1. Přirozená topologie v $\boldsymbol{R}^n$

V první části tohoto textu zavádíme přirozenou topologii na množině $\boldsymbol{R}^n$, nejprve jako topologii normovaného prostoru, a pak jako topologii součinu topologických prostorů. Dvojí definice nám umožní v dalším výkladu a při řešení úloh zvolit přístup, vždy vhodný pro danou situaci. Tato oboustrannost se nám osvědčí již v této kapitole.

Text má zčásti charakter opakování látky z minulého ročníku, proto je místy poněkud stručnější.

V celé kapitole (i v dalším textu) budeme uvažovat množinu $\boldsymbol{R}^n$ s přirozenou strukturou vektorového prostoru nad polem $\boldsymbol{R}$.

1.1. Normované prostoryVšechny vektorové prostory, s nimiž budeme pracovat v tomto odstavci, budeme uvažovat nad polem reálných čísel.

Vektorový prostor X se nazývá *normovaný*, je-li na něm definována *norma*, což jest zobrazení $\|.\|: X \to \boldsymbol{R}$, splňující následující tři podmínky:

1. Pro každé $x \in X$ je $\|x\| \neq 0$, jestliže $x \neq 0$.
2. Pro každé $x \in X$ a $c \in \boldsymbol{R}$ je $\|cx\| = |c| \cdot \|x\|$.
3. Pro každé $x_1, x_2 \in X$ platí $\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$.

Definici a základní vlastnosti normovaného prostoru známe z algebry. V tomto odstavci si všimneme, jak lze pomocí normy na vektorovém prostoru definovat topologii.

Nechť $x \in X$, $k > 0$. Položme

$$\begin{aligned} B^k_{\|.\|}(x) &= \{y \in X \mid \|y - x\| < k\}, \\ \overline{B}^k_{\|.\|}(x) &= \{y \in X \mid \|y - x\| \leq k\}. \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

Množina $B^k_{\|.\|}(x)$ (resp. $\overline{B}^k_{\|.\|}(x)$) se nazývá *otevřená* (resp. *uzavřená*) *koule* (*vzhledem k normě* $\|.\|$) *se středem* x *a poloměrem* k. V případě, že nedojde k nedorozumění, budeme používat jednodušších symbolů $B^k(x)$ a $\overline{B}^k(x)$.

Množina $A \subset X$ se nazývá *ohraničená*, je-li množina $\|A\| \subset \boldsymbol{R}$ (obraz množiny A při zobrazení $\|.\|$) ohraničená. Ekvivalentně: množina A je ohraničená, existuje-li otevřená koule $B^k(x) \subset X$, která je její nadmnožinou.

Lemma 1. *Systém všech otevřených koulí normovaného prostoru* X *tvoří bázi topologie na* X.

D ů k a z . 1. Pro každé $x \in X$ platí $x \in B^1(x)$. Proto systém všech otevřených koulí v X tvoří pokrytí X.

2. Mějme dvě koule $B^{k_1}(x_1), B^{k_2}(x_2) \subset X$ a bod y ležící v jejich průniku. Položme

$$l = \min\{k_1 - \|y - x_1\|, k_2 - \|y - x_2\|\} \tag{1.1.2}$$

a zvolme bod $x \in B^l(y)$. Máme

$$\begin{aligned}\|x-x_1\| &= \|x-y+y-x_1\| \le \|x-y\|+\|y-x_1\| \\ &< l+\|y-x_1\| \le k_1-\|y-x_1\|+\|y-x_1\| = k_1, \\ \|x-x_2\| &= \|x-y+y-x_2\| \le \|x-y\|+\|y-x_2\| \\ &< l+\|y-x_2\| \le k_2-\|y-x_2\|+\|y-x_2\| = k_2,\end{aligned}$$

což znamená, že $B^l(y) \subset B^{k_1}(x_1) \cap B^{k_2}(x_2)$, a dokazuje lemma.

Topologie na X, generovaná systémem všech otevřených koulí, se nazývá *indukovaná* normou $\|.\|$. Normované prostory uvažujeme vždy s topologií indukovanou jejich normou.

Všimněme si, že systém všech otevřených koulí se středem v bodě $x \in X$ tvoří lokální bázi této topologie v bodě x.

Každá otevřená i uzavřená koule je souvislá množina.

Pro každé $x \in X$ a $k > 0$ platí $\overline{B}^k(x) = \operatorname{cl} B^k(x)$.

Norma je spojité zobrazení.

Každý normovaný prostor je Hausdorffův topologický prostor.

