right) = (0,0)$ *definuje* $\left(x^3, x^4\right)$ *jako diferencovatelné zobrazení* $\left(f^1, f^2\right)$ *proměnných* x^1 *a* x^2 *na nějakém okolí bodu* $(0,0)$. *Najděte jeho parciální derivace funkce* f^1 *podle* x^1 *a* x^2 *v bodě* $(0,0)$.

Řešení. Platí $F(0,0,1,1) = (0,0)$. Dále

$$\begin{pmatrix} D_3 F^1\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right) & D_4 F^1\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right) \\ D_3 F^2\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right) & D_4 F^2\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x^3 & -2x^4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a v bodě $\left(x_0^3, x_0^4\right) = (1,1)$ tedy

$$\begin{pmatrix} 2x_0^3 & -2x_0^4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Jelikož

$$\det\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0,$$

uvedená rovnice definuje $\left(x^3, x^4\right)$ jako diferencovatelné zobrazení f proměnných x^1 a x^2 na nějakém okolí bodu $(0,0)$. Zavedeme-li si nyní zobrazení $G\left(x^1, x^2\right) = \left(x^1, x^2, f\left(x^1, x^2\right)\right)$, vidíme, že

$$(0,0) = F\left(x^1, x^2, f\left(x^1, x^2\right)\right) = F \circ G\left(x^1, x^2\right)$$

a tedy

$$0 = F'\left(x^1, x^2, f\left(x^1, x^2\right)\right) = F'\left(G\left(x^1, x^2\right)\right) \cdot G'\left(x^1, x^2\right).$$

Po několika úpravách a využití toho, že $A^{-1} = (\det A)^{-1} \operatorname{adj} A$, kde A je invertibilní matice, nakonec zjistíme, že

$$D_1 f^1(0,0) = -\frac{\det\begin{pmatrix} D_1F^1(0,0,1,1) & D_4F^1(0,0,1,1) \\ D_1F^2(0,0,1,1) & D_4F^2(0,0,1,1)\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} D_3F^1(0,0,1,1) & D_4F^1(0,0,1,1) \\ D_3F^2(0,0,1,1) & D_4F^2(0,0,1,1)\end{pmatrix}} = -\frac{2}{-2} = 1,$$

$$D_2 f^1(0,0) = -\frac{\det\begin{pmatrix} D_2F^1(0,0,1,1) & D_4F^1(0,0,1,1) \\ D_2F^2(0,0,1,1) & D_4F^2(0,0,1,1)\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} D_3F^1(0,0,1,1) & D_4F^1(0,0,1,1) \\ D_3F^2(0,0,1,1) & D_4F^2(0,0,1,1)\end{pmatrix}} = -\frac{2}{-2} = 1$$

Cvičení

1. Rozhodněte, zda existuje okolí $U \subset \boldsymbol{R}$ čísla 1, na němž je funkce $f(x) = x^x$ prostá.

2. Rozhodněte, zda existují okolí $U, V \subset \boldsymbol{R}^2$ taková, že $(2,\pi) \in U$ a zobrazení $F : U \to V$,

$$F(\rho,\varphi) = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \end{pmatrix},$$

je bijekce. Pokud ano, najděte tato okolí a vypočtěte $F^{-1} : V \to U$.

3. Rozhodněte, zda existuje okolí $U \subset \boldsymbol{R}^2$ bodu $(1,e)$, na němž je zobrazení $F : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$,

$$F(x^1,x^2) = \left((x^1)^{x^2}, (x^2)^{x^1} \right),$$

prosté.

4. Nechť $U, V \subset \boldsymbol{R}^2$, $(0,1) \in V$, jsou otevřené množiny a $f : U \to V$ zobrazení takové, že pro každé $(x^1,x^2) \in V$ platí

$$f^{-1}(x^1,x^2) = \begin{pmatrix} e^{x^1x^2} + x^1 \\ e^{x^1x^2} + x^2 \end{pmatrix}.$$

Vypočtěte $D_2 f^1(1,2)$.

5. Nechť funkce $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ je definována předpisem

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & \text{pro } x \neq 0, \\ 0, & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Dokažte, že $f'(0) \neq 0$, ale na žádném okolí bodu 0 neexistuje funkce inverzní.

6. Uveďte příklad zobrazení $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$, které má inverzi $f^{-1} : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ takovou, že $Df^{-1}(0,0) = 0$.

7. Nechť $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ je spojitě diferencovatelná funkce. Dokažte, že neexistuje funkce f^{-1}.

8. Ověřte, že existuje funkce f, která je na okolí bodu $(2,2)$ implicitně určena rovnicí

$$F(x^1,x^2) = (x^2)^{x^1} - x^1x^2 = 0,$$

a vypočtěte $f'(2)$, $f''(2)$.