Buď $x \in X$ libovolný nenulový vektor, $f : \boldsymbol{R} \to X$ lineární zobrazení, definované předpisem

$$f(t) = tx. \tag{1.1.3}$$

Toto zobrazení je spojité, ba co víc, přirozená topologie v $\boldsymbol{R}$ je nejmenší topologie, vzhledem k níž je spojité (tzv. *iniciální topologie*).

Uvažme nyní dvě normy ($\|.\|$ a $|.|$) na vektorovém prostoru X a zkoumejme, za jakých okolností bude topologie indukovaná normou $\|.\|$ silnější, než topologie indukovaná normou $|.|$. V následující větě tyto topologie označujeme symboly $\tau_{\|.\|}$ a $\tau_{|.|}$.

Věta 1.1. *Nechť $\|.\|$ a $|.|$ jsou dvě normy na vektorovém prostoru X. Následující čtyři výroky jsou ekvivalentní:*

1. $\tau_{\|.\|}$ je silnější než $\tau_{|.|}$.

2. Existuje číslo $m > 0$ takové, že $B^m_{\|.\|}(0) \subset B^1_{|.|}(0)$.

3. Existuje číslo $m > 0$ takové, že $\overline{B}^m_{\|.\|}(0) \subset \overline{B}^1_{|.|}(0)$.

4. Existuje číslo $M > 0$ takové, že $|.| \le M \cdot \|.\|$.

D ů k a z . Předpokládejme, že platí tvrzení 1. Pak množina $B^1_{|.|}(0)$ je otevřená v topologii $\tau_{\|.\|}$, což znamená tvrzení 2.

Nechť platí tvrzení 2. a nechť $\|x\| = m$ a $|x| > 1$. Pak pro vektor

$$\overline{x} = \frac{|x|+1}{2|x|}x$$

platí $\|\overline{x}\| < m$ a $|\overline{x}| > 1$, což je spor. Platí tedy tvrzení 3.

Nyní předpokládejme platnost výroku 3. a položme $M = 1/m$. Kdyby existoval vektor $x \in X$ takový, že $|x| > M\|x\|$, pak by pro vektor

$$x_0 = \frac{m}{\|x\|}x$$

platilo $\|x_0\| = m$, neboli $x_0 \in \overline{B}^m_{\|.\|}(0)$, a $|x_0| = m|x|/\|x\| > mM = 1$, neboli $x_0 \notin \overline{B}^1_{|.|}(0)$. To je spor, který dokazuje výrok 4.

Konečně, předpokládejme platnost tvrzení 5. Nechť $U \subset X$ je množina otevřená v $\tau_{|.|}$, $x \in U$ bod. Nechť $\varepsilon > 0$ je takové číslo, že $B^\varepsilon_{|.|}(x) \subset U$. Pak $B^{\varepsilon/M}_{\|.\|}(x) \subset B^\varepsilon_{|.|}(x)$, což dokazuje, že množina U je otevřená v topologii $\tau_{\|.\|}$.

Tím je důkaz hotov.

Dvě normy na vektorovém prostoru se nazývají *ekvivalentní*, mají-li shodné indukované topologie. Z předchozí věty nyní snadno plyne

Věta 1.2. *Normy $\|.\|$ a $|.|$ na vektorovém prostoru X jsou ekvivalentní, právě když existují čísla $m, M > 0$ taková, že*

$$m \cdot \|.\| \le |.| \le M \cdot \|.\|. \tag{1.1.4}$$

Důsledek 1. *Jsou-li normy* $\|.\|$ *a* $|.|$ *na vektorovém prostoru* X *ekvivalentní, pak každá množina, ohraničená vzhledem k jedné z nich, je ohraničená i vzhledem k druhé.*

Platí i opačné tvrzení. Zformulujte je a dokažte!

1.2. $\boldsymbol{R}^n$ **jako normovaný prostor.** Uvažme zobrazení $\|.\|_1, \|.\|_2, \|.\|_\infty : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$,

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= |x^1| + |x^2| + \ldots + |x^n|, \\ \|x\|_2 &= \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^n)^2}, \\ \|x\|_\infty &= \max\{|x^1|, |x^2|, \ldots, |x^n|\}. \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

Lemma 2. *Každé ze zobrazení* $\|.\|_1, \|.\|_2, \|.\|_\infty$ *je norma na* $\boldsymbol{R}^n$.

D ů k a z . Přenecháváme čtenáři.

Snadno lze zjistit, že pro normu $\|.\|_\infty$ platí

$$B^k_{\|.\|_\infty}(x) = (x^1 - k, x^1 + k) \times (x^2 - k, x^2 + k) \times \ldots \times (x^n - k, x^n + k). \tag{1.2.2}$$

Otevřené koule v této normě jsou tedy krychle. Zjistěte, jak vypadají otevřené a uzavřené koule v normě $\|.\|_1$.
Pro $n = 1$ všechny tři uvedené normy splývají a indukují přirozenou topologii na $\boldsymbol{R}$.

Lemma 3. *Pro zobrazení* $\|.\|_1, \|.\|_2, \|.\|_\infty$ *platí*

$$\begin{aligned} &\|.\|_1 \geq \|.\|_2 \geq \|.\|_\infty, \\ &\|.\|_1 \leq \sqrt{n}\|.\|_2, \\ &\|.\|_2 \leq n\|.\|_\infty. \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

D ů k a z . Přenecháváme čtenáři.

Z předchozího lemmatu a Věty 1.2 nyní plyne

Věta 1.3. *Normy* $\|.\|_1, \|.\|_2, \|.\|_\infty$ *jsou ekvivalentní.*

Topologie na $\boldsymbol{R}^n$, indukovaná normami $\|.\|_1, \|.\|_2, \|.\|_\infty$, se nazývá *přirozená* (*eukleidovská*) *topologie*.

Uvedené definice můžeme ještě dále zobecnit, když pro libovolné $p \geq 1$ položíme

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{|x^1|^p + |x^2|^p + \ldots + |x^n|^p}. \tag{1.2.4}$$

Takto definované zobrazení $\|.\|_p$ je norma; trojúhelníková nerovnost vyplývá z *Minkowského nerovnosti*

$$\sqrt[p]{|x^1 + y^1|^p + \ldots + |x^n + y^n|^p} \leq \sqrt[p]{|x^1|^p + \ldots + |x^n|^p} + \sqrt[p]{|y^1|^p + \ldots + |y^n|^p}, \tag{1.2.5}$$

která platí pro každé $p \geq 1$.
Všechny normy $\|.\|_p$ indukují tutéž topologii (jsou ekvivalentní); tato skutečnost snadno vyplývá Věty 1.2, Lemmatu 3 a *Jensenovy nerovnosti*

$$\sqrt[q]{|x^1|^q + \ldots + |x^n|^q} \leq \sqrt[p]{|x^1|^p + \ldots + |x^n|^p}, \tag{1.2.6}$$

která platí pro každé p, q, $0 < p \leq q$.
Poznamenejme ještě, že označení $\|.\|_\infty$ pro třetí normu z (1.2.1) je přirozené, jelikož platí

$$\lim_{p \to \infty} \sqrt[p]{|x^1|^p + \ldots + |x^n|^p} = \max\{|x^1|, \ldots, |x^n|\}. \tag{1.2.7}$$

1.3. $\boldsymbol{R}^n$ **jako součin topologických prostorů.** Uvažme na množině $\boldsymbol{R}$ eukleidovskou topologii (jako obvykle) a na množině $\boldsymbol{R}^n = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \times \ldots \times \boldsymbol{R}$ topologii součinu topologických prostorů. Víme, že bazí této topologie je systém všech *otevřených kvádrů* v $\boldsymbol{R}^n$, tj. množin

$$I^1 \times I^2 \times \ldots \times I^n, \tag{1.3.1}$$

kde $I^1, I^2, \ldots, I^n \subset \boldsymbol{R}$ jsou otevřené intervaly.

Věta 1.4. *Topologie součinu na $\boldsymbol{R}^n$ je shodná s přirozenou topologií.*

D ů k a z . Podle (1.2.2) existuje báze přirozené topologie na $\boldsymbol{R}^n$, jejíž každý prvek je otevřený kvádr. Naopak, jestliže

$$x \in I = (x_0^1 - k^1, x_0^1 + k^1) \times \ldots \times (x_0^n - k^n, x_0^n + k^n),$$

pak pro $l = \min\{k^1, \ldots, k^n\}$ platí

$$x \in (x_0^1 - l, x_0^1 + l) \times \ldots \times (x_0^n - l, x_0^n + l) \subset I.$$

To znamená, že každý otevřený kvádr je otevřená množina v přirozené topologii. Tím je důkaz ukončen.

Každý otevřený kvádr je souvislá množina.

1.4. Kompaktní množiny v $\boldsymbol{R}^n$. Z odstavce 1.1. víme, že $\boldsymbol{R}^n$ je Hausdorffův topologický prostor a že otevřené koule jsou souvislé množiny. Podívejme se nyní podrobně, jak vypadají kompaktní množiny v $\boldsymbol{R}^n$. Nejprve uvedeme pomocné topologické tvrzení.