9. Rozhodněte, zda existuje okolí $U \subset \boldsymbol{R}^2$ bodu $(0,0)$ takové, že pro každé $(x^1,x^2) \in U$ má rovnice

$$\cos(x^1x^3) - \sin(x^2x^3) = x^3$$

řešení.

10. Zjistěte, zda existuje číslo $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $x^1 \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ má soustava

$$x^1(x^2)^{x^3} = 1$$

$$x^2(x^3)^{x^1} = 1$$

řešení.

11. Rozhodněte, zda existuje funkce f definovaná na nějakém okolí bodu -1, která na tomto okolí splňuje

$$x^2 - 2xf(x) + 2(f(x))^2 + 2x + 1 = 0$$

a která má v bodě -1 lokální extrém.

12. Napište rovnici tečny a normály k ploše

$$x^1 \ln x^2 + x^2 \ln x^3 + x^3 \ln x^1 = 0$$

v bodě $(1,1,1)$.

13. Nalezněte vzdálenost elipsy

$$3\left(x^1\right)^2 + 3\left(x^2\right)^2 - 2x^1x^2 - 24x^2 + 8x^1 + 24 = 0$$

od osy x^1.

14. Spojitě diferencovatelná funkce $F : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ splňuje $F(0,0) = 0$, $D_2F(0,0) \neq 0$ a pro každé $\left(x^1, x^2\right) \in \boldsymbol{R}^2$ platí $F\left(x^1, x^2\right) = F\left(x^2, x^1\right)$. Napište rovnici tečny k množině

$$M = \left\{\left(x^1, x^2\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ F\left(x^1, x^2\right) = 0\right\}$$

v bodě $(0,0)$.

15. Uveďte příklad spojitě diferencovatelné funkce $F : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ takové, aby $D_2F(0,0) = 0$ a množina

$$M = \left\{\left(x^1, x^2\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ F\left(x^1, x^2\right) = 0\right\}$$

byla grafem diferencovatelné funkce.

16. Nechť funkce $g : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ je diferencovatelná v bodě $(0,0)$ a nechť $g(0,0) = 0$, $D_1g(0,0) = 2$, $D_2g(0,0) = 3$. Označme $g_{x^1}\left(x^2\right) = g\left(x^1, x^2\right)$ a předpokládejme, že pro každé x^1 existuje inverzní funkce $g_{x^1}^{-1}$. Položme $h\left(x^1, x^2\right) = g_{x^1}^{-1}\left(x^2\right)$. Vypočtěte parciální derivace funkce h v bodě $(0,0)$.

17. Nechť funkce $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ je diferencovatelná v bodě $(0,0)$. Označme $f_{x^1}\left(x^2\right) = f\left(x^1, x^2\right)$ a předpokládejme, že pro každé x^1 existuje inverzní funkce $f_{x^1}^{-1}$. Položme $g\left(x^1, x^2\right) = f_{x^1}^{-1}\left(x^2\right)$. Dále předpokládejme, že pro každé x^1 existuje inverzní funkce $g_{x^1}^{-1}$ a položme $h\left(x^1, x^2\right) = g_{x^1}^{-1}\left(x^2\right)$. Dokažte, že

$$D_1f(0,0)D_1g(0,0)D_1h(0,0) = D_2f(0,0)D_2g(0,0)D_2h(0,0) = -1.$$

18. Nechť $x_0 = (1,4,4,-5)$ a

$$F\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right) = \left(x^1 + 2x^2 - x^3 + x^4, -2x^1 + x^2 + 2x^3 + 2x^4\right) = (0,0).$$

Rozhodněte, zda na nějakém okolí bodu $\left(x_0^1, x_0^2\right) = (1,4)$ uvedená rovnice implicitně definuje $\left(x^3, x^4\right)$ jako zobrazení $\left(f^1, f^2\right)\left(x^1, x^2\right)$. Pokud ano, najděte jeho parciální derivace.

19. Nechť $x_0 = (1,1,-1,3,3)$ a

$$F\left(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5\right) = \left(-x^1 + 2x^2 - 5x^3 + 3x^4 - 5x^5, x^1 + 4x^2 + 2x^3 + 2x^4 - 3x^5\right) = (0,0).$$

Rozhodněte, zda na nějakém okolí bodu $\left(x_0^1, x_0^2, x_0^3\right) = (1,1,-1)$ uvedená rovnice implicitně definuje $\left(x^4, x^5\right)$ jako zobrazení $\left(f^1, f^2\right)\left(x^1, x^2, x^3\right)$. Pokud ano, najděte parciální derivace f^1 podle x^1, x^2 a x^3.

20. Dokažte větu o inverzním zobrazení pomocí věty o implicitním zobrazení.

21. Dokažte větu o implicitním zobrazení pomocí věty o inverzním zobrazení.