Věta 1.5. *Buďte X a Y topologické prostory. Pak topologický prostor $X \times Y$ je kompaktní, právě když je kompaktní každý z prostorů X a Y.*

D ů k a z . Předpokládejme, že prostory X a Y jsou kompaktní a zvolme otevřené pokrytí S prostoru $X \times Y$. Pro každé $x \in X$ označme S_x systém těch množin $W \in S$, pro které $x \in \mathrm{pr}_1(W)$ (pr_1 je projekce $X \times Y \to X$). S_x je otevřené pokrytí množiny $\{x\} \times Y$, která je určitě kompaktní (proč?), má tedy konečné podpokrytí $T_x \subset S_x$. Označme nyní U_x průnik množin $\mathrm{pr}_1(W)$, kde $W \in T_x$. U_x je otevřená podmnožina X (průnik konečně mnoha otevřených množin; pr_1 je otevřené zobrazení). Systém $\{U_x \mid x \in X\}$ je otevřené pokrytí množiny X, má tedy konečné podpokrytí. Označme A konečnou množinu prvků $x \in X$ takovou, že systém $\{U_x \mid x \in A\}$ je otevřené pokrytí množiny X. Konečně, položme $T = \cup\{T_x \mid x \in A\}$. Necháme nyní na čtenáři, aby ukázal, že $T \subset S$ a že T je konečné otevřené pokrytí množiny $X \times Y$.

Opačný směr důkazu je o poznání jednodušší, a proto jej přenecháme čtenáři.

Důsledek 1. *Nechť $I^1, I^2, \ldots, I^n \subset \boldsymbol{R}$ jsou kompaktní intervaly. Pak uzavřený kvádr $I^1 \times I^2 \times \ldots \times I^n \subset \boldsymbol{R}^n$ je kompaktní množina.*

D ů k a z . Indukcí pomocí předchozí věty.

Důsledek 2. *Nechť $\overline{B}^k(x) \subset \boldsymbol{R}^n$ je uzavřená koule vzhledem k libovolné z norem $\|.\|_p$, $1 \le p \le \infty$. Pak $\overline{B}^k(x)$ je kompaktní množina.*

D ů k a z . Plyne z toho, že každá uzavřená koule v $\boldsymbol{R}^n$ je podmnožinou nějakého kvádru.

Věta 1.6. *Množina $A \subset \boldsymbol{R}^n$ je kompaktní, právě když je uzavřená a ohraničená.*

Důkaz. Je podobný důkazu analogického tvrzení pro $n = 1$. Pokuste se o něj sami!

1.5. Spojitost základních zobrazení. Nechť $s, p : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ jsou zobrazení definovaná předpisem

$$\begin{aligned} s(x) &= x^1 + x^2, \\ p(x) &= x^1 x^2. \end{aligned} \tag{1.5.1}$$

Ukážeme, že tato zobrazení jsou spojitá.

Nechť $x_0 \in \boldsymbol{R}^2$, $y_0 = s(x_0) = x_0^1 + x_0^2$, $\varepsilon > 0$. Pro $x \in B^{\varepsilon}_{\|\cdot\|_1}(x_0)$ máme

$$|s(x) - y_0| = |x^1 + x^2 - x_0^1 - x_0^2| \le |x^1 - x_0^1| + |x^2 - x_0^2| = \|x - x_0\|_1 < \varepsilon,$$

což znamená, že pro každé $x \in B^{\varepsilon}_{\|\cdot\|_1}(x_0)$ platí $s(x) \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ a dokazuje spojitost zobrazení s v bodě x_0.

Nechť $x_0 \in \boldsymbol{R}^2$, $y_0 = p(x_0) = x_0^1 x_0^2$, $\varepsilon > 0$. Položme $M = \|x_0\|_1$ a $\delta = \min\{1, \varepsilon/2(M+1)\}$. Pro $x \in B^{\delta}_{\|\cdot\|_1}(x_0)$ máme $|x^1| < M+1$, $|x^2 - x_0^2| < \delta$, $|x^1 - x_0^1| < \delta$, $|x_0^2| \le M < M+1$ a

$$\begin{aligned} |p(x) - y_0| &= |x^1 x^2 - x_0^1 x_0^2| = |x^1(x^2 - x_0^2) + (x^1 - x_0^1) x_0^2| \\ &\le |x^1| \cdot |x^2 - x_0^2| + |x^1 - x_0^1| \cdot |x_0^2| < (M+1)\delta + \delta(M+1) \\ &\le (M+1)\frac{\varepsilon}{2(M+1)} + \frac{\varepsilon}{2(M+1)}(M+1) = \varepsilon. \end{aligned}$$

To dokazuje spojitost zobrazení p v bodě x_0.

Ze spojitosti zobrazení s a p a z věty o spojitosti kompozice spojitých zobrazení plynou známá tvrzení o spojitosti součtu a součinu dvou spojitých funkcí.

Zobrazení s je samozřejmě lineární. Dokažte, že každé lineární zobrazení $l : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ je spojité.